1. Alapfogalmak: n-ed rendű közönséges explicit differenciálegyenlet, elsőrendű n-dimenziós közönséges explicit differenciálegyenlet-rendszer, Cauchy-feladat, megoldás, teljes megoldás, átviteli elv.

2. Differenciálegyenletek elemi megoldási módszerei: szétválasztható változójú, változóiban homogén, és $y'(x) = f\left(\frac{ax+by(x)+c}{\alpha x+\beta y(x)+\gamma}\right)$ alakú differenciálegyenletek.

3. Differenciálegyenletek elemi megoldási módszerei: elsőrendű lineáris, Bernoulli-, és Riccati-féle differenciálegyenletek.

4. Differenciálegyenletek elemi megoldási módszerei: egzakt differenciálegyenletek, hiányos másodrendű diffrenciálegyenletek.

5. Egzisztencia- és unicitás tételek: a Picard-Lindelöf-tétel, szukcesszív approximáció, lokális és globális egzisztencia- és unicitás tétel, a Peano-féle egzisztencia tétel, Euler töröttvonal–módszere.

6. Elsőrendű n-dimenziós lineáris differenciálegyenlet-rendszerek.

7. Konstans együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszerek.

8. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek, a konstans együtthatós eset.

9. A variációszámítás elemei, az Euler-Lagrange differenciálegyenlet.

1. tétel

Alapfogalmak: n-ed rendű közönséges explicit differenciálegyenlet, elsőrendű n-dimenziós közönséges explicit differenciálegyenlet-rendszer, Cauchy-feladat, megoldás, teljes megoldás, átviteli elv.

Az n-edrendű közönséges explicit differenciálegyenlet:

! $n \in \mathbb{N}$ (pozitív egészek) $\quad \emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ($n+1$ db. változós)

$f : D \to \mathbb{R}$ valós értékű folytonos függvény.

Keresendő az összes olyan $\varphi : J \to \mathbb{R}$ fgv., amely rendelkezik a köv. tulajdonságokkal:

- $J \subset \mathbb{R}$ pozitív hosszúságú intervallum
- $\varphi : J \to \mathbb{R}$ n-szer differenciálható
- $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in D$, ha $x \in J$ [x benne van J ért. tart.-ban]
- $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))$, ha $x \in J$.

Ez a probléma az n-edrendű közönséges explicit differenciálegyenlet, a fenti tulajdonságú φ ennek a problémának egy megoldása.

Jelölés:

$$(1) \quad y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

[Keressük az y-t, ami most egy fgv.
explicit: az egyenletből a legmagasabb derivált kifejezhető

Megoldásnál megkövetelik, hogy egy adott pontban adott értéket vegyen fel ⇒ kezdetiérték probléma.]

Keresendő (1) összes olyan $\varphi : J \to \mathbb{R}$ megoldása adott $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_n) \in D$ esetén, melyre igaz:

- $x_0 \in J$
- $\varphi^{(k)}(x_0) = y_k$, $k = 0, \ldots, n-1$

[Értékei és a derivált értékei előállíthatók egy n-1 pontban.]

Ez a probléma az (1)-re vonatkozó kezdeti érték probléma, vagy Cauchy-feladat.

A fenti tulajdonságú φ pedig ennek egy megoldása.

Cauchy-feladat jelölése:

$$(1) \quad y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

$$(2) \quad y^{(k)}(x_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Az n-dimenziós elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer:

$n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ [D az n+1 dimenziós euklideszi-tér részhalmaza]

$f: D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény

Keresendő olyan $\varphi: J \to \mathbb{R}^n$, hogy:

- $J \subset \mathbb{R}$ pozitív hosszúságú intervallum
- φ differenciálható [pozitív fgv.]
- $(x, \varphi(x)) \in D$, ha $x \in J$ [$(x, \varphi(x))$ benne van D-ben, ha $x \in J$]
- $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, ha $x \in J$.

Ezt a problémát az n-dimenziós elsőrendű explicit differenciálegyenlet-rendszernek, a fenti fgv.-t pedig ennek egy megoldásának nevezzük.

