Lajkó Károly

Differenciálegyenletek

harmadik kiadás

Debreceni Egyetem
Matematikai Intézet
2003

lajko@math.klte.hu

Amennyiben hibát talál a jegyzetben, kérjük jelezze a szerzőnek!

A jegyzet dvi, pdf és ps formátumban letölthető a következő címről:
http://riesz.math.klte.hu/~lajko/jegyzet.html

Ez a jegyzet $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX-ben készült

Szedés és tördelés: Kovács László

Tartalomjegyzék

I. Differenciálegyenlet, Cauchy-feladat fogalma

1. Bevezető feladatok

a) Legyen adott az egyenesen mozgó pont v sebességfüggvénye, mely folytonos. A t_0 időpillanatban tartózkodjon a pont az S_0 helyen. Határozzuk meg a pont S útfüggvényét!

Megoldás: A sebesség definíciójából következik az

$$S'(t) = v(t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

egyenlet, ahol S az ismeretlen, v az ismert függvény.
Az egyenletben S' szerepel (ez nehézséget jelent), de (1.1) azt mutatja, hogy S primitív függvénye v-nek (ez viszont jó), így

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + C \tag{$*$}$$

teljesül. Ugyanakkor a feladat szerint $S(t_0) = S_0$ is teljesül, így a probléma az

$$S'(t) = v(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad S(t_0) = S_0 \tag{1.2}$$

alakban fogalmazható meg, azaz (1.1)-et az $S(t_0) = S_0$ feltétel mellett kell megoldani, ami ($*$) miatt adja, hogy $C = S_0$, így az

$$S(t) = S_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau \qquad (t \in \mathbb{R})$$

szerint adott a feladat megoldása.

b) Mennyi ideig emelkedik egy $v_0 = 100\ {}^{m}/_{sec}$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé lőtt rakéta?

Megoldás: Fizikából ismeretes, hogy a rakéta v sebességfüggvénye és deriváltja kielégíti a

$$v'(t) = -g - k\,v^2(t) \tag{1.3}$$

egyenletet. Ennek a megoldását kell keresni a $v(0) = 100$ feltétel mellett és meg kell határozni azt a T időpillanatot, amikor $v(T) = 0$. A feladat tehát

$$v'(t) = -g - k\,v^2(t), \qquad v(0) = 100, \quad v(T) = 0 \tag{1.4}$$

megoldása. Látható, hogy most a keresett v függvény és a v' deriváltfüggvénye is szerepel. A megoldás most nem nagyon „látszik".

Az (1.1) és (1.3), illetve (1.2) és (1.4) általánosítása elvezet a differenciálegyenlet, illetve Cauchy-feladat fogalmához.

2. Differenciálegyenlet fogalma

Jelöljön y a továbbiakban egy keresett függvényt, $y(x)$ ennek a helyettesítési értékét x-ben. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adott, ekkor a

$$y' = f(x, y) \qquad \big(\text{illetve } y'(x) = f(x, y(x))\big) \tag{2.1}$$

egyenlet az (1.1) és (1.3) egyenletek általánosításának tekinthető. (2.1)-et elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek is szokás nevezni.

Általánosabban:

1. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (ahol D egy tartomány). Az

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) \tag{2.2}$$

egyenletet n-edrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek nevezzük, ennek speciális esete $n = 1$-re a (2.1) elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet.

Az $y : I \to \mathbb{R}$ (ahol $I \subset \mathbb{R}$ intervallum) függvény megoldása (2.2)-nek I-n, ha

1) y n-szer differenciálható,
2) $(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in D, \quad \forall x \in I,$
3) $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad \forall x \in I$

teljesül.

További általánosítás:

2. definíció. Legyen $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény. A

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.3}$$

egyenletet közönséges n-edrendű differenciálegyenletnek nevezzük.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldása a (2.3) differenciálegyenletnek az I intervallumon, ha

1) y n-szer differenciálható,
2) $(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in D, \quad \forall x \in I,$
3) $F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I$

teljesül.

Megjegyzés. Ha (2.2), illetve (2.3)-ban f, illetve F az $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, illetve $y, y', \dots, y^{(n)}$ változóinak lineáris függvénye, akkor a (2.2), illetve (2.3) differenciálegyenlet lineáris, egyébként nemlineáris.

3. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. A

$$y' = (y_1', \dots, y_n') = f(x, y) = f(x, y_1, \dots, y_n) \tag{2.4}$$

egyenletrendszert, amely az

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{2.4'}$$

alakba is írható, elsőrendű közönséges (n ismeretlen függvényt tartalmazó) explicit differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük.

Az $y = (y_1, \dots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ függvény (függvényrendszer) a (2.4) (illetve (2.4')) differenciálegyenlet-rendszer megoldása I-n, ha

1) y (illetve az y_i-k) differenciálható(k),
2) $(x, y(x)) = (x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \in D \quad \forall x \in I,$
3) $y'(x) = f(x, y(x))$ (illetve $y_i'(x) = f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$ $i = 1, \dots, n$) $\forall x \in I$

teljesül.

