# IV. MAGASABBRENDŰ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

## 1. Az $n$-edrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános elmélete

**1. definíció.** Legyenek $a_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ folytonos függvények. A

$$(\mathsf{H_nD}) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} = 0$$

egyenletet $n$-edrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük.

Egyszerű számolással bizonyítható a következő tétel:

**1. tétel.** Ha az $y_1, \dots, y_k : I \to \mathbb{R}$ függvények megoldásai $(\mathsf{H_nD})$-nek $I$-n, akkor $\forall\, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ esetén az

$$y = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i$$

függvény is megoldás $I$-n.

**2. definíció (lineáris függőség és függetlenség).**
Az $y_1, \dots, y_k : I \to \mathbb{R}$ függvények lineárisan függőek $I$-n, ha létezik $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ $(\sum_{i=1}^{k} c_i^2 > 0)$ konstansrendszer, hogy

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x) = 0 \qquad (\forall x \in I).$$

$y_1, \dots, y_k : I \to \mathbb{R}$ lineárisan függetlenek, ha $(*)$ csak úgy teljesül, ha $c_i = 0$ $(i = 1, \dots, k)$.



**3. definíció.** Az $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ $n-1$-szer differenciálható függvények Wronski-determinánsa:

$$W = W(y_1, \dots, y_n) \doteq \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

**2. tétel (Liouville-formula).** Ha az $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ függvények megoldásai $(\mathsf{H_nD})$-nek $I$-n és $x_0 \in I$ adott, akkor

$$W(x) = W(y_1(x), \dots, y_n(x)) = W(x_0) \exp\left[ -\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt \right].$$

**Bizonyítás.** Könnyen belátható, hogy

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1' & \dots & y_n' \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -\sum_{i=1}^{n} a_i(x) y_1^{(n-i)} & \dots & -\sum_{i=1}^{n} a_i(x) y_n^{(n-i)} \end{vmatrix} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-i)} & \dots & y_n^{(n-i)} \end{vmatrix} = -a_1(x) W(x) \qquad (x \in I).$$

Így $W$ az

$$y'(x) = -a_1(x)y(x), \qquad y(x_0) = W(x_0)$$

(1-KÉP) probléma egyértelműen létező

$$W(x) = W(x_0)\exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt\right]$$

megoldása, és ezt kellett bizonyítani.

**1. következmény.** ($\mathrm{H}_n\mathrm{D}$) egy $y_1, \ldots, y_n$ megoldásrendszerének Wronski-determinánsa vagy $\equiv 0$, vagy sehol sem 0.

**4. definíció (alaprendszer).** Az $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ függvények ($\mathrm{H}_n\mathrm{D}$) alaprendszerét alkotják, ha megoldásai annak és lineárisan függetlenek.

**3. tétel.** $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ akkor, és csak akkor alaprendszere ($\mathrm{H}_n\mathrm{D}$)-nek, ha $\forall\ y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ megoldás $I$-n, és $W(x) \neq 0$.

**Bizonyítás.**

a) Ha $W(x) \neq 0$ $(x \in I)$ és $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = 0 \qquad (\forall x \in I),$$

akkor

$$(\square) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j)}(x) = 0 \qquad (\forall x \in I, j = 0, \ldots, n-1)$$

teljesül, ami egy lineáris egyenletrendszer $c_1, \ldots, c_n$-re, melynek determinánsa éppen $W(x) \neq 0$ $(x \in I)$ $\Rightarrow$ $c_1 = \cdots = c_n = 0$ $\Rightarrow$ az $y_1, \ldots, y_n$ megoldások lineárisan függetlenek $\Rightarrow$ $y_1, \ldots, y_n$ alaprendszer.

b) Ha $y_1, \ldots, y_n$ alaprendszere ($\mathrm{H}_n\mathrm{D}$)-nek és létezne $x_0 \in I$, hogy $W(x_0) = 0$, akkor léteznének $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ $(\sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0)$ konstansok, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j)}(x_0) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$



egyenletrendszer megoldásai.
Legyen $y$ ($\mathrm{H}_n\mathrm{D}$) olyan megoldása $I$-n, melyre

$$y^{(j)}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j)}(x_0) = 0 \qquad (j = 0, \ldots, n-1).$$

Az így kapott ($n$-KÉP)-nek csak egy megoldása van. De $y \equiv 0$ és $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ is megoldás, így

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = 0 \qquad (\forall\ x \in I),$$

azaz $y_1, \ldots, y_n$-ek lineárisan függőek, ami ellentmondás.
Így $W(x) \neq 0\ \forall\ x \in I$.

**4. tétel ($\mathrm{H}_n\mathrm{D}$ általános megoldása).** Legyen $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ ($\mathrm{H}_n\mathrm{D}$) alaprendszere $I$-n, akkor ($\mathrm{H}_n\mathrm{D}$) $\forall\ y : I \to \mathbb{R}$ megoldása

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I)$$

alakú, ahol $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ konstansok.

**Bizonyítás.**
Ha $y_1, \ldots, y_n$ ($\mathrm{H}_n\mathrm{D}$) alaprendszere, akkor $W(x_0) \neq 0\ \forall\ x_0 \in I$. Ha $y : I \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges megoldása ($\mathrm{H}_n\mathrm{D}$)-nek, akkor legyen $c_1, \ldots, c_n$ a

$$(\circ) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j)}(x_0) = y^{(j)}(x_0) \qquad (j = 0, \ldots, n-1)$$

egyenletrendszer ($W(x_0) \neq 0$ miatt létező) megoldása.
Ekkor a

$$\psi(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I)$$

szerint definiált függvény olyan megoldása ($\mathrm{H}_n\mathrm{D}$)-nek $I$-n, melyre teljesülnek a

$$\psi^{(j)}(x_0) = y^{(j)}(x_0) \qquad (j = 0, \ldots, n-1)$$

kezdeti feltételek ($\circ$) miatt.
Így $\psi$ és $y$ ugyanazon ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-re vonatkozó ($n$-KÉP) megoldásai, ezért megegyeznek, azaz

$$y(x) = \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I),$$

amit bizonyítani kellett.

**Megjegyzések.**

1) Az általános megoldáshoz így elég az alaprendszert meghatározni.

2) Belátható (lásd Kósa 90. oldal), hogy alaprendszer mindig létezik.

3) Az alaprendszer meghatározására nincs általános módszer.

Fontos viszont az alábbi, D'Alembert-től származó fokszámcsökkentő eljárás:

**5. tétel.** Ha ismert ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) $m$ számú lineárisan független $y_1, \ldots, y_m : I \to \mathbb{R}$ megoldása $I$-n, akkor ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) megoldásainak meghatározása visszavezethető egy $(n-m)$-edrendű lineáris homogén differenciálegyenlet megoldására.