Jelölés:

$$(3) \quad y'(x) = f(x, y(x))$$

[csak elsőrendű fgv.-ek szerepelnek, de vektorértékűek a megoldások]

! $(x_0, y_0) \in D$. [D-beli pont]. Keresendő az összes olyan $\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ megoldása (3)-nak, amelyre teljesül:

- $x_0 \in J$
- $\varphi(x_0) = y_0$.

Ez a probléma a (3)-ra vonatkozó kezdetiérték probléma, vagy Cauchy-feladat.

Jelölés:

$$(3) \quad y'(x) = f(x, y(x))$$

$$(4) \quad y(x_0) = y_0$$

[f: $\mathbb{R}^n$-be képző fgv.]

$$(3)\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} y_1(x_0) = y_{01} \\ y_2(x_0) = y_{02} \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_{0n} \end{cases}$$

$\varphi : J \to \mathbb{R}$ teljes megoldása (1)-nek (ill. (1)-(2)-nek), ha φ megoldása (1)-nek (ill. (1)-(2)-nek) és nincs olyan $\psi : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ megoldása (1)-nek, (ill. (1)-(2)-nek), hogy: $J \subset \mathcal{J}$ [J valódi részhalmaza $\mathcal{J}$-nek] és $\psi(x) = \varphi(x)$, $x \in J$.

$\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ teljes megoldása (3)-nak (ill. (3)-(4)-nek), ha φ megoldása (3)-nak (ill. (3)-(4)-nek) és nincs olyan $\psi : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^n$ megoldása (3)-nak, (ill. (3)-(4)-nek), hogy: $J \subset \mathcal{J}$ és $\psi(x) = \varphi(x)$, $x \in J$.

Átírási elv:

Az (1) (ill. (1)-(2)) probléma ekvivalens egy speciális (3) (ill. (3)-(4)) problémával a köv. értelemben:

Ha $\varphi : J \to \mathbb{R}$ megoldása (1)-nek ((1)-(2)-nek) $\Rightarrow (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}) : J \to \mathbb{R}^n$ függvény megoldása a

$$(3')\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}'(x) = y_n(x) \\ y_n'(x) = f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszernek

[Az első koordinátafgv deriváltja a második koordinátafgv ... stb.
Utolsó koordináta fgv deriváltja, de ez az (1) diffe.]

$$\begin{pmatrix} (3') \\ (4') \quad y(x_0) = Y_0 = (y_0, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix} \text{-nak.}$$

Másrészt, ha $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ $(3')$-nak (ill. $(3')$-$(4')$) megoldása $\Rightarrow$

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, φ_1 (1) (ill. (1)-(2)) megoldása.

2. tétel

Differenciálegyenletek elemi megoldási módszerei: szétválasztható változójú, változóiban homogén, és az $y'(x) = f\left(\frac{ax+by(x)+c}{\alpha x+\beta y(x)+\gamma}\right)$ alakú differenciálegyenletek.

I. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet: [elsőfokú]

$$y'(x) = f(x)\,g(y(x))$$ [egyváltozós f és egyváltozós g szorzata]

$f: J \to \mathbb{R}$ folytonos

$g: I \to \mathbb{R}$ folytonos [vagy mindig pozitív, vagy mindig negatív]

$$\begin{cases} y'(x) = f(x)g(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ [Cauchy-feladat]

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f \quad , x \in J$$

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g}$$

$\varphi: J_0 \to \mathbb{R}$ (1) megoldása.

Ez azt jelenti, hogy φ' megoldása: $\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x)) \Rightarrow$

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)\ , x \in J_0 \Rightarrow G(\varphi(x))' = F'(x) \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}, \text{ hogy } G(\varphi(x)) = F(x) + c \Rightarrow$$

$\overset{*}{\Rightarrow} \varphi(x) = G^{-1}(F(x)+c)\ , x \in J_0.$ [invertálható]

A $*$ szerint definiált φ fgv (1) megoldása.

$$G(\varphi(x)) = F(x) + c$$

$$G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = F'(x)$$

$$\frac{1}{g(\varphi(x))} \cdot \varphi'(x) = f(x) \Rightarrow \varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x))$$

$$y_0 = \varphi(x_0) = G^{-1}(F(x_0)+c) \Rightarrow G^{-1}(c) \Rightarrow G(y_0) = c = 0$$

[$F(x_0) = 0$]