3. Kezdeti érték probléma vagy Cauchy-feladat

1. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in D$ rögzített. A

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1) \tag{3.1}$$

problémát egy n-edrendű explicit közönséges differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték problémának vagy Cauchy-feladatnak nevezzük (ez $n = 1$-re $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ alakú).
Az $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$ $(i = 0, \dots, n-1)$ kikötéseket kezdeti feltételeknek nevezzük.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldása (3.1) (n-KÉP)-nek, ha

1) y n-szer differenciálható,
2) $(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in D \quad \forall x \in I,$
3) $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in I,$
4) $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1)$

teljesül.

Megjegyzés. Hasonló a helyzet a nem explicit esetben is, $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ függvénnyel.

2. definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(x_0, y_0) = (x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in D$ adott pont. A

$$(3.2) \qquad y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (y = (y_1, \dots, y_n))$$

problémát egy differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdeti érték problémának vagy Cauchy-feladatnak nevezzük.
Az $y = (y_1, \dots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ függvény megoldása a (3.2) (DER-KÉP)-nek, ha

1) y differenciálható,
2) $(x, y(x)) = (x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \in D \quad \forall\, x \in I$,
3) $y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall\, x \in I$,
4) $y(x_0) = y_0$

teljesül.

Tétel (átviteli elv). Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $(x_0; y_{01} \dots, y_{0n}) = (x_0, y_0) \in D$ rögzített.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása a (3.1) (n-KÉP)-nek I-n, ha az $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ vektorfüggvény (függvény n-es) megoldása a

$$(*) \begin{cases} y_1' &= y_2 \\ & \vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \qquad y_i(x_0) = y_{0i} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

(DER-KÉP)-nek I-n.

Bizonyítás.

a) Ha $y : I \to \mathbb{R}$ megoldása (3.1)-nek I-n, akkor az

$$y_1(x) \doteq y(x), \qquad y_2(x) \doteq y'(x), \qquad \dots \qquad y_n(x) \doteq y^{(n-1)}(x)$$

$(x \in I)$ szerint definiált $(y_1, \dots, y_n)$ vektorfüggvény megoldása $(*)$-nak, mert

$$y_1'(x) = y'(x) = y_2(x), \qquad y_2'(x) = y''(x) = y_3(x), \qquad \dots$$
$$y_{n-1}'(x) = y^{(n-1)}(x) = y_n(x),$$
$$y_n'(x) = y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) =$$
$$= f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)),$$

$(x \in I)$, illetve $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$ $(i = 0, \dots, n-1)$-ből

$$y_1(x_0) = y_{01}, \qquad \dots, \qquad y_n(x_0) = y_{0n};$$

azaz

$$y_i(x_0) = y_{0i} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

adódik.

b) Ha $(y_1, \dots, y_n)$ megoldása $(*)$-nak I-n, akkor $y_i'(x) = y_{i+1}(x)$ $(i = 1, \dots, n-1,\ x \in I)$, így

$$y_n(x) = y_{n-1}'(x) = y_{n-2}''(x) = \dots = y_1^{(n-1)}(x), \quad x \in I,$$

azaz

$$y_1^{(n)}(x) = y_n'(x) = f(x, y_1(x), \dots, y_1^{(n-1)}(x)), \quad x \in I$$

és

$$y_1^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \qquad (i = 0, \dots, n-1),$$

tehát $y_1 \doteq y : I \to \mathbb{R}$ megoldása (3.1)-nek I-n.

Megjegyzés. Az átviteli elv lehetővé teszi, hogy (n-KÉP) feladatok megoldhatóságát (DER-KÉP) megoldhatóságára vezessük vissza.

II. Elemi úton megoldható differenciálegyenlet-típusok

1. Szeparábilis differenciálegyenletek

Definíció. Legyenek $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ $(g \neq 0)$ adott folytonos függvények. Az

$$\text{(SZ)} \qquad y' = f(x)g(y)$$

differenciálegyenletet szeparábilis (szétválasztható változójú) differenciálegyenletnek nevezzük.

Tétel. Az $y : [a, b] \to [c, d]$ differenciálható függvény akkor és csak akkor megoldása (SZ)-nek, ha

$$\text{(SZMo)} \qquad \left(\left(\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)} dt \right) \circ y \right)(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

$\big(x, x_0 \in [a, b];\ y, y_0 \in [c, d]\big)$ teljesül.

Bizonyítás. f és $1/g$ folytonosak, így az

$$F(x) \doteq \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C_1 \qquad \big(x, x_0 \in [a, b]\big),$$

$$G(y) \doteq \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)} dt + C_2 \qquad \big(y, y_0 \in [c, d]\big)$$

szerint definiált $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $G : [c, d] \to \mathbb{R}$ függvényekre $F' = f$, $G' = 1/g$ teljesül.

a) Ha y teljesíti (SZMo)-t, akkor

$$G\big(y(x)\big) = F(x) + C_2 - C_1 \qquad \big(x \in [a, b]\big),$$

ami y, F, G differenciálhatósága miatt adja, hogy

$$G'\big(y(x)\big) \cdot y'(x) = F'(x) \qquad \big(x \in [a, b]\big),$$

azaz

$$y'(x) = f(x)g\big(y(x)\big) \qquad \big(x \in [a, b]\big)$$

teljesül, tehát y megoldása (SZ)-nek.

b) Ha y megoldása (SZ)-nek, akkor

$$f(x) = \frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} \qquad \big(x \in [a, b]\big)$$

és a helyettesítéses integrálás tétele miatt bármely $x, x_0 \in [a, b]$ esetén

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g\big(y(t)\big)} dt = \left(\left(\int_{y_0 = y(x_0)}^{y} \frac{1}{g(t)} dt \right) \circ y \right)(x)$$

következik, azaz (SZMo) teljesül.

