VI. Variációszámítás

1. Alapfogalmak, alapfeladatok

A variációszámítás általánosabb függvénykapcsolatokra (funkcionálokra) vizsgál szélsőérték-probémákat.

1. definíció. Legyen M a valós függvények egy osztálya. Egy $\mathfrak{I} : M \to \mathbb{R}$ függvényt funkcionálnak nevezünk.

Megjegyzések.

1) M lehet például:
$C^0[a,b]$, az $[a,b]$ felett értelmezett folytonos függvények halmaza.
$C^1[a,b]$, az $[a,b]$ felett értelmezett folytonosan differenciálható függvények halmaza.
$C^2[a,b]$, az $[a,b]$ felett értelmezett kétszer folytonosan differenciálható függvények halmaza.

2) $C^0[a,b]$, $C^1[a,b]$, $C^2[a,b]$ is lineáris terek (a függvények körében értelmezett összeadásra és skalárral való szorzásra nézve). Másrészt értelmezhető bennük norma, illetve ebből távolság is.
Például $C^0[a,b]$-ben az $y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények távolsága:
$$\varrho_0(y_1, y_2) \doteq \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|$$
szerint értelmezhető. $C^1[a,b]$-ben pedig
$$\varrho_1 \doteq \max\{\varrho_0(y_1, y_2), \varrho_0(y_1', y_2')\}$$
szerint is.

3) Általánosabban lineáris normált tér felett értelmezett függvényekkel (funkcionálokkal), illetve azokra tekintett szélsőérték-problémákkal is foglalkozhatnánk.

2. definíció. Az $\mathfrak{I} : M \to \mathbb{R}$ funkcionálnak az $y_0 \in M$ függvényen abszolút minimuma (maximuma) van, ha $\forall\, y \neq y_0$-ra $(y \in M)$
$$\mathfrak{I}(y(x)) > \mathfrak{I}(y_0(x)) \qquad (\mathfrak{I}(y(x)) < \mathfrak{I}(y_0(x)))$$
teljesül.

3. definíció. Az $\mathfrak{I} : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$ funkcionálnak az $y_0 \in C^1[a,b]$ függvényen relatív erős (illetve relatív gyenge) minimuma van, ha $\exists\, \varepsilon > 0$, hogy
$$\mathfrak{I}(y(x)) > \mathfrak{I}(y_0(x)) \qquad (x \in [a,b])$$
teljesül az y_0 függvény ε-sugarú ϱ_0 (illetve ϱ_1) környezetébe eső $\forall\, y \in C^1[a,b]$ $(y \neq y_0)$ függvényre. (A maximum ugyanígy értelmezhető.)

Alapfeladatok:

1) A sík adott $P_1(a,A)$, $P_2(b,B)$ pontjait összekötő síkgörbék közül határozzuk meg azokat, melyeket az x-tengely körül megforgatva a legkisebb felszínű forgásfelület adódik.

Keressük a megoldást először, amikor a görbe az
$$\{(x, y(x)) \mid y \in C^1[a,b],\ x \in [a,b]\}$$
halmaz, azaz egy $y \in C^1[a,b]$ függvény gráfja, hogy
$$y(a) = A\,, \qquad y(b) = B \tag{1}$$
is teljesül.
Ismeretes, hogy az (1)-et teljesítő $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(y \in C^1[a,b])$ függvény x-tengely körüli megforgatásával keletkezett forgásfelület felszínét az y függvényében az
$$\mathfrak{I}(y(x)) \doteq 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx \tag{FF}$$
szerint definiált $\mathfrak{I} : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$ funkcionál adja meg.
Az 1. alapfeladat tehát: Az (FF) szerint definiált funkcionál minimumát adó, (1)-et is teljesítő $y \in C^1[a,b]$ függvények meghatározása.
Az 1. alapfeladat általánosítása, amikor egy
$$\mathfrak{I}(y(x)) \doteq \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx \tag{2}$$

szerint értelmezett $\mathfrak{I} : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$ funkcionál minimumát adó, (1)-et is teljesítő, $y \in C^1[a,b]$ függvényt keresünk, ahol az alapfüggvénynek is nevezett F függvény elég jó függvény.
Ez az általános síkbeli nemparaméteres probléma.