**Bizonyítás.**
– Legyenek $y_1, \ldots, y_m$ ($\neq 0$) lineárisan független megoldásai ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek, míg $y : I \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges megoldás, akkor legyen

$$(\Delta) \qquad u \doteq \left(\frac{y}{y_1}\right)',$$

azaz

$$y(x) = y_1(x) \int u(x)dx .$$

Innen

$$y' = y_1' \int u(x)dx + y_1 u , \quad \ldots , \quad y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u(x)dx + \cdots + y_1 u^{(n-1)}$$

következik. $y, y', \ldots, y^{(n)}$ kapott értékeit ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-be helyettesítve:

$$\left[y_1^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y_1^{(n-i)}\right] \int u dx + y_1 u^{(n-1)} + \cdots + A(x)u = 0$$



adódik, melyből – felhasználva, hogy $y_1 \neq 0$ megoldása ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek – kapjuk, hogy $u$ teljesíti a

$$(\mathsf{H}_{(n-1)}\mathsf{D}) \qquad u^{(n-1)} + Q_1(x)u^{(n-2)} + \cdots + Q_{n-1}(x)u = 0$$

$(n-1)$-edrendű differenciálegyenletet és viszont: ha $u$ teljesíti ($\mathsf{H}_{(n-1)}\mathsf{D}$)-t, akkor a ($\Delta$)-ben definiált y teljesíti ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-t.
– Válasszuk most ($\Delta$)-ben $y$-nak rendre az $y_2, \ldots, y_m$ függvényeket, akkor a

$$(\Delta') \qquad u_k \doteq \left(\frac{y_k}{y_1}\right)' \qquad (k = 2, \ldots, m)$$

függvények megoldásai ($\mathsf{H}_{(n-1)}\mathsf{D}$)-nek, továbbá lineárisan függetlenek, mert ellenkező esetben $\exists\, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ ($\sum \alpha_i^2 > 0$), hogy

$$\sum_{i=2}^{m} \alpha_i u_i(x) = 0 \qquad (x \in I),$$

ami adja, hogy

$$\sum_{i=2}^{m} \alpha_i \int u_i + \alpha_1 = 0 \qquad (x \in I).$$

Ebből, a ($\Delta'$)-ből adódó

$$\frac{y_k}{y_1} = \int u_k(x)dx$$

egyenlőség miatt

$$\sum_{i=2}^{m} \alpha_i \frac{y_i}{y_1} + \alpha_1 = 0 \qquad (x \in I),$$

illetve

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

következne, ellentétben azzal, hogy $y_1, \ldots, y_m$ lineárisan függetlenek.

– Így $(H_{(n-1)};D)$-nek ismert $m-1$ lineárisan független megoldása, ezek $u_2, \dots, u_m$. Ebből az előbbi eljárással meghatározható $(H_{(n-2)}D)$ $m-2$ számú lineárisan független megoldása. Az eljárást folytatva egy $(H_{(n-m)};D)$ $n-m$-edrendű differenciálegyenlethez jutunk.

Ha $(H_{(n-m)};D)$ megoldásait meghatározzuk, akkor azokból $(H_{(n-m+1)}D)$, $\dots$, $(H_{(n-1)};D)$ és így $(H_n D)$ megoldásai is adottak lesznek $(\Delta)$ szerint.

**2. következmény.** Legyen $y_1 : I \to \mathbb{R}$ $(y_1 \neq 0)$ megoldása az

$$(H_2D) \qquad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

differenciálegyenletnek. Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor, és csak akkor megoldása $(H_2D)$-nek, ha az

$$u : I \to \mathbb{R} \qquad u \doteq \left(\frac{y}{y_1}\right)'$$

függvény megoldása az

$$(H_1D) \qquad u' + \left(a_1(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right) u = 0$$

differenciálegyenletnek. Így $(H_2D)$ általános megoldása

$$y = cy_1 \int \exp\left[-\int \left(a_1(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right) dx\right] dx =$$
$$= cy_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left[-\int a_1(x)dx\right] dx\,.$$

**Bizonyítás.** Az előbbi eljárás azonnal adja $(H_1D)$-t, ami egy szeparábilis differenciálegyenlet, az

$$u = c \int \exp\left[-\int (a_1(x) + 2)dx\right] dx =$$
$$= cy_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left[-\int a_1(x)dx\right] dx\,.$$

megoldással, ami $y = y_1 \int u\,dx$ szerint adja az állítást.



# 2. Konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenletek

**Definíció.** Ha $(H_nD)$-ben

$$a_i(x) = a_i \in \mathbb{R} \qquad (x \in I),$$

akkor a kapott

$$(KH_nD) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i} = 0$$

egyenletet $n$-edrendű konstansegyütthatós lineáris homogén differenciál-egyenletnek nevezzük.
$(KH_nD)$ karakterisztikus polinomja:

$$(KP) \qquad P(\lambda) \doteq \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i},$$

míg karakterisztikus egyenlete:

$$(KE) \qquad \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i} = 0.$$

**Tétel.** Ha $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ $p_1, \dots, p_k$ $(\in \mathbb{N})$-szeres (különböző) gyökei $(KH_nD)$ karakterisztikus egyenletének, hogy $p_1 + \dots + p_n = n$, akkor

$$(AR) \qquad \begin{cases} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{p_1 - 1}e^{\lambda_1 x} \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_k x}, & xe^{\lambda_k x}, & \dots, & x^{p_k - 1}e^{\lambda_k x} \end{cases}$$

alaprendszere $(KH_nD)$-nek, ha $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valósak.

Ha például $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ konjugált komplex gyökei $(KE)$-nek, hogy $p_1 = p_2 = p$-szeresek, akkor $(AR)$ első két sora helyett

$$\begin{matrix} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \dots, & x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \dots, & x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{matrix}$$

szerepel. (Hasonló a helyzet a további komplex gyökök esetén is.)

**Bizonyítás.** (Csak a valós esetre)

a) (AR) elemei megoldásai $(\mathsf{KH}_n\mathsf{D})$-nek:
– $e^{\lambda_i x}$ $(i = 1, \ldots, k)$ esetén egyszerű helyettesítéssel győződhetünk meg erről.
$xe^{\lambda_i x}, \ldots, x^{p_i - 1}e^{\lambda_i x}$ $(i = 1, \ldots, k)$ esetén fel kell használni azt is, hogy ha $\lambda_i$ $p_i$-szeres gyöke (KE)-nek, akkor

$$P(\lambda_i) = P'(\lambda_i) = \cdots = P^{(p_i-1)}(\lambda_i) = 0$$

teljesül.

b) (AR) függvényei lineárisan függetlenek:

Tegyük fel, hogy lineárisan függőek. Ekkor léteznek $c_i$ $(\sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0)$ konstansok, melyekkel képezve (AR) függvényeinek lineáris kombinációját, az azonosan 0-nak adódik, ami adja, hogy

$$e^{\lambda_1 x}P_{n_1}(x) + \cdots + e^{\lambda_m x}P_{n_m}(x) \equiv 0, \tag{1}$$

ahol $m \le k$, $P_{n_k}$ fokszáma $\le n_k$ és létezik $P_{n_k}$, hogy abban létezik 0-tól különböző együttható. Legyen ez $P_{n_1} = P_l$ $l$-edfokú. Szorozzuk meg (1)-et $e^{-\lambda_m x}$-szel, akkor

$$P_l(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x} + \cdots + P_{n_{m-1}}(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x} + P_{n_m}(x) \equiv 0$$

következik, ahol $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$ $(i = 1, \ldots, m-1)$. Az utóbbi egyenletet $n_m + 1$-szer differenciálva kapjuk, hogy

$$P_l^1(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x} + \cdots + P_{n_{m-1}}^1(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x} \equiv 0\,,$$

ahol $P_l^1(x)$ is $l$-edfokú, azaz $x^l$ együtthatója nem 0. Ebből $e^{\lambda_m x}$-szel való szorzás után

$$P_l^1(x)e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_{n_{m-1}}^1(x)e^{\lambda_{m-1} x} \equiv 0 \tag{2}$$

adódik.
Az eljárást $m-1$-szer ismételve ( (2)-vel kezdve) kapjuk, hogy

$$P_l^{m-1}(x)e^{\lambda_1 x} \equiv 0\,,$$

ahol $P_l^{m-1}$ is $l$-edfokú, ami viszont azt jelentené, hogy egy $l$-edfokú polinom azonosan nulla, ami lehetetlen.
Így (AR) függvényei lineárisan függetlenek.