Megjegyzések.

1) A tétel szerint $y(x_0) = y_0$ is teljesül, így az $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdeti érték probléma megoldását kaptuk meg.

2) A következő formális módszert gyakran használják:

$$\text{(SZ)} \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \quad (*),$$

amit megoldva y-ra kapjuk (SZ) megoldását. Az (x_0, y_0) ponton áthaladó megoldáshoz úgy kell megválasztani az integrációs konstansokat, hogy a $(*)$ egyenlőség teljesüljön $x = x_0$, $y = y_0$ mellett. Ez teljesül, ha

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt\ ,$$

ami adja, hogy y teljesíti (SZMo)-t.

3) Vizsgálható olyan eset is, amikor valamilyen $y_0 \in [c, d]$-re $g(y_0) = 0$ (ekkor $y(x) = y_0$ nyilván megoldás, de lehetnek más megoldások is).

2. Változóban homogén differenciálegyenletek

Tétel. Legyen $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $0 \notin [a,b]$ és $\exists\, y'$ $[a,b]$-n és $y(x)/x \in [c,d]$.
y akkor és csak akkor megoldása $[a,b]$-n a

(VH) $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

változóban homogén differenciálegyenletnek, ha az

$$u : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad u(x) \doteq \frac{y(x)}{x}$$

függvény megoldása $[a,b]$-n az

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

szeparábilis differenciálegyenletnek.

Bizonyítás. Nyilvánvaló.

3. Az $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ differenciálegyenlet

Ha $c = \gamma = 0$, akkor a címben egy (VH) típusú egyenlet szerepel, mondjuk $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú adott folytonos függvény esetén.

– Ha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a\beta - b\alpha = 0,$$

azaz ha $\dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{b}{\beta} = \lambda$, illetve $a = \lambda\alpha$, $b = \lambda\beta$, akkor a címben szereplő egyenlet átmegy az

$$y' = g(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

alakba, melyet az

$$u(x) = \alpha x + \beta y(x) + \gamma$$

helyettesítéssel az

$$u' = \alpha + \beta y' = \alpha + \beta g(u)$$

alakba írhatunk, ami egy speciális (SZ) egyenlet.

– Ha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

akkor az

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszernek pontosan egy ξ, η megoldása van.
Ekkor belátható (igen egyszerűen), hogy az

$$y : H \to \mathbb{R} \qquad (\xi \notin H,\ x \in H \ \Rightarrow\ \alpha x + \beta y + \gamma \neq 0)$$

függvény akkor és csakis akkor megoldása H-n az általános differenciálegyenletnek, ha a

$$\psi : H^* \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = y(t+\xi) - \eta \qquad \left(H^* = \{t \mid t + \xi \in H\}\right)$$

függvény megoldása az

$$\psi'(x) = F\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)$$

differenciálegyenletnek, ahol

$$F(z) = f\left(\frac{a+bz}{\alpha+\beta z}\right)\,.$$

4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

A következőkben szükségünk lesz az alábbi, a paraméteres integrálok differenciálására vonatkozó, a korábbinál részben általánosabb, de kevesebb változószámú és egyszerűbb értelmezési tartományú függvényekre teljesülő tételre.

Lemma. Legyenek $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények, hogy

$$c \le \varphi(x), \psi(x) \le d, \qquad x \in [a,b] .$$

Legyen továbbá $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos és az első változója szerint folytonosan differenciálható függvény $[a,b] \times [c,d]$-n. Ekkor a

$$h(x) \doteq \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt \qquad x \in [a,b]$$

függvény differenciálható, és $\forall\, x \in [a,b]$ esetén

$$h'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} D_1 f(x,t)dt + f(x,\psi(x))\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\varphi'(x) .$$

Bizonyítás.

$$\begin{array}{llll}
\text{Ha} & \phi(x) \doteq \int_c^d f(x,t)dt & \Rightarrow & \exists\, \phi'(x) = \int_c^d D_1 f(x,t)dt . \\
\text{Ha} & F(x,y,z) = \int_y^z f(x,t)dt & \Rightarrow & \exists\, D_1 F = \int_y^z D_1 f; \\
 & & & \exists\, D_2 F = -f(x,y); \\
 & & & \exists\, D_3 F = f(x,z). \\
\text{Mivel} & h(x) = F(x,\varphi(x),\psi(x)) & \text{és} & \exists\, D_1 F,\ D_2 F,\ D_3 F; \\
 & & \Rightarrow & \exists\, h'(x) = D_1 F + D_2 F \varphi' + D_3 F \psi'; \\
 & & \Rightarrow & \text{az állítás.}
\end{array}$$

Definíció. Legyenek $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható ismeretlen függvény. A

$$\text{(LIH)} \qquad y' = f(x)y + g(x)$$

differenciálegyenletet elsőrendű lineáris inhomogén, míg az

$$\text{(LH)} \qquad y' = f(x)y$$

differenciálegyenletet elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük.