A Cauchy-feladat megoldása: $\varphi(x) = G^{-1}(F(x))\ , x \in J.$

[egyetlen megoldás]

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$y = \dots$ [y-t x-szel ki kell fejezni ⇒ ez lesz a megoldás]

Feladatok:

1) $y'(x) = y(x)$

2) $y'(x) = x\,y(x)$

3) $y'(x) = 4x\sqrt{y(x)}\quad y(1)=1$

4) $y'(x) = x e^{y(x)}$

5) $y'(x) = (1+y^2(x))\ln x$

Példa:

$$y'(x) = e^{y(x)-x}$$

$$y'(x) = e^{y(x)} \cdot e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot e^{y}$$

$$\int e^{-y}\,dy = \int e^{-x}\,dx$$

$$-e^{-y} = -e^{-x} + c$$

$$e^{-y} = e^{-x} + c$$

$$-y = \ln(e^{-x}+c)$$

$$y(x) = \ln(e^{-x}+c)$$

$e^{-x}-1 > 0$

$e^{-x} > 1$

$-x > 0$

$x < 0$

$y(x)$ is megoldás, de csak a negatív számok halmazán.

a „c" miatt ∞ sok megoldás van.

II. Változóiban homogén differenciálegyenlet:

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) \quad , \quad f: J \to \mathbb{R} \text{ folytonos.}$$

$u(x) = \frac{y(x)}{x}$ [elegendő az u fgv-t meghatározni]

$y(x) = x \cdot u(x)$ [y-t behelyettesítjük az eredeti fgv-be és diff-juk.]

$$y'(x) = u(x) + x u'(x) = f(u(x))$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}\left(f(u(x)) - u(x)\right)$$

Feladatok:

1) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{y(x)+x}$

2) $y'(x) = \dfrac{y(x)+x}{y(x)+3x}$

3) $y'(x) = \dfrac{y(x)+x}{x}$

III. Az $y'(x) = f\left(\dfrac{ax+by(x)+c}{\alpha x+\beta y(x)+\gamma}\right)$ alakú differenciálegyenletek.

$$y'(x) = f\left(\frac{ax+by(x)+c}{\alpha x+\beta y(x)+\gamma}\right), \quad f: J \to \mathbb{R} \text{ folytonos}$$

Ha $\alpha = \beta = 0$

$$y'(x) = f(a_1 x + b_1 y(x) + c_1)$$

hasonló az eset, ha $a = b = 0$.

$b_1 = 0$ triviális

$b_1 \neq 0$: $u(x) = a_1 x + b_1 y(x) + c_1$

$$y(x) = (u(x) - a_1(x) - c_1) \cdot \frac{1}{b_1} \quad \text{[differenciáljuk]}$$

$$(u'(x) - a_1) \cdot \frac{1}{b_1} = f(u(x))$$

$$u'(x) = b_1 f(u(x)) + a_1$$

Igazi eset: $a\beta \neq \alpha \cdot b$.

x t.   y t.

$$u(x) = y(x - \xi) + \eta \quad \text{[eltoljuk a fgv-t]}$$

$$y(x) = u(x+\xi) - \eta \quad \text{[kifejeztük } y\text{-t]}$$

$$u'(x+\xi) = f\left(\frac{ax + bu(x+\xi) - b\eta + c}{\alpha x + \beta u(x+\xi) - \beta\eta + \gamma}\right) \quad \text{[}x \text{ helyett } (x+\xi)\text{-t írunk]}$$

$$u'(x) = f\left(\frac{ax + bu(x) - (a\xi - b\eta + c)}{\alpha x + \beta u(x) - (\alpha\xi - \beta\eta + \gamma)}\right) \quad \text{[szeretnénk, ha ezek 0-k lennének]}$$

$$\begin{aligned} a\xi + b\eta &= c \\ \alpha\xi + \beta\eta &= \gamma \end{aligned}$$

megtehetjük, mert feltételeztük, hogy: $a\beta \neq \alpha \cdot b$.

3. tétel

Differenciálegyenletek elemi megoldási módszerei: elsőrendű lineáris, Bernoulli-, és Riccati-féle differenciálegyenletek.

I. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet:

$f, g : J \to \mathbb{R}$ folytonos

(1) $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$

(2) $y'(x) + f(x)y(x) = 0$ [(1)-hez tartozó homogén lineáris differenciálegyenlet].

[Ha az egyenletnek két megoldása van $\Rightarrow$ azok különbsége megoldása (2)-nek.]

Megj.: Ha φ_1 és $\varphi_2 : J \to \mathbb{R}$ (1) megoldása $\Rightarrow$ $\varphi_1 - \varphi_2$ (2) megoldása.

Megj.: $\varphi : J \to \mathbb{R}$ (2) megoldása $\Leftrightarrow$ ha $\exists\, c \in \mathbb{R} : \varphi(x) = c \cdot e^{-\int f(x)\,dx}$, $x \in J$.

Biz.: „$\Rightarrow$" $\varphi'(x) + f(x)\varphi(x) = 0$, $x \in J$.

[meg kell mutatni, hogy: $\varphi(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx} = c$, azaz konstans]

$$\left(\varphi(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx}\right)' = y'(x)\underbrace{e^{\int f(x)\,dx}}_{\varphi'(x)} + \varphi(x)\underbrace{e^{\int f(x)\,dx}}_{\varphi(x)} \cdot f(x) = 0$$

Megj.: Konstansvariálás: Keressük (1) egy φ_p megoldását $\varphi_p(x) = c(x) \cdot e^{-\int f(x)\,dx}$, $c : J \to \mathbb{R}$ differenciálható $x \in J$ alakban.

φ_p (1) megoldása $\Leftrightarrow c'(x)\, e^{-\int f(x)\,dx} + \underbrace{c(x)\, e^{-\int f(x)\,dx} \cdot \left(-f(x) + f(x) c(x)\, e^{-\int f(x)\,dx}\right)}_{0} = g(x) \Rightarrow$

$c'(x) = g(x)\, e^{\int f(x)\,dx} \Leftrightarrow c(x) = \int g(x)\, e^{\int f(x)\,dx}\, dx$

$\varphi_p(x) = \left(\int g(x)\, e^{\int f(x)\,dx}\, dx\right) e^{-\int f(x)\,dx}$, $x \in J$ intervallumon (1) megoldása.

Tétel: $\varphi : J \to \mathbb{R}$ (1) megoldása $\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : \varphi(x) = c \cdot e^{-\int f(x)\,dx} + \varphi_p(x)$, $x \in J$.

Biz.: „$\Rightarrow$"

$\varphi - \varphi_p$ (2) megoldása $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) - \varphi_p(x) = c \cdot e^{-\int f(x)\,dx}$

Feladatok:

1) $y'(x) - x\,y(x) = x^3$

2) $y'(x) + y(x) = e^{-x}$

3) $y'(x) + \frac{2}{x}\, y(x) = 3$ $\quad y(1) = 0$

4) $y'(x) = y(x) + x$

Példa: $y'(x) + y(x)\cdot \operatorname{tg} x = \sin 2x \qquad x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$y'(x) + y(x)\operatorname{tg} x = 0$$

$$y(x) = c\cdot e^{-\int \operatorname{tg} x\,dx} = c\cdot e^{\int -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx} = c\cdot e^{\ln \cos x} = c\cdot \cos x$$

Konstansvariálás:

$$y_p(x) = c(x)\cos x$$

$c'(x)\cos x = \sin 2x = 2\sin x\cos x$

↳ a többi tag összege 0.

$$c'(x) = 2\sin x$$

$$c(x) = -2\cos x$$

$$y_p(x) = -2\cos^2 x \Rightarrow y(x) = c\cos x - 2\cos^2 x, \quad x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$1 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}$$

$\frac{4}{\sqrt{2}} = c = 2\sqrt{2} \qquad y(x) = 2\sqrt{2}\cos x - 2\cos^2 x \qquad x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

II. Bernoulli-féle differenciálegyenlet:

$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)\,y(x)^{\alpha}$, $f, g: J \to \mathbb{R}$ folytonos, $\alpha \neq 1$.