**Következmény.** Az

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{$\mathsf{KH_2D}$}$$

karakterisztikus egyenlete a másodfokú

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{$\mathsf{KE_2}$}$$

egyenlet, így ha ennek gyökei:

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor $(\mathsf{KH_2D})$ általános megoldása
$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x};$$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \in \mathbb{R}$, akkor $(\mathsf{KH_2D})$ általános megoldása
$$y = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2\, x\, e^{\lambda_0 x};$$

c) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, akkor $(\mathsf{KH_2D})$ általános megoldása
$$y = [c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]e^{\alpha x}.$$

## 3. $n$-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek

**Definíció.** Legyenek $a_i, b : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ adott folytonos függvények, akkor az

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)y^{(n-i)} = b(x) \tag{$\mathsf{IH_nD}$}$$

differenciálegyenletet $n$-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek nevezzük.

**1. tétel.** Legyen $y_p$ partikuláris megoldása $(\mathsf{IH_nD})$-nek. Az $y$ akkor, és csak akkor megoldása $(\mathsf{IH_nD})$-nek, ha az

$$y_H : I \to \mathbb{R}, \qquad y_H(x) = y(x) - y_p(x)$$

szerint definiált függvény megoldása az $(\mathsf{IH_nD})$-ből képzett $(\mathsf{H_nD})$-nek.

**Bizonyítás.**

a) Ha $y$ és $y_p$ megoldásai ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek, akkor az $y$-ra és $y_p$-re felírt ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-t kivonva egymásból

$$(y-y_p)^{(n)}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)(y-y_p)^{(n-i)}=0$$

adódik, azaz $y-y_p \doteq y_H$ valóban megoldása ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek.

b) Ha $y_p$ megoldása ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek és $y_H$ megoldása ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek, akkor a két egyenlet összeadása adja, hogy $y \doteq y_H+y_p$ is megoldása ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek.

**Következmény.** Ha $y_p$ ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$) egy partikuláris megoldása, $y_1,\dots,y_n$ pedig ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszere, akkor ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$) általános megoldása

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_iy_i+y_p\ .$$

Hogyan határozható meg $y_p$?

**2. tétel (a konstansvariálás módszere ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-re).** Ha $y_1,\dots,y_n$ az ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-ből képzett ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszere és a $c_i : I\to\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,n)$ függvények kielégítik a

$$(\mathsf{C})\quad \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i^{(j)}(x)=0\quad (j=0,\dots,n-2);\quad \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)=b(x)$$

egyenletrendszert $I$-n, akkor

$$(\mathsf{P})\qquad y_p : I\to\mathbb{R},\qquad y_p(x)\doteq\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i(x)$$

megoldása ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek.



**Bizonyítás.** (P)-ből (C) felhasználásával:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i'(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i'(x)\\
&\ \vdots\\
y_p^{(n-1)}(x) &= \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i^{(n-2)}(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i^{(n-1)}(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i^{(n-1)}(x)\\
y_p^{(n)}(x) &= \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)+\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i^{(n)}(x)=\\
&= \sum_{i=1}^{n}c_i(x)\left[-\sum_{j=1}^{n}a_j(x)y_i^{(n-j)}(x)\right]+b(x)=\\
&= -\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\left[\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i^{(n-j)}(x)\right]+b(x)=\\
&= -\sum_{j=1}^{n}a_j(x)y_p^{(n-j)}(x)+b(x)\ ,
\end{aligned}$$

azaz $y_p$ teljesíti ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-t, amit bizonyítani kellett.

**Megjegyzések.**

1) (C) $c_1',\dots,c_n'$-re egy inhomogén lineáris egyenletrendszer, melynek determinánsa a Wronszki-determináns, melyre $W(x)\neq 0$ ($I$-n). Így léteznek $\phi_i$ $(i=1,\dots,n)$ függvények, hogy

$$c_i'(x)=\phi_i(x)\qquad (x\in I,\ i=1,\dots,n),$$

amiből

$$c_i(x)=\int\phi_i(x)dx\qquad (i=1,\dots,n)$$

adja a $c_i$ függvényeket.

2) ($\mathsf{IH}_2\mathsf{D}$) esetén

$$(\mathsf{IH}_2\mathsf{D})\qquad y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=b(x),$$

és ha $y_1$, $y_2$ alaprendszer, akkor (C)

$$(\mathsf{C}')\qquad \begin{cases} c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0\\ c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=b(x)\end{cases}$$

alakú. Ebből pedig

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ b(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(y_1(x), y_2(x))} = -\frac{b(x)y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))};$$

$$c_2'(x) = \frac{b(x)y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))},$$

illetve

$$c_1(x) = \int -\frac{b(x)y_2(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}dx; \qquad c_2(x) = \int \frac{b(x)y_1(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}dx$$

következik. Továbbá ezen $c_1$ és $c_2$ függvényekkel a partikuláris megoldás

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \qquad (x \in I).$$

## 4. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

**1. definíció.** Legyenek $g_{ij}, \varphi_i : I \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ folytonos függvények. A

$$\text{(LIHDER)} \qquad y_i' + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)y_j = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

illetve az $(y_1, \dots, y_n)^\top \doteq \underline{y}$, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top \doteq \underline{\varphi}$, $(g_{ij})_{n\times n} \doteq \underline{\underline{g}}$ jelölésekkel a

$$\text{(LIHDER')} \qquad \underline{y}' + \underline{\underline{g}}(x)\underline{y} = \underline{\varphi}$$

egyenletrendszert lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszernek, míg az

$$\text{(LHDER)} \qquad \underline{y}' + \underline{\underline{g}}(x)\underline{y} = 0$$

egyenletrendszert lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük.



**Megjegyzések.**

1) (LIHDER), illetve (LHDER) megoldásainak meghatározása visszavezethető az $n$-edrendű lineáris differenciálegyenletek elméletére.
2) Ugyanakkor önálló elmélet is kidolgozható, mely szoros analógiát mutat az $n$-edrendű lineáris differenciálegyenletek elméletével. A következőkben kimondott tételek bizonyítása is hasonló, természetesen bizonyos módosításokkal (például más egzisztencia és unicitás tételt kell használni, módosul a Wronski-determináns fogalma is).

**1. tétel.** Ha $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_k$ megoldásai (LHDER)-nek, akkor

$$\underline{y} = c_1\underline{y}_1 + \dots + c_k\underline{y}_k \qquad (c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R})$$

is az.

**2. tétel.** Ha $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ lineárisan független megoldásai (LHDER)-nek, akkor bármely $\underline{y}$ megoldásra létezik $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, hogy

$$\underline{y} = c_1\underline{y}_1 + \dots + c_n\underline{y}_n.$$

**2. definíció.** Az (LHDER) $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ ($\underline{y}_1 = (y_{11}, \dots, y_{n1})^\top, \dots, \underline{y}_n = (y_{1n}, \dots, y_{nn})^\top$) lineárisan független megoldásaiból képzett

$$\psi = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrixot alap-, vagy megoldásmátrixnak, míg a

$$W \doteq \det \psi$$

determinánst az $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ függvények Wronski-determinánsának nevezzük.