Tétel. Az $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása (LIH)-nek, ha $\exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\text{(LIHMo)} \qquad y(x) = c y_H(x) + y_P(x) \qquad (x \in [a,b]),$$

ahol $y_H : [a,b] \to \mathbb{R}$ az (LH) differenciálegyenlet sehol el nem tűnő, $y_P : [a,b] \to \mathbb{R}$ pedig (LIH) egy (partikuláris) megoldása.
Továbbá, ha $x_0 \in [a,b]$ rögzített, akkor bármely $x \in [a,b]$-re

$$\text{(H)} \qquad y_H(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right),$$

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} y_P(x) = \int_{x_0}^{x} g(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^{x} f(t)dt\right) d\tau = \\ \qquad = \left[\exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right)\right] \cdot \int_{x_0}^{x} g(\tau) \exp\left(-\int_{x_0}^{\tau} f(t)dt\right) d\tau . \end{cases}$$

Bizonyítás.

a) Legyen y megoldása (LIH)-nek, $x_0 \in [a,b]$ adott, akkor

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x) \qquad (x \in [a,b]),$$

melyet $\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) \neq 0$-val szorozva kapjuk, hogy

$$y'(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) - f(x)y(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) =$$

$$= g(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right),$$

amiből látható, hogy $x \in [a,b]$ esetén

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right)\right] = g(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right).$$

Ez pedig adja, hogy

$$y(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) = \int_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(-\int_{x_0}^{\tau} f(t)dt\right)d\tau + c\,,$$

melyet $\exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right)$-vel szorozva

$$\begin{aligned} y(x) &= c\exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) + \int_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{\tau} f(t)dt\right)d\tau = \\ &= c\exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) + \int_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(\int_{\tau}^{x} f(t)dt\right)d\tau \end{aligned}$$

adódik, melyből (H) és (P) figyelembevételével jön (LIHMc).

b) Ha y (LIHMc) alakú, akkor ((H)-t és (P)-t tekintve)

$$y_H'(x) = f(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) = f(x)y_H(x)\,,$$

azaz (H) megoldása (LH)-nak.
Ugyanakkor (P)-ből, a lemma

$$\varphi(x) = x_0, \qquad \psi(x) = x, \qquad f(x,\tau) = g(\tau)\exp\left(\int_{\tau}^{x} f(t)dt\right)$$

speciális választása mellett bármely $x, \tau \in [a,b]$ esetén

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= \int_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(\int_{\tau}^{x} f(t)dt\right)f(x)d\tau + g(x)\exp\left(\int_{x}^{x} f(t)dt\right) - 0 = \\ &= f(x)\left[\int_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(\int_{\tau}^{x} f(t)dt\right)d\tau\right] + g(x) = \\ &= f(x)y_P(x) + g(x) \end{aligned}$$

adódik, azaz y_P megoldása (LIH)-nek.
Végül pedig (LIHMc) differenciálásával bármely $x \in [a,b]$ esetén

$$\begin{aligned} y'(x) &= [cy_H + y_P]'(x) = cy_H'(x) + y_P'(x) = \\ &= cf(x)y_H(x) + f(x)y_P(x) + g(x) = \\ &= f(x)[cy_H(x) + y_P(x)] + g(x) = f(x)y(x) + g(x)\,, \end{aligned}$$

azaz a (LIHMc) alakú függvény valóban megoldása (LIH)-nek.

5. Egzakt differenciálegyenletek

Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $P, Q : D \to \mathbb{R}$ adott függvények. Az

(E) $$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

egyenletet egzaktnak nevezzük, ha az $f = (P,Q) : D \to \mathbb{R}^2$ függvénynek létezik primitív függvénye, azaz létezik $F : D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy

$$F' = f, \quad \text{azaz} \quad D_1F = P \quad \text{és} \quad D_2F = Q$$

teljesül.

Megjegyzés. (E)-t szokás az

(E') $$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

alakban is írni.

Tétel. Az (E) egzakt differenciálegyenletnek az $y : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény (melyre $(x, y(x)) \in D$, ha $x \in I$) akkor és csak akkor megoldása I-n, ha $\exists\, C \in \mathbb{R}$, hogy

(EMc) $$F(x, y(x)) = C \qquad (x \in I),$$

ahol F az $f = (P,Q)$ függvény primitív függvénye.

Bizonyítás.

a) Legyen y (EMo) alakú, akkor az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$D_1F(x,y(x)) + D_2F(x,y(x))y'(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

következik, ami $D_1F = P$ és $D_2F = Q$-val adja, hogy y megoldása (E)-nek.

b) Ha y megoldása (E)-nek I-n és (E) egzakt, akkor

$$0 = D_1F(x,y(x)) + D_2F(x,y(x))y' = \frac{d}{dx}F(x,y(x)) \qquad (x \in I)$$

teljesül, ami adja (EMc)-t.

Megjegyzések.

1) Egy egzakt differenciálegyenlet megoldásához elegendő az F primitív fügvény meghatározása.

2) Ha $f = (P,Q) : D \to \mathbb{R}^2$ olyan, hogy D csillagszerű tartomány, f folytonosan differenciálható (azaz P és Q is), továbbá $D_2P = D_1Q$ D-n, akkor létezik $f = (P,Q)$-nak primitív függvénye. Ha (x_0, y_0) egy csillagközéppont és $g : [a,b] \to D$ olyan szakaszonként sima görbe, mely az (x_0,y_0)-t (x,y)-nal köti össze, akkor ez a primitív függvény az

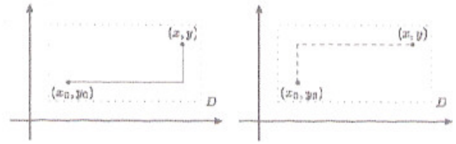
$$F(x,y) = \int_g f = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f$$

integrálfüggvény (lásd Analízis III., III.4.2. tétel).