Kereshetjük a minimális forgásfelületet adó görbéket az általánosabb,

$$g(t) = (x(t), y(t)) \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

alakban is, ahol $g \in C^1[\alpha, \beta]$ és

$$x(\alpha) = 0, \quad x(\beta) = b, \qquad y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B \tag{3}$$

is teljesül.
Ekkor (ahogy ez szintén ismeretes) az

$$\mathfrak{I}(x(t), y(t)) = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt \tag{4}$$

szerint definiált funkcionál minimumát adó g függvényeket kell meghatározni, ez a 2. alapfeladat. Ennek általánosítása, ha egy

$$\mathfrak{I}(x(t), y(t)) \doteq \int_\alpha^\beta F(x(t), y(t), x'(t), y'(t))\, dt \tag{5}$$

szerint definiált funkcionál minimumát szolgáltató, (3)-at is teljesítő g függvényeket kell meghatározni, adott F elég jó alapfüggvény esetén.
Ez egy síkbeli paraméteres probléma.

2) Vizsgálhatók az úgynevezett térbeli (paraméteres, vagy nemparaméteres) problémák is. Ilyenkor például (nemparaméteres esetben) egy

$$\mathfrak{I}(\underline{y}(x)) = \mathfrak{I}(y_1(x), \dots, y_n(x)) \doteq$$
$$\doteq \int_a^b F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x))\, dx$$

szerint értelmezett funkcionál szélsőértékét (mondjuk minimumát) adó függvényeket keressük ($\underline{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ típusú és $\underline{y} \in C^1[a,b]$, illetve $\underline{y}(a) = \underline{A}$, $\underline{y}(b) = \underline{B}$).

3) Vizsgálhatók feltételes szélsőérték-problémák is funkcionálokra. Például az úgynevezett Lagrange-feladat: határozzuk meg egy felület két adott pontját összekötő görbék közül a minimális ívhosszúságúakat.

2. Segédtételek

1. lemma (paraméteres integrál differenciálhatósága).
Legyen $F : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos és második változójában folytonosan parciálisan differenciálható függvény. Akkor a

$$\phi(x_2) \doteq \int_a^b F(\tau, x_2)\, d\tau\ , \qquad x_2 \in [c,d]$$

szerint értelmezett $\phi : [c,d] \to \mathbb{R}$ függvény (F paraméteres integrálja) differenciálható és

$$\phi'(x_2) = \int_a^b F_{x_2}(\tau, x_2)\, d\tau \qquad x_2 \in [c,d].$$

Bizonyítás. Lásd Analízis II., 1/7 fejezet tétele $n = 1$ mellett ($f(x,t) \to F(\tau, x_2)$ átírással).

2. lemma (Lagrange). Ha az $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy bármely $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h \in C^2[a,b]$ és $h(a) = h(b) = 0$-t teljesítő függvényre

$$\int_b^a m(x)\, h(x)\, dx = 0\ ,$$

akkor $m(x) \equiv 0$ $[a,b]$-n.

Bizonyítás. Lásd Kósa: Differenciálegyenletek (jegyzet), 133. oldal.

3. Funkcionálok variációi

Ismeretesek a következők:

Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in D$-beli $e \subset \mathbb{R}^n$ iránymenti deriváltja

$$D_e f(x_0) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\,e) - f(x_0)}{t}$$

(ha a határérték létezik).
Továbbá, ha $\exists\, f'(x_0)$, akkor

- $d\,f(x, x_0) \doteq f'(x_0)(x - x_0)$ az f első differenciálja;
- $\forall$ e-re $\exists$ $D_e f(x_0) = f'(x_0) \cdot e$.

Mivel x_0 belső pontja a D (nyílt) halmaznak, így $\exists\, \delta > 0$, hogy a

$$\varphi(t) \doteq f(x_0 + t(x - x_0)), \qquad |t| < \delta$$

szerint definiálható a $\varphi : K(0, \delta) \to \mathbb{R}$ valós függvény, melyre az előbbiek szerint

$$\varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} =$$
$$= D_{(x - x_0)} f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) = d\,f(x, x_0)$$

teljesül, ha $\exists\, f'(x_0)$, azaz f első differenciálja $\varphi'(0)$.
A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele és az előbbiek adják, hogy ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban és $\exists f'(x_0)$, akkor $\varphi'(0) = 0$. Ha $\exists\, f''$, akkor $\exists\, \varphi''(0) = d^2 f(x, x_0)$, azaz f második differenciálja éppen φ''. Miután pedig egy f többváltozós függvény lokális szélsőértékeinek meghatározásában az első- és második differenciálnak (azaz $\varphi'(0)$ és $\varphi''(0)$-nak) van alapvető szerepe, így természetes, hogy funkcionálokra is bevezessük ezen fogalmak analógiáit, az első és második variációt.