**3. tétel.** Ha $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n : I \to \mathbb{R}^n$ megoldásai (LHDER)-nek és $x_0 \in I$ rögzített, akkor

$$W(x) = W(x_0) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} g_{ii}(t)dt\right] \qquad (x \in I)$$

teljesül. Így $W(x) \equiv 0$, vagy $W(x) \neq 0$ $(x \in I)$.

**4. tétel.** $\psi$ akkor, és csak akkor alapmátrixa (LHDER)-nek, ha $W(x) \neq 0$ $(x \in I)$.

**Megjegyzés.** Itt is a fő feladat az alaprendszer meghatározása, melyre általános módszer nincs, de itt is használható D'Alambert redukciós módszere, melynek lényege: ha ismert (LHDER) egy megoldása, akkor az egyenletrendszer eggyel kevesebb egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszerre vezethető vissza.

**5. tétel.** Ha $\underline{y}_p$ megoldása (LIHDER)-nek, úgy $\underline{y}$ akkor, és csak akkor megoldása, ha $\underline{y} - \underline{y}_p \doteq \underline{y}_H$ megoldása a (LIHDER)-ből képzett (LHDER)-nek. Azaz (LIHDER) általános megoldása $\underline{y} = \underline{y}_H + \underline{y}_p$ alakú.

**6. tétel (a konstansvariálás módszere).** Ha $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ (LHDER) alaprendszere és $c_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ olyan függvények, hogy teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' \underline{y}_i = \underline{\varphi} ,$$

azaz a

$$\left.\begin{cases} c_1'(x) y_{11}(x) + \dots + c_n'(x) y_{1n}(x) = \varphi_1(x) \\ \vdots \\ c_1'(x) y_{n1}(x) + \dots + c_n'(x) y_{nn}(x) = \varphi_n(x) \end{cases}\right\} \qquad (x \in [a, b])$$

egyenletrendszer, akkor

$$\underline{y}_p(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \underline{y}_i(x) \qquad (x \in [a, b])$$

megoldása (LIHDER)-nek.

**Megjegyzések.**

1) Ha (LHDER) konstansegyütthatós, azaz $\underline{\underline{g}} = A$ konstans mátrix, azaz $g_{ij}(x) = a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$, akkor az

(KLHDER) $$\underline{y}' + A\underline{y} = 0$$



megoldásait az

$$\underline{y}(x) = ce^{\lambda x} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda x} \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

alakban keressük, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$.
Ekkor (KLHDER)-ből kapjuk, hogy

$$\underline{y}' = \lambda c e^{\lambda x} = -Ace^{\lambda x},$$

azaz $Ac = -\lambda c$, illetve $(A + \lambda E)c = 0$ egyenletrendszer teljesül. Másképpen fogalmazva $y = ce^{\lambda x}$ akkor, és csak akkor megoldása (KLHDER)-nek, ha

(*) $$(A + \lambda E)c = 0 ,$$

ahol $E$ az egységmátrix. Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer $c$-re.
Lineáris algebrából ismert, hogy (*)-nak akkor, és csak akkor létezik nemtriviális megoldása, ha

$$\det(A + \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + \lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

azaz $\lambda$ megoldása a

$$P_n(\lambda) = \det(A + \lambda E) = 0$$

karakterisztikus egyenletnek, ami $n$-edfokú.
Ennek $n$ (valós vagy komplex) megoldása van, melyekhez meghatározhatók a $c \neq 0$ vektorok (ezek csak egy multiplikatív konstanstól eltekintve egyértelműek).
Ezután eljuthatunk (KLHDER) alaprendszeréhez is (ha $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mind valósak, akkor egyszerűbb az eset most is).

2) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:

(IH) $$\begin{cases} y_1' - y_1 - y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = x \end{cases} \qquad \left(n = 2,\ A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\ \varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right)$$

Tekintsük a homogén

$$\text{(H)} \qquad \begin{cases} y_1' - y_1 - y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszert. Ennek megoldásait az

$$(*) \qquad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda x} \\ c_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

alakban keresve kapjuk, hogy $(*)$ akkor, és csak akkor megoldása (H)-nak, ha

$$\begin{cases} (\lambda - 1)c_1 - c_2 = 0 \\ -c_1 + (\lambda - 1)c_2 = 0 \end{cases} .$$

Ez egy lineáris homogén egyenletrendszer $c_1, c_2$-re, melynek akkor, és csak akkor létezik triviálistól különböző megoldása, ha

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0 ,$$

azaz, ha $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad -c_1 - c_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = -c_1 \ (c_1 \text{ tetsz.}), \\ &\Rightarrow \quad \underline{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \\ \lambda_2 = 2 \quad &\Rightarrow \quad c_1 - c_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = c_1 , \\ &\Rightarrow \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_1 e^{2x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Az alapmátrix:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2x} \\ -1 & e^{2x} \end{pmatrix} .$$

A Wronski-determináns:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ -1 & e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{2x} \neq 0 .$$

Így

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$



alaprendszere a homogén differenciálegyenlet-rendszernek, ami adja, hogy

$$\underline{y}_H(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{1H}(x) = c_1 + c_2 e^{2x} \\ y_{2H}(x) = -c_1 + c_2 e^{2x} \end{cases}$$

a vizsgált (H) konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenlet általános megoldása.
Ekkor (a 6. tétel miatt)

$$\underline{y}_p(x) = c_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

megoldása (IH)-nak, ha

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot 1 + c_2'(x) \cdot e^{2x} = 0 \\ c_1'(x) \cdot (-1) + c_2'(x) \cdot e^{2x} = x \end{cases}$$

teljesül, melyből

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ x & e^{2x} \end{vmatrix}}{2e^{2x}} = -\frac{x}{2}; \qquad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2} e^{-2x} ,$$

illetve

$$\begin{cases} c_1(x) = -\dfrac{x^2}{4} , \\ c_2(x) = \displaystyle\int \frac{x}{2} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\frac{x}{2} e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}\frac{1}{2} e^{-2x} = \\ \qquad = -\dfrac{x}{4} e^{-2x} - \dfrac{1}{8} e^{-2x}. \end{cases}$$

következik. Így (az 5. tétel miatt) (IH) általános megoldását az

$$\begin{aligned} \underline{y}(x) &= \underline{y}_H(x) + \underline{y}_p(x) = \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} + c_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alakban kapjuk, amiből következik, hogy

$$y_1(x) = c_1 + c_2 e^{2x} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8}$$
$$y_2(x) = -c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8}.$$

3) Az előbbi példa differenciálegyenlet-rendszerének másik megoldása:
Az

(IH) $$\begin{cases} y_1' - y_1 - y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = x \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszer első egyeneltét differenciálva (az egyenletek adják, hogy $y_1$ és $y_2$ is kétszer, sőt akárhányszor differenciálható)

$$y_1'' - y_1' - y_2' = 0$$

következik, melyet összehasonlítva a differenciálegyenlet-rendszerrel eliminálható $y_2'$ és $y_2$, és az

$$y_1'' - 2y_1' = x$$

másodrendű konstansegyütthatós lineáris inhomogén differenciálegyenlet adódik $y_1$-re.
A homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, ami akkor, és csak akkor teljesül, ha $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, amiből kapjuk, hogy

$$y_{1H}(x) = c_1 + c_2 e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Keressük $y_{1_p}$-t

$$y_{1_p}(x) = c_1(x) + c_2(x) e^{2x}$$

alakban, ez megoldás, ha $c_1'(x)$ és $c_2'(x)$ teljesíti a

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)\cdot 1 + c_2'(x)\cdot e^{2x} &= 0 \\ c_1'(x)\cdot 0 + c_2'(x)\cdot 2e^{2x} &= x \end{aligned}\right\}$$



egyenletrendszert, amiből következik, hogy

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ x & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = -\frac{xe^{2x}}{2e^{2x}} = -\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = -\frac{x^2}{4};$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2} e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad c_2(x) = \frac{x}{4} e^{-2x} - \frac{1}{8} e^{-2x}.$$