3) A 2) megjegyzés feltételein túl teljesüljön, hogy $g(t) \doteq (x(t),y(t))$ folytonosan differenciálható ($g(a) = (x_0,y_0)$, $g(b) = (x,y)$), akkor a görbementi integrál kiszámítására vonatkozó ismert tétel (lásd például Analízis II.) alapján, ha $\exists\, g^{-1}$, úgy

$$F(x,y) = \int_a^{g^{-1}(x,y)} P(x(t),y(t))x'(t)dt + \int_a^{g^{-1}(x,y)} Q(x(t),y(t))y'(t)dt\,.$$

4) Ha D téglalap vagy körlap, akkor bármely rögzített (x_0,y_0)-ból bármely $(x,y) \in D$ elérhető a tengelyekkel párhuzamos szakaszokból álló töröttvonal mentén, például:



A folytonos vonalra:

$$g(t) = g^1(t) \cup g^2(t) = (x^1(t),y^1(t)) \cup (x^2(t),y^2(t))\,,$$

ahol

$$\begin{cases} x^1(t) = t \\ y^1(t) = y_0 \end{cases} t \in [x_0,x], \qquad \begin{cases} x^2(t) = x \\ y^2(t) = t \end{cases} t \in [y_0,y],$$

így

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$$

A szaggatott vonalra (hasonlóan):

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt$$

5) $F(x,y)$ utóbbi két alakjában szokás az első integrálban $t \to x$, a másodikban $t \to y$ használata is, ekkor

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy\,,$$

illetve

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy \ .$$

6) Az (E) egzakt egyenlet (x_0, y_0)-on áthaladó megoldását $C = 0$ mellett kapjuk.

7) Az $y' = f(x)g(y)$ $(g \neq 0)$ szeparábilis egyenlet egzakt differenciálegyenlet.

6. Integráló szorzó keresése

Definíció. Ha y teljesíti (E)-t és $\exists\ \mu : D \to \mathbb{R}$ $(\mu \neq 0)$ függvény, hogy a $(\mu P, \mu Q)$ függvénynek létezik primitív függvénye, azaz a

$$(*) \qquad \mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt, akkor μ-t az (E) egyenlet integráló szorzójának (Euler-multiplikátorának) nevezzük.

Megjegyzések.

1) Ha létezik integráló szorzó, úgy ((E) és $(*)$ ekvivalenciája miatt) (E) megoldása visszavezethető a $(*)$ egzakt differenciálegyenlet megoldására.

2) Integráló szorzót az alábbi módon kereshetünk:

$$D_2\mu P = D_1\mu Q \qquad \Leftrightarrow \qquad Q\mu_x - P\mu_y = (P_y - Q_x)\mu \ ,$$

melyből ha $\mu = \mu(\omega(x,y))$ (pl. $\omega(x,y) = x$ vagy y vagy $x+y$ ...)

$$Q\frac{d\mu}{d\omega}\omega_x - P\frac{d\mu}{d\omega}\omega_y = (P_y - Q_x)\mu \ ,$$

illetve

$$\frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}$$

következik, ami adja, hogy

$$\mu(\omega) = \exp\int \frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}(\omega)d\omega \ ,$$

ha $\frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}$ az ω függvénye.

7. A Bernoulli- és Ricatti-egyenlet

1. tétel. Legyenek $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ adott függvények, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\alpha \neq 1$. Az $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(y > 0)$ differenciálható függvény akkor és csak akkor megoldása $[a,b]$-n a

$$(B) \qquad y'(x) + f(x)y(x) + g(x)y^{\alpha}(x) = 0$$

Bernoulli-féle differenciálegyenletnek, ha a

$$\psi : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad \psi(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

függvény megoldása a

$$\psi'(x) + (1-\alpha)f(x)\psi(x) + (1-\alpha)g(x) = 0$$

lineáris differenciálegyenletnek $[a,b]$-n.

Bizonyítás. $y(x) = [\psi(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ és $y'(x) = \dfrac{1}{1-\alpha}[\psi(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot \psi'(x)$ miatt (B) akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{1}{1-\alpha}[\psi(x)]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \psi'(x) + f(x)[\psi(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}} + g(x)[\psi(x)]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0 \ ,$$

azaz

$$\psi'(x) + (1-\alpha)f(x)\psi(x) + (1-\alpha)g(x) = 0$$

bármely $x \in [a,b]$ esetén, amit bizonyítani kellett.

2. tétel. Legyenek $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ adottak, $y, y_P : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálhatók és y_P egy megoldása az

$$(R) \qquad y'(x) + f(x)y^2(x) + g(x)y(x) + h(x) = 0$$

Ricatti-féle differenciálegyenletnek. y akkor és csak akkor megoldása (R)-nek, ha a

$$\psi : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad \psi(x) \doteq y(x) - y_P(x)$$

függvény megoldása a

$$\psi'(x) + \left[2f(x)\,y_P(x) + g(x)\right]\psi(x) + f(x)\psi^2(x) = 0$$

(B) differenciálegyenletnek.