[ha $\alpha = 1 \Rightarrow$ homogén diffe.]

$$u(x) = y(x)^{1-\alpha}$$

$$y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\,u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\cdot u'(x) + f(x)\,u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}} = g(x)\,u(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

↳ végigosztjuk ezzel az egyenletet

$$u'(x) + (1-\alpha)f(x)\,u(x) = g(x)$$

Feladatok:

1) $y'(x) + y(x) = -\frac{1}{y(x)}$

2) $y'(x) - y(x) = -(1+x)\,y(x)^2$

3) $y'(x) + y(x) + y(x)^2 = 0$

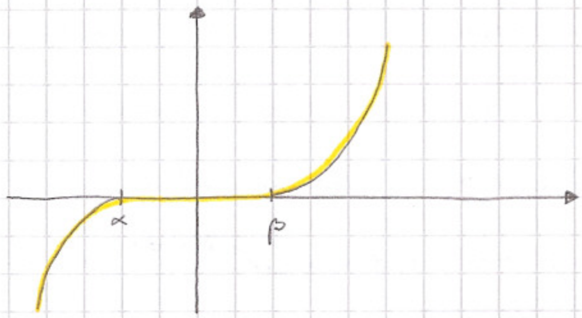
4) $y'(x) - y(x) = x\cdot y(x)^3$

Példa: $y'(x) = \sqrt{|y(x)|}$ $\quad y(0) = 0$

$\alpha < 0 < \beta$ [vegyünk két számot, egyik $\oplus$, másik $\ominus$]

$$y(x) \begin{cases} -\dfrac{(x-\alpha)^2}{4} & x < \alpha \\ 0 & \alpha \leq x \leq \beta \\ \dfrac{(x-\beta)^2}{4} & x > \beta \end{cases}$$

Behelyettesítéssel ki kell számolni!



CHAUCHY-FELADATNAK MINDIG VAN MEGOLDÁSA!

III. Riccati-féle differenciálegyenlet: (elsőrendű)

$y'(x) = f(x)y(x)^2 + g(x)y(x) + h(x)$ $\qquad f, g, h : J \to \mathbb{R}$ folytonos

[ált-ban nem lehet megoldani]

- Ha ennek az egyenletnek egy „v" megoldása ismert, akkor keressük „y" megoldását $y = u + v$ alakban.

$u' + \underline{\underline{v'}} = f(u^2 + 2uv + \underline{\underline{v^2}}) + g(u+v) + \underline{\underline{h}}$ [az aláhúzottak eltűnnek]

$u'(x) = (g(x) + 2v(x) \cdot f(x))\, u(x) + f(x) \cdot u(x)^2$

Ez egy Bernoulli-féle diffe.

Feladatok:

1) $y'(x) + \frac{1}{x} y(x) + y(x)^2 = \frac{4}{x^2}$ $\qquad v(x) = \frac{2}{x}$

2) $y'(x) + \frac{1}{3} y(x)^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$ $\qquad v(x) = \frac{1}{x}$

3) $y'(x) + 2y(x)e^x - y(x)^2 = e^{2x} - e^x$ $\qquad v(x) = e^x$

4. tétel

Differenciálegyenletek elemi megoldási módszerei: egzakt differenciálegyenletek, hiányos másodrendű differenciálegyenletek.

I. Egzakt differenciálegyenletek:

$J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ [két pozitív hosszúságú intervallum]

$P, Q : J_1 \times J_2 \to \mathbb{R}$ folytonos , $Q \neq 0$

A (1) $P(x, y(x)) + Q(x; y(x))\, y'(x) = 0$ egzakt, ha van olyan:

$u : J_1 \times J_2 \to \mathbb{R}$, hogy $\partial_1 u = P$ és $\partial_2 u = Q$. , $J_1 \times J_2$ -n

[első és második változó szerinti deriváltja]

Megoldásainak meghatározása:

A $\varphi : J \to \mathbb{R}$ megoldása az (1) egzakt diffe-nek $\Leftrightarrow$

$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = 0$, $x \in J$.

$\partial_1 \cancel{\mp} u(x\ \varphi(x)) + \partial_2 u(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = 0$

$\frac{d}{dx} \underbrace{u(x, \varphi(x))}_{\downarrow} = 0$ $x \in J$.

ez akkor és csak akkor van, ha $\exists c \in \mathbb{R} : u(x, \varphi(x)) = c$, $x \in J$.