Így

$$y_1(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8} + c_1 + c_2 e^{2x}$$

és

$$y_2(x) = y_1'(x) - y_1(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{8} - c_1 + c_2 e^{2x}.$$

## 5. Konstansegyütthatós lineáris differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

**Definíció.** Az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltján az

$$F(s) \doteq \mathcal{L}[f(t)] \doteq \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (s \in \mathbb{R}_+)$$

szerint definiált $F \doteq \mathcal{L}[f] : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvényt értjük, ha az improprius integrál konvergens. Inverzét (ha létezik) $\mathcal{L}^{-1}$-gyel jelöljük.

A Laplace-transzformált tulajdonságai:

1) Ha $\exists\, \mathcal{L}[f(t)]$ és $\mathcal{L}[g(t)]$, akkor $\exists\, \mathcal{L}[a f(t) + b g(t)] =$
$= a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$.

2) Ha $\exists\, \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, akkor $\exists\, \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$.

3) Ha $\exists\, \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, akkor $\exists\, \mathcal{L}[f(ct)] = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$.

4) Ha $f$ „elég jó", akkor

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - $$
$$- sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \,,$$

speciálisan: $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$.

5) $\mathcal{L}[c] = \frac{c}{s}$; $\quad \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right] = \frac{1}{s^n}$.

6) $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$, $\quad \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}\right] = \frac{1}{(s-a)^n} \quad (a \in \mathbb{R})$.

7) $\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ; $\quad \mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad (\omega \in \mathbb{R})$.

8) Egy folytonos függvény egyértelműen meghatározott Laplace-transz-formáltja által.

Alkalmazás ($\mathrm{KIH}_n\mathrm{D}$) megoldására:
Képezzük

$$(\mathrm{KIH}_n\mathrm{D}) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)} = b(t)$$

mindkét oldalának Laplace-transzformáltját, akkor $\mathcal{L}$ 1. tulajdonsága miatt

$$\mathcal{L}\left[y^{(n)}\right] + \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{L}\left[y^{(n-i)}\right] = \mathcal{L}[b(t)]$$

illetve 4. tulajdonsága miatt

$$\left(s^n + \sum_{i=1}^{n} a_i s^{n-i}\right)\mathcal{L}[y(t)] = y(0)\left[s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i s^{n-i-1}\right] +$$
$$+ y'(0)\left[s^{n-2} + \sum_{i=1}^{n-2} a_i s^{n-i-2}\right] + \cdots + y^{(n-1)}(0) + \mathcal{L}[b(t)]$$

adódik, melyből $\mathcal{L}[y(t)]$ meghatározható. Ennek ismeretében pedig a 8. tulajdonság miatt – valamint az 5-7. tulajdonságok felhasználásával meghatározható $y(t)$ is.



**Példa.**
Oldjuk meg a következő ($\mathrm{KIH}_3\mathrm{D}$)-re vonatkozó Cauchy-feladatot:

$$(*) \qquad y''' - 3y' + 2y = 3e^t \,; \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2 \,.$$

Képezve a Laplace-transzformáltat

$$\mathcal{L}[y'''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^t]$$

adódik, illetve ebből (4. miatt)

$$s^3\mathcal{L}[y] - s - 2 - 3s\mathcal{L}[y] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{3}{s-1}$$

következik, melyből egyszerű számolással (parciális törtekre bontással)

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s+2+\frac{3}{s-1}}{(s-1)^2(s+2)} = -\frac{1}{9(s+2)} + \frac{1}{9(s-1)} + \frac{2}{3(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3}$$

adódik. Végül

$$y(t) = -\frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{1}{9}e^t + \frac{2}{3}te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$$

adja $(*)$ megoldását (8-at is felhasználva).

# V. PEREMFELADATOK, STABILITÁS

## 1. A peremfeladat fogalma

Általában, ha egy

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

alakú differenciálegyenletnél azon feltételek, melyek esetén a megoldás egyértelműen jellemezhető, nem egy helyre vonatkoznak (mint a kezdetiérték-feladatnál), hanem azon $[a, b]$ intervallum két végpontjára, amelyen a megoldást keressük, akkor peremfeladatról beszélünk.
Az alkalmazások miatt különösen fontos a másodrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó peremfeladat definiálása.
Tekintsük az

$$(1) \qquad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \qquad (x \in [a, b])$$

differenciálegyenletet a következő peremfeltételek valamelyikével:

| | |
|---|---|
| elsőrendű peremfeltétel: | $y(a) = \eta_1, y(b) = \eta_2,$ |
| másodrendű peremfeltétel: | $y'(a) = \eta_1, y'(b) = \eta_2,$ |
| harmadrendű peremfeltétel: | $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \eta_1,$<br>$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \eta_2.$ |

Nyilván az első-, és másodrendű peremfeltétel speciális esete a harmadrendű peremfeltételnek, melyet Sturm-féle peremfeltételnek nevezünk.
Szokás még $y(a) - y(b) = \eta_1$, $y'(a) - y'(b) = \eta_2$ alakú peremfeltételt is tekinteni, melyet $\eta_1 = \eta_2 = 0$ esetén periódikus peremfeltételnek is neveznek.

Sturmtól származik a következő alakú peremfeladat:

$$(\mathrm{S}) \qquad \left(p(x)y'\right)' + q(x)y = b(x) \qquad (x \in [a, b]),$$

$$(\mathrm{SPF}) \qquad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a) y'(a) = \eta_1 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b) y'(b) = \eta_2 \end{cases},$$



ahol $p$ folytonosan differenciálható, $q, b$ folytonos függvények $[a, b]$-n, továbbá $p > 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$.
Megjegyezzük, hogy (1) a $p(x) = e^{\int a_1(x)dx}$ szorzással adja (S)-t. A $p(a), p(b)$ szorzók bevezetésének a peremfeltételekben praktikus okai vannak.
Ha $b(x) \equiv 0$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$, akkor a fenti (S)+(SPF)-hez tartozó homogén peremfeladatot kapjuk.

**Megjegyzés.** A peremfeladat megoldásában alapvető feladat a homogén egyenlet alaprendszerének meghatárczása. Megmutatható, hogy ha $y_1$ és $y_2$ a homogén differenciálegyenlet alaprendszere, akkor az inhomogén peremfeladatnak akkor, és csak akkor létezik egyértelmű megoldása, ha

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 p(a) y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 p(a) y_2'(a) \\ \beta_1 y_1(b) + \beta_2 p(b) y_1'(b) & \beta_1 y_2(b) + \beta_2 p(b) y_2'(b) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Ekkor a homogén peremfeladatnak csak triviális megoldása van.
Az általános elméletet nem vizsgáljuk.