Definíció. Legyen F kétszer folytonosan differenciálható a $D \subset [a, b] \times \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon, $\mathfrak{I}$ pedig

$$(*) \qquad \mathfrak{I}(y(x)) \doteq \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

($y \in C^1[a, b]$, $y(a) = A$, $y(b) = B$) szerint értelmezett funkcionál $C^1[a, b]$-n. Legyen továbbá $\eta \in C^2[a, b]$, hogy $\eta(a) = \eta(b) = 0$, míg $\delta > 0$ olyan, hogy ha adott $y \in C^1[a, b]$-re $(x, y(x), y'(x)) \in D$, akkor $|t| < \delta$ esetén az $\tilde{y}(x) = y(x) + t\eta(x)$ szerint definiált $\tilde{y}$ függvényre $(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) \in D$ (és $\tilde{y}(a) = A$, $\tilde{y}(b) = B$) teljesül.
Ekkor a

$$(\circ) \quad \varphi(t) \doteq \mathfrak{I}(y(x) + t\eta(x)) \doteq \int_a^b F(x, y(x) + t\eta(x), y'(x) + t\eta'(x))dx$$

($|t| < \delta$) szerint értelmezett (kétszer differenciálható) φ függvényre létező $\varphi'(0)$ és $\varphi''(0)$ értékeket a $(*)$ szerint értelmezett $\mathfrak{I}$ funkcionál első, illetve második variációjának nevezzük és rendre $\delta\mathfrak{I}$, illetve $\delta^2\mathfrak{I}$-vel jelöljük.

Tétel. Ha a definíció feltételei mellett $\mathfrak{I}$ az y függvényen lokális szélsőértéket vesz fel, akkor $\delta\mathfrak{I} = 0$. (A lokális minmum szükséges feltétele miatt.)

Bizonyítás. Ha a $(*)$ szerint értelmezett $\mathfrak{I}$ funkcionálnak y-ban lokális minimuma van, akkor $\exists\, r > 0$, hogy

$$\mathfrak{I}(y) \leq \mathfrak{I}(\psi) \qquad \forall\, \psi \in C^1[a, b],\ \psi(a) = A,\ \psi(b) = B$$

esetén, melyre $\varrho_1(y, \psi) < r$. Mivel

$$\varrho_1(y, y + t\eta) = |t| \sup_{x \in [a, b]} \{|\eta(x)|, |\eta'(x)|\},$$

így $\exists\, r_0 > 0$, hogy $\varrho_1(y, y + t\eta) < r$, ha $|t| < r_0$, azaz $\mathfrak{I}(y) \leq \mathfrak{I}(y + t\eta)$, ha $|t| < r_0$, ami φ 0-beli definíciója miatt adja, hogy $\varphi(0) < \varphi(t)$ $\forall\, |t| < r_0$, azaz φ-nek 0-ban lokális szélsőértéke van. Másrészt $\exists\, \varphi'(0)$ (az 1. lemma miatt), így $\delta\mathfrak{I} \doteq \varphi'(0) = 0$, amit bizonyítani kellett.

4. Az Euler-Lagrange differenciálegyenlet

Tétel (a lokális szélsőérték egy szükséges feltétele).
Legyen $F : D \subset [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható

függvény, $\mathfrak{J}$ $(*)$ szerint értelmezett funkcionál $C^1[a,b]$-n. Ha $\mathfrak{J}$-nek y-ban ($y \in C^1[a,b]$, $y(a) = A$, $y(b) = B$) lokális extrémuma van, akkor y-ra $[a,b]$-n teljesül az

$$\text{(E-L)} \qquad F_y(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}\left[F_{y'}(x,y(x),y'(x))\right] = 0$$

Euler-Lagrange differenciálegyenlet.