[ez már csak algebrai egyenlet]

Jegyezzük meg: Ha P és Q folytonosan differenciálható:

$\exists\, u$ $\partial_1 u = P$ $\partial_2 u = Q$ folytonosan diff-ható

$\underbrace{\underline{\partial_2 \partial_1 u} = \partial_2 P \quad \underline{\partial_1 \partial_2 u} = \partial_1 Q}_{}$ [ha egy fgv 2x diff-ható]

$\partial_2 P = \partial_1 Q$

Megfordítva: ha P és Q folytonosan differenciálható :

$J_1 \times J_2$ -n és $\partial_2 P = \partial_1 Q$ $J_1 \times J_2$ -n $\Rightarrow$

$(x_0, y_0) \in J_1 \times J_2$ esetén $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\, dt$

$(x, y) \in J_1 \times J_2$ olyan fgv.

$\partial_1 u = P$ és $\partial_2 u = Q$.

[Leibniz-tétel alapján:]

$$\left(\partial_1 U(x,y) = P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \underbrace{\partial_1 Q(x,t)}_{\partial_2 P(x,t)}\,dt = P(x,y_0) + P(x,y) - P(x,y_0) = P(x,y); \right.$$

$$\left. \partial_2 U(x,y) = Q(x,y) \right)$$

Feladatok:

1) $x^2 + y(x)^2 + 2x\,y(x)\,y'(x) = 0$

2) $2x\,y(x) + 3y(x)^2 + (x^2 + 6x\,y(x) - 2y(x))\,y'(x) = 0$

3) $2x + y(x) + (x - 2y(x))\,y'(x) = 0$

Példa:

$$P(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \partial_2 P(x,y) = 2y$$

$$Q(x,y) = 2xy \Rightarrow \partial_1 Q(x,y) = 2y$$

$$U(x,y) = \int_0^x t^2\,dt + \int_0^y 2xt\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x + \left[xt^2\right]_0^{t=y}$$

$x = t$ és $y = 0$-t írunk

$$U(x,y) = c$$

$$\frac{x^3}{3} - 0 + xy^2 - 0 = \frac{x^3}{3} + xy^2 = c \Rightarrow y(x) = \ldots$$

II. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek:

[nem hiányos: $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$]

a) $y''(x) = f_1(x, y'(x))$

$u(x) = y'(x)$

$u'(x) = f_1(x, u(x))$

b) $y''(x) = f_2(y(x), y'(x))$

Először határozzuk meg egy olyan p fgv-t, melyre $y'(x) = p(y(x))$ teljesül. [szétválasztható]

„p" meghatározása:

$$y''(x) = p'(y(x)) \cdot y'(x) = p'(y(x)) \cdot p(y(x))$$

$$p'(y(x)) \cdot p(y(x)) = f_2(y(x), p(y(x))) \quad [\Rightarrow \text{eredeti egyenlet}]$$

$y(x) \Rightarrow$ intervallumot futnak be.

$p'(t)_p(t) = f_2(t, p(t))$ $t \in y$ értékészletének

Feladatok:

1) $2xy''(x) + y'(x) = 0$ [a) típus]

2) $2y(x)\,y'(x) = y''(x)$ [b) típus]

3) $y''(x) = \dfrac{y'(x)^2}{y(x)}$

4) $y''(x) = e^{y(x)}$

5) Cauchy-f. $y''(x) = y'(x)\,e^{y(x)}$ $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$ [b)]

Példa:

$y'(x) = p(y(x))$ $x = 0$ $1 = p(0)$

$p'(y(x))_p(y(x)) = p(y(x))\,e^{y(x)}$

$p'(x) \cdot p(x) = p(x) \cdot e^x$

$p'(x) = e^x$

$p(x) = e^x + c \Rightarrow c = 0$

$p(x) = e^x$

$y'(x) = e^{y(x)}$

$\dfrac{dy}{dx} = e^y$

$\int e^{-y}\,dy = \int dx$

$-e^{-y} + c_1 = x + c_2$

$-e^{-y} = x + k$

$k = -1$ (a feltétel miatt)

$e^{-y} = 1 - x$

$y(x) = -\ln(1-x)$

5. tétel

Egzisztencia és unicitás tételek: a Picard-Lindelöf-tétel, szukcesszív approximáció, lokális és globális egzisztencia- és unicitás tétel, a Peano-féle egzisztencia tétel, Euler töröttvonal módszere.