## 2. Sturm-Liouville rendszerek

A következőkben egy szabad paramétert is tartalmazó peremfeladatot tekintünk.
Az

$$y'' + a_1(x)y' + [a_2(x) + \lambda] y = 0 , \qquad x \in [a, b]$$

másodrendű differenciálegyenlet, melyben egy $\lambda$ paraméter is van, a

$$p(x) \doteq \exp\left[\int a_1(t)dt\right], \qquad q(x) \doteq a_2(x)p(x), \qquad s(x) = p(x)$$

($x \in [a, b]$) jelölésekkel a vele ekvivalens

$$(\mathrm{S\text{-}L}) \qquad \left(p(x)y'\right)' + [q(x) + \lambda s(x)]\, y = 0 , \qquad x \in [a, b]$$

alakba írható, melyet Sturm-Liouville egyenletnek is neveznek.
Feltesszük, hogy $\lambda \in \mathbb{R}$, $q$ és $s$ folytonos, $p$ folytonosan differenciálható

függvények az $I = [a, b]$ intervallumon.
(S-L) reguláris, ha $p$ és $s$ pozitívak, míg ha a jobboldalon 0-tól különböző függvény van, úgy inhomogén (S-L) egyenletről beszélünk.
(S-L)-t az

$$\text{(PF)} \qquad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 p(a) y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 p(b) y'(b) = 0 \end{cases}$$

peremfeltételek mellett vizsgáljuk, ahol $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ nem mind zérus valós konstansok.
(S-L)-t és (PF)-et együtt Sturm-Liouville rendszernek nevezzük, jelölése: (S-L-R).
Azon $\lambda$-kat, melyekre (S-L-R)-nek létezik 0-tól különböző megoldása saját-értékeknek, a hozzájuk tartozó megoldásokat pedig sajátfüggvényeknek nevezzük.

**Példa.** Tekintsük az

$$\text{(S-L-R)} \qquad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (0 \le x \le \pi)$$

speciális Sturm-Liouville rendszert.

a) Ha $\lambda \le 0$, úgy az alaprendszer $e^{\sqrt{|\lambda|}x}$, $e^{-\sqrt{|\lambda|}x}$, és így az általános megoldás:

$$y = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\, x},$$

de a peremfeltételek miatt $c_1 = c_2 = 0$, ezért $y \equiv 0$.

b) Ha $\lambda > 0$, akkor az alaprendszer $\cos\sqrt{\lambda}x$, $\sin\sqrt{\lambda}x$, és így az általános megoldás:

$$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

A peremfeltételek miatt:

$$\begin{aligned} y(0) &= A\cos 0 + B\sin 0 = 0 && \Rightarrow \quad A = 0\,, \\ y'(\pi) &= -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0 && \Rightarrow \quad B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0\,. \end{aligned}$$

Ha $B = 0$ lenne, úgy $y = 0$ adódna, ha $B \ne 0$, akkor $\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0$ miatt

$$\sqrt{\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{2n+1}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad (n = 0, 1, 2 \dots),$$



azaz az (S-L-R) sajátértékei a

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

valós számok, míg a hozzájuk tartozó sajátfüggvények

$$y_n(x) = \sin\frac{2n+1}{2}x \qquad (n = 0, 1, \dots).$$

**Megjegyzések.**

1) Ha (S-L)-ben $p(a) = p(b)$ és (PF) az $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ alakot ölti, akkor periódikus Sturm-Liouville rendszerről beszélünk.

2) Adott sajátértékhez több (lineárisan független) sajátfüggvény is tartozhat.

3) Vizsgálható a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények ortogonalitása a $p$ súlyfüggvényre, ami azt jelenti, hogy ha például $\varphi_j$ és $\varphi_k$ különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények, akkor

$$\int_a^b \varphi_j(x)\varphi_k(x)p(x)dx = 0 \qquad (j \ne k).$$

A példában $p = 1$, $[a, b] = [0, \pi]$, így azt kell megmutatni, hogy

$$\int_0^\pi \sin\frac{2i+1}{2}x \sin\frac{2j+1}{2}x = 0 \qquad (i, j = 0, 1, \dots;\ i \ne j).$$

4) Vizsgálható a sajátértékek elhelyezkedése is (pl. egy reguláris (S-L-R) sajátértékei $s(x) > 0$ esetén valósak).

5) Egy reguláris (S-L-R) sajátfüggvényei egy konstans szorzóig egyértelműen meghatározottak.

6) Egy reguláris (S-L-R) általános megoldása a sajátfüggvények segítségével az

$$y = \sum_i c_i y_i$$

függvénysorral állítható elő (lásd Fourier-sorok).

# 3. Parciális differenciálegyenletek peremfeltételekkel

Legyen adott az $(0,0)$ és $(l,0)$ pontban rögzített húr, melynek $x$ pontja a $t$ időpillanatban az $u(x,t)$ magasságban van. A rezgést az

$$\text{(RHD)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

parciális differenciálegyenlet írja le, ahol $a = \sqrt{F/\mu}$ ($F$ a feszítőerő, $\mu$ az egységnyi hosszra eső tömeg.) A rögzítettséget a

$$\text{(P)} \qquad u(0,t) = 0 \qquad u(l,t) = 0$$

peremfeltételek fejezik ki.
A $t = 0$-ban a húr alakját egy $f$, sebességét egy $\varphi$ függvény írja le, azaz teljesülnek a

$$\text{(K)} \qquad u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = \varphi(x) \qquad (x \in [a,b])$$

kezdeti feltételek is.
Megoldandó tehát (RHD) a (P) perem-, illetve a (K) kezdeti feltételek mellett (ez egy hiperbólikus parciális differenciálegyenletre vonatkozó vegyes feladat).
Keressük (RHD) megoldását az

$$\text{(SZ)} \qquad u(x,t) = X(x)T(t) \qquad (x \in [0,l], t \in \mathbb{R}_+)$$

alakban. Ezt (RHD)-be helyettesítve

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

adódik, melyből következnek a

$$\text{(H}_2\text{D}_1) \qquad X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (x \in [0,l]),$$
$$\text{(H}_2\text{D}_2) \qquad T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}_+)$$

másodrendű homogén differenciálegyenletek.
(P) most az $X(0)T(t) = 0$, $X(l)T(t) = 0$ alakot ölti, amiből $u(x,t) \not\equiv 0$ miatt kapjuk ($\text{H}_2\text{D}_1$)-re a

$$\text{(P}_1) \qquad X(0) = 0, \qquad X(l) = 0$$



peremfeltételt.
Az előbb már láttuk, hogy ($\text{H}_2\text{D}_1$) megoldása

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \qquad (x \in [0,l]),$$

amiből ($\text{P}_1$) miatt jön, hogy csak

$$\lambda_k = \frac{k^2 \cdot \pi^2}{l^2}$$

mellett van megoldás és ez $A = 0$ miatt

$$X_k(x) = B_k \sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

($\text{H}_2\text{D}_2$)-re pedig, adott $\lambda_k = (k^2\pi^2)/(l^2)$ esetén (azaz adott $X_k$-hoz) a

$$T_k(t) = C_k \cos a\frac{k\pi}{l}t + D_k \sin a\frac{k\pi}{l}t$$

megoldás következik. Így u-ra:

$$u_k(x,t) = \left[E_k \cos a\frac{k\pi}{l}t + F_k \sin a\frac{k\pi}{l}t\right] \sin\frac{k\pi}{l}x$$

adódik, mely teljesíti (RHD)-t és a (P) peremfeltételeket.
Megmutatható, hogy

$$E_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx\,,$$

$$F_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

mellett az

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[E_k \cos a\frac{k\pi}{l}t + F_k \sin a\frac{k\pi}{l}t\right]\sin\frac{k\pi}{l}x$$

függvény megoldása (RHD)-nek és teljesíti a (P) perem- és (K) kezdeti feltételeket is.
Ez a megoldási módszer a Fourier-módszer (ami felhasználja a Fourier-sorok elméletét is).