Bizonyítás. Egyszerű.

III. Egzisztencia-tételek Cauchy-feladatokra

1. Segédeszközök a funkcionálanalízisből

A lineáris tér, normált tér, metrikus tér, teljes metrikus tér fogalma már ismert az Analízis I-III.-ból.
Fontos lesz számunkra az alábbi két eredmény.

1. tétel (Banach-féle fixponttétel). Legyen (X, d) teljes metrikus tér, $A : X \to X$ kontrakció, azaz olyan leképezés, hogy $\exists\ \alpha \in (0, 1)$, hogy

$$d(Ax, Ay) \le \alpha d(x, y) \qquad (\forall\ x, y \in X)$$

teljesül, akkor A-nak pontosan egy fixpontja van, azaz pontosan egy $x \in X$ létezik, hogy $Ax = x$.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in X$ tetszőleges, (x_n) pedig

$$x_1 = Ax_0, \quad \dots, \quad x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$$

szerint definiált sorozat X-ben.

Először megmutatjuk, hogy (x_n) Cauchy-sorozat:
Legyen $m \ge n$, ekkor

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = d(A^n x_0, A^m x_0) &\le \alpha d(A^{n-1} x_0, A^{m-1} x_0) \le \\ &\dots \\ &\le \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \le \\ &\le \alpha^n \{ d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \} \le \\ &\le \alpha^n d(x_0, x_1) \{ 1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1} \} \le \\ &\le \alpha^n d(x_0, x_1) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \\ &= \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) , \end{aligned}$$

ami $\alpha^n \to 0$ miatt adja, hogy $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\ m, n \ge n_0(\varepsilon)\ \Rightarrow\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

- (X, d) teljessége miatt (x_n) konvergens, azaz $\exists\ x \in X$, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
- Megmutatjuk, hogy x fixpontja A-nak. Egy kontrakció nyilván folytonos ($d(Ax, Ax_0) \le \alpha d(x, x_0)$ miatt), így

  $$Ax = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x ,$$

  tehát x fixpontja A-nak.
- A fixpont egyértelműen meghatározott, mert ha $Ax = x$ és $Ay = y$ is teljesül, úgy

  $$d(x, y) = d(Ax, Ay) \le \alpha d(x, y) ,$$

  ami $\alpha < 1$ miatt csak úgy lehetséges, ha $d(x, y) = 0$, azaz $x = y$.

2. tétel. Egy teljes metrikus tér bármely zárt altere is teljes metrikus tér.

Teljes metrikus térre fontos példa a $C_k[a, b]$ tér:

- ennek alaphalmaza: $C_k[a, b] = \{ f : [a, b] \to \mathbb{R}^k \mid f \text{ folytonos} \}$;
- $C_k[a, b]$ lineáris tér a függvényekre értelmezett összeadásra és skalárral való szorzásra nézve;
- $C_k[a, b]$ normált tér az $\|f\|_0 \doteq \sup\limits_{x\in[a,b]} \{ \|f(x)\|_{\mathbb{R}^k} \}$ szerint definiált normával (ami igen egyszerűen bizonyítható);
- $C_k[a, b]$ metrikus tér a $d(f, g) \doteq \|f - g\|_0$ szerint definiált (a $\|\ \|_0$ normából származtatott) metrikával.
- $C_k[a, b]$ ezen metrikával teljes metrikus tér.
  Legyen (f_n) $(f_n \in C_k[a, b])$ Cauchy-sorozat, akkor $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\ n, m \ge n_0(\varepsilon)\ \Rightarrow\ \|f_n - f_m\|_0 < \varepsilon$, ami adja, hogy

  $$(*) \quad \|f_n(x) - f_m(x)\|_{\mathbb{R}^k} \le \|f_n - f_m\|_0 < \varepsilon \qquad (\forall\ x \in [a, b]),$$

  azaz az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens $[a, b]$-n (a függvénysorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritérium miatt), tehát $\exists\, f \in C_k[a,b]$, hogy $f_n \to f$ egyenletesen. Ugyanakkor (mert folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye) az f folytonos. Ekkor $(*)$-ból $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$ és $x \in [a,b]$ esetén

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \varepsilon\,,$$

illetve ebből

$$\|f_n - f\|_0 \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

következik, tehát (f_n) konvergál az $f \in C_k[a,b]$ elemhez a $C_k[a,b]$ metrikus térben, ami adja az állítást.

Megjegyzés. Ha $k = 1$, úgy $C_1[a,b]$-t egyszerűen $C[a,b]$-vel jelöljük és az $[a,b]$ feletti folytonos, valós értékű függvények terének nevezzük.

Definíció. Legyen $G_1 \subset \mathbb{R}^m$, $I = [a,b]$, $G = I \times G_1$, $f : G \to \mathbb{R}^n$. f Lipschitz-feltételt teljesít G-n (az utolsó m változójában), ha $\exists\, L > 0$, hogy $\forall\, (x,y_1),(x,y_2) \in G$-re

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq L\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^m}\,.$$

2. Egzisztencia és unicitiás tétel DER-KÉP-re

Igen fontos a DER-KÉP probléma következő átfogalmazása (visszavezetése integrálegyenlet-rendszerre):

Lemma. Az $y : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény akkor, és csak akkor megoldása az

(DER-KÉP) $\qquad y' = f(x,y)\,, \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

problémának, ha folytonos megoldása az

(IER) $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$$

integrálegyenlet-rendszernek. (Itt $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény.)