Bizonyítás. Az adott feltételek mellett, a φ definíciója miatt $\exists\ \varphi'(0)$, melyet az 1. lemma és a láncszabály miatt

$$\varphi'(0) = \int_a^b \left[F_y(x,y(x),y'(x))\eta(x) + F_{y'}(x,y(x),y'(x))\eta'(x)\right] dx$$

szerint kapunk.
Ugyanakkor a parciális integrálás tétele szerint

$$\int_a^b F_{y'}(x,y(x),y'(x))\eta'(x)dx = \left[F_{y'}(x,y(x),y'(x))\eta(x)\right]_a^b -$$
$$- \int_a^b \eta(x)\frac{d}{dx}\left[F_{y'}(x,y(x),y'(x))\right] dx =$$
$$= - \int_a^b \eta(x)\frac{d}{dx}\left[F_{y'}(x,y(x),y'(x))\right] dx.$$

Ezt $\varphi'(0)$ előbbi alakjába helyettesítve:

$$\varphi'(0) = \int_a^b \left\{F_y(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}\left[F'_y(x,y(x),y'(x))\right]\right\} \eta(x)\, dx$$

adódik. Az előző tétel miatt $\varphi'(0) = 0$ és akkor a Lagrange lemma adja a tétel állítását.

Megjegyzések.

1) Ha a tétel feltételei mellett F-re még az is teljesül, hogy

$$F_{y'y'}(x,y(x),y'(x)) \neq 0 \qquad \forall\ x \in [a,b],$$

akkor $\exists\ y''$ és folytonos.

2) Ha pedig $y \in C^2[a,b]$ is teljesül, akkor (E-L)-ben elvégezve a differenciálást

$$F_y - \left[F_{y'x} + F_{y'y}y' + F_{y'y'}y''\right] = 0\ ,$$

illetve átrendezéssel

$$\text{(E-L}'\text{)} \qquad y''F_{y'y'} + y'F_{y'y} + F_{y'x} - F_y = 0$$

adódik.

3) Speciális típusú alapfüggvények:
– Ha F nem függ x-től és $F_{y'y'} \neq 0$, úgy ha y megoldása (E-L)-nek, akkor $\exists\ c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\text{(1)} \qquad F - y'F_{y'} = c.$$

Bizonyítás. (E-L$'$) ebben az esetben az

$$\text{(E-L}''\text{)} \qquad y''F_{y'y'} + y'F_{y'y} - F_y = 0$$

alakot ölti. Másrészt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[F - y'F_{y'}\right] &= F_yy' + F_{y'}y' + F_{y'}y'' - \\ &- y''F_{y'} - y'F_{y'y}y' - y'F_{y'y'}y'' = \\ &= y'\left[F_y - y'F_{y'y} - y''F_{y'y'}\right] = 0\ ,\end{aligned}$$

ami adja az állítást.

Ha F nem függ y-tól, úgy y akkor és csak akkor megoldása (E-L)-nek, ha $\exists\ c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\text{(2)} \qquad F_{y'}(x,y'(x)) = c \qquad (x \in [a,b]).$$

Bizonyítás. Ekkor (E-L) adja, hogy

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y'(x)) = 0,$$

ami viszont akkor, és csak akkor teljesül, ha (2) fennáll.

– Ha F nem függ y'-től, úgy y akkor, és csak akkor megoldása (E-L)-nek, ha

$$(3) \qquad F_y(x, y(x)) = 0 \qquad (x \in [a, b])$$

teljesül.
Bizonyítás. Ekkor (E-L) a (3) egyenlettel ekvivalens.

5. Az 1. alapfeladat megoldása

Az

$$\mathfrak{I}(y(x)) \doteq 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx, \qquad y \in C^2[a, b],$$

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B$$

funkcionál minimumát adó függvény meghatározása volt a feladat.
Így

$$F(y(x), y'(x)) = y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)} \qquad (x \in [a, b])$$

miatt F nem függ x-től, tehát az előző paragrafus első esetével van dolgunk.
Ezért, ha $\mathfrak{I}$ az y függvényen minimumot vesz fel, akkor

$$F - y'F_{y'} = y\sqrt{1 + y'^2} - y'y\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

azaz az (E-L) differenciálegyenlet speciális alakja most

$$\text{(FF-D)} \qquad y - c\sqrt{1 + y'^2} = 0.$$

Ez egy implicit differenciálegyenlet.