# 4. Stabilitás

Legyen adott az $y' = y$ differenciálegyenlet és $y(t)$ az egyenlet $y(0) = \eta$, míg $z(t)$ a $z(0) = \eta + \varepsilon$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása. Ekkor

$$\int_{\eta}^{y} \frac{1}{y}\, dy = \int_{0}^{t} 1\, dt \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \eta e^{t} \qquad (t \geq 0),$$

$$\int_{\eta+\varepsilon}^{z} \frac{1}{y}\, dy = \int_{0}^{t} 1\, dt \qquad \Rightarrow \qquad z(t) = (\eta + \varepsilon) e^{t} \qquad (t \geq 0)$$

adja, hogy

$$z(t) - y(t) = \varepsilon e^{t} \qquad (t \geq 0).$$

Az adott differenciálegyenletnél a változó kezdeti feltételekhez tartozó megoldások különbsége $\lim\limits_{t\to\infty} e^{t} = +\infty$ miatt $+\infty$-hez tart.
Ha most az $y' = -y$ differenciálegyenletet tekintjük, úgy az $y(0) = \eta$, illetve $z(0) = \eta + \varepsilon$ kezdeti feltételeket teljesítő $y(t)$, illetve $z(t)$ megoldások különbségére (az előbbivel azonos módon) kapjuk, hogy

$$z(t) - y(t) = \varepsilon e^{-t} \qquad (t \geq 0),$$

ami adja, hogy $\lim\limits_{t\to\infty} (z(t) - y(t)) = 0$, hiszen $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t} = 0$.

**Cél:** Megadni annak kritériumát, hogy egy adott differenciálegyenlet megoldása folytonosan függ a kezdeti feltételektől abban az értelemben, hogy $z(0)$ és $y(0)$ kis eltérése esetén az $|z(t) - y(t)|$ eltérés is kicsi a $t \geq 0$ intervallumon.
Az ilyen típusú problémák a differenciálegyenletek stabilitáselméletéhez tartoznak.

**1. definíció (stabilitás, aszimptotikus stabilitás).** Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ adott függvény, mely legalább az

$$S_\alpha = \{(t, \underline{y}) \mid t \geq 0,\ \|\underline{y} - \underline{x}(t)\| < \alpha\}$$

halmazon értelmezett és folytonos, ahol $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ az

$$\underline{y}' = f(t, \underline{y})$$



differenciálegyenlet megoldása a $0 \leq t < \infty$ intervallumon.
Az $\underline{x}(t)$ megoldást stabilnak nevezzük, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta$, melyre $\|\underline{y}_0 - \underline{x}(0)\| < \delta$ esetén az $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$ kezdeti feltételt teljesítő $\underline{y}$ megoldás minden $t \geq 0$-ra értelmezett és

$$\|\underline{y}(t) - x(t)\| < \varepsilon \qquad \forall\, t \in [0, \infty)$$

teljesül. Az $\underline{x}(t)$ megoldást aszimptotikusan stabilnak nevezzük, ha stabil és $\lim\limits_{t\to\infty} \|y(t) - \underline{x}(t)\| = 0$.
Egy $\underline{x}(t)$ megoldást instabilnak nevezünk, ha nem stabil.

**2. definíció (mátrix polinomja).** Legyen

$$P_n(x) \doteq a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egy valós polinom, $B = (B_{ij})$ egy $n \times n$-es mátrix, akkor $P_n(B)$ alatt a

$$P_n(B) \doteq a_0 E + a_1 B + \cdots + a_n B^n$$

mátrixot értjük és a $B$ mátrix polinomjának nevezzük.
Ha $B = At$ (ahol $A = (a_{ij})$ $n \times n$-es mátrix), akkor

$$P_n(At) \doteq a_0 E + a_1 At + \cdots + a_n A^n t^n$$

egy $t$-től függő mátrix.

**Megjegyzés.** $\dfrac{d}{dt} P_n(At) = A P_n'(At)$, ahol $P_n'(x)$ a $P_n(x)$ deriváltja.

**3. definíció (mátrix hatványsora).** Legyen

$$f(x) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (|x| < r)$$

adott hatványsor az $r$ konvergenciasugárral, akkor rendeljük hozzá a $B = (B_{ij})$ mátrixhoz az $f(B)$ mátrixot, hogy

$$\text{(MH)} \qquad f(B) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k \qquad \left( \|B\|_e \doteq \sqrt{\sum_{i,j} |B_{ij}|^2} < r \right).$$

Tekintsük a $C_k$ $n \times n$-es mátrixok $C = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$ végtelen sorát. Ha $C_k = (c_{ij}^k)$ és $C = (c_{ij})$, úgy ez az egyenlőség a következő $n^2$ „darab" $c_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k$ végtelen számsor rövidítése.

Azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ mátrix sor konvergens, illetve abszolút konvergens, ha az $n^2$ „darab" $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k$ számsor is ilyen tulajdonságú.

**Megjegyzések.**

1) $\|B\|_e$-t a $B$ mátrix euklideszi normájának nevezzük, melyre a norma szokásos tulajdonságain túl – $\|AB\|_e \le \|A\|_e \|B\|_e$, $\|Ax\|_e \le \|A\|_e \|x\|_e$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ is teljesül.

2) Az (MH) hatványsor abszolút konvergens, ha $s = \|B\|_e < r$, mert akkor $\|B^2\|_e \le \|B\|_e^2 = s^2, \dots, \|B^k\|_e \le s^k, \dots$, ami adja az abszolút konvergenciát a majoráns kritérium miatt.

3) Az

$$f(At) \doteq a_0 E + a_1 At + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k t^k$$

$t$-től függő sor abszolút konvergens, ha $|t| < r/(\|A\|_e) = t_0$ és egyenletesen konvergens a $(-t_0, t_0)$ bármely zárt intervallumán, azaz az $n^2$ számú számsor mindegyike egyenletesen konvergens, továbbá $f(At)$ tagonként differenciálható és

$$\frac{d}{dt} f(At) = A f'(At) .$$

**Következmény.**

$$e^B = E + B + \frac{B^2}{2!} + \dots ;$$

továbbá $(e^{At})' = Ae^{At}$; $e^{B+C} = e^B e^C$ (ha $BC = CB$) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Ezek segítségével egy másik (a korábbitól eltérő) utat találhatunk a konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszerek alaprendszerének és a konstansegyütthatós lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszerek általános megoldásának meghatározására.