Bizonyítás.

a) Ha $y : I \to \mathbb{R}^n$ megoldása (DER-KÉP)-nek, akkor

$$y'(x) = f(x,y(x)) \qquad (x \in I).$$

f és y folytonossága adja, hogy $f(x,y(x))$ folytonos I-n, így létezik az

$$\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$$

integrál és

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt \qquad (x \in I),$$

ahol $y(x_0) = y_0$, azaz teljesül (IER).

b) Ha $y : I \to \mathbb{R}^n$ folytonos megoldása (IER)-nek I-n, akkor $f(x,y(x))$ folytonossága miatt

$$\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$$

differenciálható és deriváltja $f(x,y(x))$, másrészt (IER) adja, hogy y differenciálható és $y'(x) = f(x,y(x))$ $(x \in I)$, továbbá (IER) szerint $y(x_0) = x_0$ is igaz, ebből pedig következik, hogy y megoldása (DER-KÉP)-nek.

Megjegyzés. A lemma miatt (DER-KÉP) megoldhatósága és a megoldás egyértelműsége (egzisztencia és unicitás) egyet jelent (IER) megoldhatóságával és a megoldás egyértelműségével.

Tétel (Picard-Lindelöf egzisztencia és unicitás tétel).
Legyen $G_1 \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $D = I \times G_1$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, hogy létezik $L > 0$, hogy

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\|_{\mathbb{R}^n} < L\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^m} \qquad (\forall\, (x,y_1),(x,y_2) \in D),$$

azaz Lipschitz-tulajdonságú D-n. Legyen továbbá $x_0 \in I$ és $y_0 \in G_1$ rögzített. Akkor $\exists\, \alpha > 0$, hogy az

(DER-KÉP) $$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Cauchy-feladatnak az $I_1 = I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ intervallumon létezik megoldása és az egyértelmű.

Bizonyítás. A lemma szerint elegendő az (IER) integrálegyenlet-rendszer folytonos megoldásának létezését és annak egyértelműségét bizonyítani.

a) A létezés bizonyítása:

- G_1 nyílt, így $\exists\, r > 0$, hogy $T = \{y \mid \|y - y_0\| \le r\} \subset G_1$, és így az $I \times T \subset D$ teljesül és $I \times T$ zárt. Ekkor f folytonossága miatt $\exists\, K > 0$, hogy $\|f\| < K$ $I \times T$-n.
- Legyen $\alpha = \min\left\{\frac{r}{K}, \frac{1}{L+1}\right\}$, $I_1 = I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
- Tekintsük az

  $$X = C_n^* = \{\varphi \mid \varphi : I_1 \to T, \varphi \text{ folytonos}\}$$

  halmazt a

  $$d : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{x \in I_1} \{\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\|\}$$

  metrikával. (X, d) zárt altere a korábbiakban tekintett, $C_n(I_1)$ teljes metrikus térnek, így teljes metrikus tér.
- Értelmezzük (X, d)-n az A leképezést

  $$(A\varphi)(x) \doteq y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt \qquad (x \in I_1)$$

  szerint. $A : X \to X$ típusú, mert $\psi \doteq A\varphi$ folytonos I_1-en (az integrálfüggvény ismert tulajdonsága miatt), továbbá

  $$\|\psi(x) - y_0\| = \left\|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt\right\| \le \int_{x_0}^{x} \|f(t, \varphi(t))\| \, dt \le$$
  $$\le K\|x - x_0\| \le K\alpha \le r$$

  miatt $\psi(I_1) \subset T$ is igaz, így $\psi = A\varphi \in X$.

- A kontrakció, mert ha $\varphi_1, \varphi_2 \in X$, úgy

  $$\|(A\varphi_1)(x) - (A\varphi_2)(x)\| = \left\|\int_{x_0}^{x} [f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))]dt\right\| \le$$
  $$\le \int_{x_0}^{x} \|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\| \, dt \le$$
  $$\le \int_{x_0}^{x} L d(\varphi_1, \varphi_2) dt \le$$
  $$\le L\|x - x_0\| d(\varphi_1, \varphi_2) \le$$
  $$\le L\,\alpha\, d(\varphi_1, \varphi_2) \le \frac{L}{L+1} d(\varphi_1, \varphi_2)$$

  (hiszen $L/(L+1) \in (0, 1)$).
- Az 1. tétel (Banach-féle fixponttétel) miatt A-nak létezik fixpontja, azaz $\exists y \in X$ folytonos függvény, hogy $(Ay)(x) = y(x)$ $(\forall\, x \in I_1)$, vagyis

  $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \qquad (x \in I_1)$$

  teljesül, tehát létezik megoldása (IER)-nek, és így (DER-KÉP)-nek I_1-en.

b) A megoldás egyértelműségének bizonyítása:
A Banach-féle fixponttétel miatt a megoldás egyértemű is az I_1-en differenciálható függvények körében I_1-en.

Megjegyzések.