→ $\sqrt{1 + y'^2} > 0$, így (FF-D)-nek nincs olyan integrálgörbéje, mely az $y \geq 0$ félsíkból átmenne az $y < 0$ félsíkba, vagy fordítva, így c-t választhatjuk nemnegatívnak. Ha $c > 0$ esetén y megoldás, akkor $-y$ is kielégíti (FF-D)-t, ha c helyett $-c$-t írunk.

→ $y = c$ (≥ 0) megoldása (FF-D)-nek, de nem teljesíti (E-L)-t, mert

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = \sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx}\frac{y\,y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 1 - 0 \neq 0.$$

→ Nyilván $c > 0$ kell, hogy legyen, hiszen egyébkeént $y = 0$ lenne a megoldás, ami az előbbiek miatt nem teljesíti (E-L)-t.

→ Ha y olyan megoldás, mely semmilyen szakaszon sem állandó, akkor y' legfeljebb egy pontban tűnhet el, mert ha $\exists\, a < b$, hogy $y'(a) = y'(b) = 0$ és $y'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$, akkor (FF-D) miatt $y(a) = y(b) = c$, ami adná a Rolle-tétel miatt hogy $\exists\, x \in (a, b)$, $y'(x) = 0$, ami ellentmondás.

→ Legyen most y az (FF-D) olyan megoldása, amelyre $y'(x) \neq 0$ $(x \in D_y)$. Akkor (FF-D)-ből nyilván $y(x) > c$ $(x \in D_y)$ következik, hiszen $\sqrt{1 + y'^2} > 1$.
Az $y(x) - c\sqrt{1 + z^2} = 0$ egyenletnek $\forall\, x \in D_y$-ra a

$$z_1(x) = \sqrt{\frac{y(x)}{c}^2 - 1}, \qquad z_2(x) = -\sqrt{\frac{y(x)}{c}^2 - 1}$$

szerint értelmezett függvények a megoldásai, melyek folytonosan differenciálhatók D_y-on.
Mivel $z_1(x) > 0$, $z_2(x) < 0$ $(x \in D_y)$, így az egyenletnek nincs más folytonos megoldása. Ugyanakkor kielégíti az y' folytonos függvény is, így $y'(x) = z_1(x)$ vagy $y'(x) = z_2(x)$. Tehát y kielégíti az

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1} \qquad y' = -\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}$$

$(y > 0,\ c > 0)$ differenciálegyenletek valamelyikét.

→ Ezek általános megoldása

$$y = c\,\mathrm{ch}\,\frac{x-\beta}{c}, \qquad x \in (\beta, \infty),$$

illetve

$$y = c\,\mathrm{ch}\,\frac{x-\beta}{c}, \qquad x \in (-\infty, \beta),$$

és ezek kielégítik (FF-D)-t is, sőt az $x = \beta$ helyen is.

Ha tehát létezik megoldása a feladatnak, az csak az

$$y(x, c, \beta) \doteq c\,\mathrm{ch}\,\frac{x-\beta}{c}\,, \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \beta \in \mathbb{R})$$

szerint meghatározott, úgynevezett láncgörbe lehet.

Feladatsor

1) Adjuk meg az alábbi görbeseregek differenciálegyenletét:

$$y = e^{cx}\ ; \qquad y = (x-c)^3\ ; \qquad y = cx^3\ ; \qquad y = \sin(x+c)\ .$$

2) Oldjuk meg az alábbi szeparábilis differenciálegyenleteket, illetve a rájuk vonatkozó kezdetiérték problémákat:

$$y' = e^{2x} - x \qquad\qquad y' = 2x\,, \quad y(1) = 4$$
$$(x+1)y' = -xy \qquad\qquad (x^2-1)y' + 2xy^2 = 0\,, \quad y(0) = 1$$
$$xyy' = \sqrt{y^2+1} \qquad\qquad y' = 3\sqrt[3]{y^2}\,, \quad y(1) = 0$$
$$y' - xy^2 = 2xy \qquad\qquad xy' + y = y^2\,, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$
$$y' = y\cos x \qquad\qquad y' = (1+y^2)\ln x\,, \quad y(1) = 0$$

3) Oldjuk meg a következő lineáris differenciálegyenleteket:

$$xy' - 2y = 2x^4 \qquad\qquad (2x+1)y' = 4x + 2y$$
$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\sin x} \qquad\qquad x(y' - y) = e^x$$
$$x^2y' + xy + 1 = 0 \qquad\qquad y' = 2x(x^2 + y)$$
$$xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x} \qquad\qquad xy' + 2y = \sin(x)$$