**1. tétel.** legyen $(A)_{n \times n}$ konstans mátrix, akkor a

(KLHDER) $$\underline{y}' = A\underline{y}$$

megoldása $[0, \infty)$-en $\underline{y}(0) = E$ mellett

(KLHDER-Mo) $$\underline{y}(x) = e^{Ax}.$$

Továbbá a

(KLIHDER-KÉP) $$\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{\varphi} , \qquad (\underline{y}(0) = \underline{y}_0)$$

megoldása:

(KLIHDER-KÉP-Mo) $$\underline{y}(x) = e^{Ax}\underline{y}_0 + \int_0^x e^{A(x-t)} \underline{\varphi}(t)\, dt .$$

**Bizonyítás.**

a) $(e^{Ax})' = Ae^{Ax}$ adja az állítás első felét, és nyilván $\underline{y}(0) = E$ is igaz.

b) Ismeretes, hogy (lásd konstansvariálás módszere (LIHDER)-re) ha $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ (LHDER) alaprendszere, úgy (LIHDER) általános megoldása

(*) $$\underline{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{y}_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \underline{y}_i(x) ,$$

ahol $c_i'(x)$ teljesíti a

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij}(x) c_i'(x) = \varphi_j(x) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

egyenletrendszert, mely az

$$y_H = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & & \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} (c_1'(x) \dots c_n'(x))^\top = \underline{c}'(x) \\ (\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x))^\top = \underline{\varphi}(x) \end{array} \right.$$

jelölések mellett az

$$y_H(x)\, \underline{c}'(x) = \underline{\varphi}(x)$$

alakba írható, ahol $\det y_H \neq 0$ (mert $y_H$ alaprendszer), így $\exists\, y_H^{-1}$ és

$$\underline{c}'(x) = y_H^{-1}(x)\underline{\varphi}(x) .$$

Ebből

$$\underline{c}(x) = \underline{c}(0) + \int_0^x y_H^{-1}(t)\underline{\varphi}(t)\, dt .$$

Így $(*)$ a $\underline{c} = (c_1 \dots c_n)^\top$ jelölés mellett az

$$\underline{y}(x) = y_H(x)(\underline{c} + \underline{c}(0)) + \int_0^x y_H(x) y_H^{-1}(t)\underline{\varphi}(t)\, dt$$

alakot ölti, amiből $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$ miatt $\underline{y}_0 = y_H(0)(\underline{c} + \underline{c}(0))$, illetve

$$\underline{c} + \underline{c}(0) = y_H^{-1}(0)\underline{y}_0$$

következik. Így

$$\underline{y}(x) = y_H(x) y_H^{-1}(0)\underline{y}_0 + \int_0^x y_H(x) y_H^{-1}(t)\underline{\varphi}(t)\, dt$$

teljesül. Ebből pedig

$$y_H(x) = e^{Ax}, \qquad y_H^{-1}(x) = e^{-Ax}$$

felhasználásával jön az állítás.

**2. tétel.** Ha az $A$ mátrix $\lambda_i$ sajátértékei teljesítik a $\operatorname{Re} \lambda_i < \alpha$ egyenlőtlenségeket, akkor

$$\|e^{At}\| \leq c e^{\alpha t} \qquad (t \geq 0),$$

ahol $c > 0$ alkalmas konstans.

**3. tétel.** A

$$\text{(KLHDER)} \qquad \underline{y}' = A\underline{y}$$

minden megoldása akkor, és csak akkor tart $\underline{0}$-hoz $t \to \infty$ esetén, ha $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ az $A$ bármely $\lambda_i$ sajátértékére.



**4. tétel (stabilitási tétel (KLHDER)-re).** Legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ $(p \leq n)$ az $A$ mátrix sajátértékei és $\gamma = \max\{\operatorname{Re} \lambda_i\}$. Akkor az $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$ triviális megoldása (KLHDER)-nek

- $\gamma < 0$-ra aszimptótikusan stabil,
- $\gamma > 0$-ra instabil,

$\gamma = 0$ esetén nem aszimptótikusan stabil (de lehet stabil vagy instabil is).

**Gronwall-lemma.** A $\phi : [0, a] \to \mathbb{R}$ függvény legyen folytonos és teljesüljön, hogy

$$\phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \phi(\tau)\, d\tau \qquad \forall\, t \in [0, a], \beta > 0 .$$

Akkor

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\beta t} \qquad (t \in [0, a]) .$$

**Bizonyítás.** Nem kell.

**5. tétel (általános stabilitási tétel).** A $g(t, \underline{x})$ függvény legyen értelmezett $t \geq 0$, $\|\underline{x}\| \leq a$ $(a > 0)$ esetén, folytonos és

$$(*) \qquad \lim_{\|\underline{x}\| \to 0} \frac{\|g(t, \underline{x})\|}{\|\underline{x}\|} = 0$$

egyenletesen $t \geq 0$-ra és $g(t, \underline{0}) = \underline{0}$. Az $A$ mátrix legyen konstans és olyan, hogy $A$ $\forall\, \lambda_i$ sajátértékére $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Akkor a

$$(**) \qquad \underline{y}' = A\underline{y} + g(t, \underline{y})$$

differenciálegyenlet $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$ megoldása aszimptótikusan stabil.

**Bizonyítás.** A feltételek és a 2. tétel miatt léteznek $c > 1$ és $\beta > 0$ konstansok, hogy $\operatorname{Re} \lambda_i < -\beta$ és

$$\left\|e^{At}\right\| \leq c e^{-\beta t} \qquad (t \geq 0).$$

Másrészt $(*)$ miatt $\exists\ \delta,\ 0 < \delta < \alpha$, hogy

$$(***) \qquad \|g(t,\underline{x})\| \le \frac{\beta}{2c}\|\underline{x}\| \qquad (\|\underline{x}\| \le \delta, t \ge 0).$$

Megmutatjuk, hogy

$$(\Rightarrow) \qquad \|\underline{y}(0)\| \le \varepsilon < \frac{\delta}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \|\underline{y}(t)\| \le c\varepsilon e^{-\frac{\beta t}{2}}.$$

Az 1. tétel szerint $(**)$ megoldása (mivel $\varphi(s) = g(s,\underline{y}(s))$) teljesíti az

$$\underline{y}(t) = e^{At}\underline{y}(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(s,\underline{y}(s))\,ds$$

integrálegyenletet, így $(***)$ miatt a

$$(****) \qquad \|\underline{y}(t)\| \le \|\underline{y}(0)\|ce^{-\beta t} + \int_0^t ce^{-\beta(t-s)}\frac{\beta}{2c}\|\underline{y}(s)\|\,ds$$

egyenlőtlenség teljesül, ha $\|y\| \le \delta$.
Legyen $\underline{y}(t)$ olyan megoldása $(**)$-nak, hogy $\|\underline{y}_0\| < \varepsilon$ és legyen $\phi(t) = \|\underline{y}(t)\|e^{\beta t}$. Ekkor a $(****)$ egyenlőtlenség adja, hogy

$$\phi(t) \le c\varepsilon + \frac{\beta}{2}\int_0^t \phi(s)\,ds \qquad (\text{ha } \|y\| \le \delta),$$

ami a Gronwall-lemma miatt adja, hogy

$$\phi(t) \le c\varepsilon e^{\frac{\beta t}{2}},$$

vagyis

$$(\circ) \qquad \|\underline{y}(t)\| \le c\varepsilon e^{-\frac{\beta t}{2}} < \delta\,.$$

Ebből látható, hogy $\|\underline{y}(t)\|$ $\delta$-t pozitív $t$-re nem veszi fel és így $(\circ)$ teljesül, ami adja $(\Rightarrow)$ fennállását is.
$y(t)$ a $g$ függvény értelmezési tartományának határáig, így $(\circ)$ miatt az egész $0 \le t < \infty$ intervallumra folytatható.
Így

$$0 \le \lim_{t\to\infty} \|\underline{y}(t) - \underline{x}(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|\underline{y}(t)\| \le c\varepsilon \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{\beta t}{2}} = 0$$

adja, hogy $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$ aszimptotikusan stabil.