1) A tétel feltételei mellet a (DER-KÉP) megoldását (az A leképezés fixpontját) az

$$y_0(x) \doteq y_0, \quad y_k(x) \doteq y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))dt \quad (k = 1, 2, \ldots; x \in I_1)$$

szerint definiált (y_k) függvénysorozat határfüggvénye adja.
Az eljárást Picard-féle szukcesszív approximációnak nevezzük.

2) $n = 1$ mellett az elsőrendű explicit differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatra vonatkozó Picard-féle egzisztencia és unicitás tételt kapjuk.

3) Egy példa: A

$$\text{(KÉP)} \qquad y' = xy, \qquad y(0) = 1$$

Cauchy-feladatnak megfelelő integrálegyenelet:

$$\text{(IE)} \qquad y(x) = 1 + \int_0^x t y(t) dt$$

Ekkor

$$y_0(x) = 1, \qquad y_1(x) = 1 + \int_0^x t dt = 1 + \frac{x^2}{2}, \dots$$

$$y_k(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k, \dots,$$

és $y_k(x) \to \exp(x^2/2)$ egyenletesen, így (KÉP) megoldása:

$$y(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. (L-DER-KÉP) megoldhatósága

Legyenek g_{ij}, $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ adott folytonos függvények, akkor

$$y_i' = \sum_{j=1}^n g_{ij}(x) y_j + \varphi_i(x), \qquad y_i(x_0) = y_{0i} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

egy lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó Cauchy-feladat, mely az

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \qquad \underline{g} = (g_{ij})_{n \times n}$$

jelöléssel az

$$\text{(L-DER-KÉP)} \qquad y' = \underline{g}(x) y + \varphi(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

alakba is írható.
Ez ekvivalens az

$$\text{(L-IER)} \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \left[\underline{g}(t)\, y(t) + \varphi(t)\right] dt$$

integrálegyenlet-rendszerrel.
Legyen $D = I \times \mathbb{R}^n$, akkor az

$$f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, \qquad f(x, y) \doteq \underline{g}(x) y + \varphi(x)$$

folytonos függvényre $\forall\ (x, y^1), (x, y^2) \in D$ esetén

$$\|f(x, y^1) - f(x, y^2)\| = \|\underline{g}(x)(y^1 - y^2)\| =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n g_{ij}(x)(y_j^1 - y_j^2)\right]^2} \le nK\|y^1 - y^2\| = L\|y^1 - y^2\|$$

teljesül, azaz Lipschitz-tulajdonságú, így az (L-DER-KÉP) megoldható és a megoldás egyértelmű $I_1 \subset I$-n.

4. (n-KÉP) megoldhatósága

Tétel (egzisztencia és unicitás tétel (n-KÉP)-re).
Legyen $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $D = I \times G_1$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $\exists\ L > 0$, hogy

$$\|f(x, y^1) - f(x, y^2)\| < L\|y^1 - y^2\| \qquad (\forall (x, y^1), (x, y^2) \in D),$$

azaz Lipschitz-tulajdonságú D-n. Legyen továbbá $x_0 \in I$, $y_0 \in G_1$ rögzített.
Akkor $\exists\ \alpha > 0$, hogy az

$$\text{(n-KÉP)} \qquad y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}), \qquad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$$

$(i = 0, \dots, n-1)$ Cauchy-feladatnak az $I_1 = I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ intervallumon létezik megoldása és az egyértelmű.
Bizonyítás. Az átviteli elv szerint (n-KÉP) ekvivalens az

$$(\triangle) \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \qquad y_i(x_0) = y_{0i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Cauchy-feladattal, azaz $y : I_1 \to \mathbb{R}$ akkor, és csak akkor megoldása (n-KÉP)-nek, ha $(y, y', \dots, y^{(n-1)}) : I_1 \to \mathbb{R}^n$ megoldása a $(\triangle)$ (DER-KÉP)-nek, ahol

$$\underline{f} = (f_1, \dots, f_n), \qquad f_k(x, y) = y_{k+1}, \quad (k = 1, \dots, n-1), \qquad f_n = f.$$

Könnyen ellenőrízhető, hogy teljesülnek a Picard-Lindelöf-tétel feltételei, így a kapott (DER-KÉP)-nek (és így (n-KÉP)-nek) létezik megoldása és egyértelmű.

Következmény (L-n-KÉP megoldhatósága). Legyenek $a_1, \dots, a_n, b : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ rögzített. Akkor az

$$(\text{L-}n\text{-KÉP}) \qquad \begin{cases} y^{(n)} = a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y + b(x) \\ \quad y^{(i)}(x_0) = y_{0\,i+1} \qquad (i = 0, \dots, n) \end{cases}$$

Cauchy-feladatnak egy és csak egy megoldása van I-n.

Bizonyítás. Most az (L-n-KÉP)-nek megfelelő (DER-KÉP)

$$y'(x) = \underline{\underline{A}}(x) y(x) + B(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

alakú, ahol

$$\underline{\underline{A}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & & \dots & 1 \\ a_n(x) & & & \dots & a_1(x) \end{pmatrix} \qquad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

és ekkor alkalmazható tételünk.

5. Egzisztenciatétel DER-KÉP-re

Tétel (Cauchy-Peano egzisztencia tétel). Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(x_0, y_0) \in D$. Akkor az

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Cauchy-feladatnak létezik megoldása.
(De nem feltétlenül egyértelmű, lásd például az $y' = \sqrt{|y|}$ differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatot.)

Bizonyítás. Nem kell.