4) Oldjuk meg a következő egzakt differenciálegyenleteket:

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$$
$$(2x + y)dx + (x - 2y)dy = 0$$
$$\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y' = 0$$
$$\frac{x-y}{(x+y)^3} + \frac{2x}{(x+y)^3}y' = 0$$
$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$$
$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$$
$$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$$

5) A korábbiakra visszavezetéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

$$(x+2y)dx - xdy = 0$$
$$(x-y) + (x+y)y' = 0$$
$$y^2 - 2xy + x^2y' = 0$$
$$2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$$
$$y^2 + x^2y' = xyy'$$
$$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$$
$$xy' - y = x\,\mathrm{tg}^{\frac{y}{x}}$$
$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$
$$2x + y + 1 + (4x + 2y - 3)y' = 0$$
$$x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$$
$$2x - 4y + 6 + (x + y - 3)y' = 0$$
$$(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$$
$$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$$
$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$$
$$(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$$
$$xy^2(xy' + y) = 1$$
$$y^2dx - (xy + x^3)dy = 0$$
$$\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{1}{y}dy = 0$$
$$xydx = (y^3 + x^2y + x^2)dy$$
$$(2x^2y^2 + y)dx - (x^3y - x)dy = 0$$

6) Egzisztencia és unicitás tételek Cauchy-feladatokra

a) Bizonyítsa be, hogy egy teljes metrikus tér bármely zárt altere is teljes metrikus tér.

b) Legyen $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f : [a,b] \times T \to \mathbb{R}$ $(f = f_1, \ldots, f_n)$ olyan függvény, hogy $\forall\ D_j f_i$ létezik és korlátos $[a,b] \times T$-n. Bizonyítsa be, hogy f Lipschitz feltételt teljesít $[a,b] \times T$-n az utolsó n változójában.

c) Bizonyítsuk be, hogy a Picard-Lindelöf tétel bizonyításában szereplö $(X,d) = (C_n^*, d)$ zárt altere a $C_n(I_1)$ teljes metrikus térnek.

d) Határozza meg az alábbi Cauchy-feladatok megoldását a Picard-féle szukcesszív approximációval:

$$y' = xy\ , \quad y(0) = 1\ ; \qquad y' = x^2 - y\ , \quad y(0) = 1\ .$$

e) A Picard-féle módszerrel adjunk közelítő megoldásokat az alábbi Cauchy-feladatokra. Becsüljük meg, milyen intervallumon biztosított a megoldás létezése (a közelítés konvergenciája).

$$y' = x - y^2\ , \qquad y(0) = 0 \quad (y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \text{ megh.});$$
$$y' = y^2 - 3x^2 - 1\ , \qquad y(0) = 1 \quad (y_0,\ y_1,\ y_2 \text{ megh.});$$
$$y' = y + e^y\ , \qquad y(0) = 1 \quad (y_0,\ y_1,\ y_2, \text{ megh.}).$$

(Az elsö feladatnál becsüljük meg az y_3 közelítés pontosságát is az $x = 0,5$ és az $x = 1$ értékeknél.)

f) Bizonyítsa be, hogy az (n-KÉP) megoldhatóságának vizsgálatában szereplő speciális (DER-KÉP) problémánál teljesülnek a Picard-Lindelöf tétel feltételei.

g) Vizsgálja az $y' = \sqrt{|y|}$ differenciálegyenletre vonatkozó valamilyen Cauchy-feladat megoldhatóságát és a megoldás egyértelműségét.

7) Az alábbi feladatokban vizsgálja meg, hogy a megadott függvények lineárisan függetlenek-e:

a) $f_1(x) = x + 2\,, \qquad f_2(x) = x - 2 \qquad (x \in \mathbb{R});$
b) $f_1(x) = \sin(x)\,, \qquad f_2(x) = \cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R});$
c) $f_1(x) = 1\,, \qquad f_2(x) = x\,, \qquad f_3(x) = x^2 \qquad (x \in \mathbb{R});$
d) $f_1(x) = e^x\,, \qquad f_2(x) = e^{2x}\,, \qquad f_3(x) = e^{3x} \qquad (x \in \mathbb{R});$
e) $f_1(x) = x\,, \qquad f_2(x) = e^x\,, \qquad f_3(x) = xe^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$

8) Határozza meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

a) $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0\,,$ ha $y_1(x) = x$ ismert;
b) $y'' - 2(1 + \mathrm{tg}^2(x))y = 0\,,$ ha $y_1(x) = \mathrm{tg}(x)$ ismert;
c) $y'' - y'\,\mathrm{tg}(x) + 2y = 0\,,$ ha $y_1(x) = \sin(x)$ ismert;
d) $xy''' - y'' - xy' + y = 0\,,$ ha $y_1(x) = x,\ y_2(x) = e^x$ ismert.

9) Adja meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

a) $x(x-1)y'' - xy' + y = 0\,;$
b) $xy'' + 2y' - xy = 0\,;$
c) $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 0\,.$

10) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket:

$y'' + y' - 2y = 0\,; \qquad y'' + 4y' + 3y = 0\,; \qquad y'' - 2y' = 0\,;$
$y'' - 4y' + 5y = 0\,; \qquad y'' + 2y' + 10y = 0\,; \qquad y'' + 4y = 0\,;$
$y''' - 8y = 0\,; \qquad y^{(4)} - y = 0\,; \qquad y^{(6)} + 64y = 0\,;$
$y'' - 2y' + y = 0\,; \qquad 4y'' + 4y' + y = 0\,;$
$y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0\,; \qquad y^{(5)} - 10y^{(3)} + 9y' = 0\,;$
$y^{(4)} + 2y'' + y = 0\,; \qquad y''' - 3y'' + 3y' - y = 0\,;$
$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0\,; \qquad y''' - 3y' + 2y = 0\,.$

11) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket:

$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}\,; \qquad y'' + y = 4xe^x\,;$
$y'' - y = 2e^x - x^2\,; \qquad y'' + y' - 2y = 3xe^x\,;$
$y'' - 3y' + 2y = \sin(x)\,; \qquad y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}\,;$
$y'' - 3y' + 2y = \cos(x)\,; \qquad y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin(2x)\,;$
$y'' + y = x\sin(x)\,; \qquad y''' + y' = \sin(x) + x\cos(x)\,;$
$y'' + 4y' + 3y = \mathrm{ch}(x)\,; \qquad y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}\,;$
$y'' + y = \dfrac{1}{\sin(x)}\,; \qquad y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}(x)\,;$
$(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2\,.$

12) Határozza meg az alábbi Cauchy-feladatok megoldását:

a) $y''' - y' = 0\,, \qquad y(0) = 3\,, \quad y'(0) = -1\,, \quad y''(0) = 1\,;$
b) $y'' - 2y' + y = 0\,, \qquad y(2) = 1\,, \quad y'(2) = -2\,;$
c) $y'' + y = 4e^x\,, \qquad y(0) = 4\,, \quad y'(0) = -3\,;$
d) $y'' - 2y' = 2e^x\,, \qquad y(1) = -1\,, \quad y'(1) = 0\,;$
e) $y'' + y = 2x - \pi\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y(\pi) = 0\,.$

13) Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszereket:

a) $\begin{cases} y_1' - y_1 + y_2 = 0 \\ y_2' + 4y_1 - y_2 = 0\,, \end{cases}$ b) $\begin{cases} y_1' + y_1 - 8y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = 0\,, \end{cases}$

c) $\begin{cases} y_1' - y_1 + y_2 - y_3 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ y_3' - 2y_1 + y_2 = 0\,, \end{cases}$ d) $\begin{cases} y_1' - y_2 = e^x \\ y_2' - y_1 = x^2\,. \end{cases}$

14) Feladatok a stabilitáshoz.

a) Vizsgáljuk meg, hogy az

$$y'(t) = t - y(t) \qquad (t \geq 0)$$

differenciálegyenlet $x(0) = 1$ feltételt kielégítő $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ megoldása stabil-e, illetve aszimptotikusan stabil-e.

b) Vizsgáljuk meg az

$$\begin{cases} y_1' = 4y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszer azon

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

megoldásának stabilitását, melyre

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

c) Vizsgáljuk meg az

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + 2y_1y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 + 5y_1^4 + y_2^3 \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszerre, hogy az

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(úgynevezett nullmegoldás) stabil-e.

d) Vizsgáljuk meg az

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 - t^2 \\ y_2' = 3y_1 - y_2 - t \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszer azon

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

megoldásának stabilitását, melyre

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$