Mj: Elegendő az átviteli elv miatt csak differenciálható egyenletrendszerekkel foglalkozni ebben a témakörben.

Picard-Lindelöf tétel:

Legyen $0 < \alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \beta \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$

$Q = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n ;\ |x - x_0| \leq \alpha ,\ \|y - y_0\| \leq \beta \}$
↳ euklideszi norma

$f: Q \to \mathbb{R}^n$ folytonos

[mivel Q korlátos és zárt ⇒ kompakt az értelmezése]
⇓
f korlátos fgv

$M > 0 : \|f(x,y)\| \leq M \quad \forall\, x,y \in Q$

$h = \min \{ \alpha ; \frac{\beta}{M} \}$

$I = [x_0 - h ; x_0 + h]$ zárt intervallum

Tfh: ∃ olyan $L \geq 0 : \|f(x;y) - f(x;z)\| \leq L \|y - z\| \quad \forall\, (x,y) ; (x,y) \in Q$

(× eleget tesz a második változójában a Lipschitz-feltételnek)

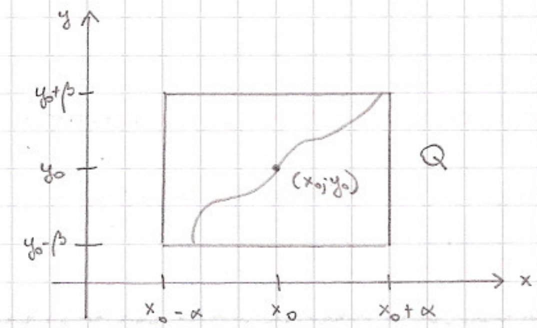
Ekkor pontosan egy olyan $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ differenciálható fgv van:

$(x ; \varphi(x)) \in Q$, ha $x \in J$; $\varphi'(x) = f(x; \varphi(x))$ $x \in J$ és $\varphi(x_0) = y_0$,

$\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ egyetlen megoldása

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad y'(x) = f(x; y(x)) \\ &(2) \quad y(x_0) = y_0 \end{aligned}\right\} \text{nak}$$

Megj: 1. $n = 1$ esetén



II. A $\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ fgv megoldása (1)-(2)-nek $\Leftrightarrow$, ha φ folytonos,

$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t;\varphi(t))\,dt$, $x \in J$

[„$\Rightarrow$": $\varphi'(t) = f(t;\varphi(t))$ $\forall$ $t \in J$; $\varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_{y_0} = \int_{x_0}^{x} f(t;\varphi(t))\,dt$

„$\Leftarrow$": φ folytonos, f folytonos, φ diff-ható.

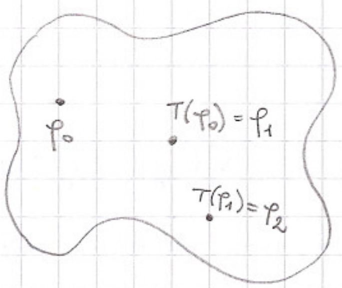
$\varphi'(x) = f(x;\varphi(x))$; $\varphi(x_0) = y_0$

Cauchy-feladat ekvivalens egy integrálegyenlettel]

III. $T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t;y(t))\,dt$; $x \in J$ $\forall$ $y: J \to \mathbb{R}^n$ folytonos

($y \in C(J)$) $T: C(J) \to C(J)$, φ (1)-(2) megoldása $\Leftrightarrow$, ha $T(\varphi) = \varphi$

IV.



[induljunk ki tetszőleges φ_0-ból]

(iteráció)

$\varphi_n = T(\varphi_{n-1})$ $n \geq 1$

Ha φ_n konvergens és T folytonos $\Rightarrow$ $\varphi_n \to \varphi$

$$\varphi \overset{\Downarrow}{=} T(\varphi)$$

$\varphi_0(x) = y_0$; $\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t;\varphi_{n-1}(t))\,dt$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ φ_n egyenletesen konvergens J-n

és $\varphi_n \to \varphi$

$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t;\varphi(t))\,dt$ $\Rightarrow$ φ (1)-(2) megoldása

↑ Szukcesszív approximáció

Példa:

$$y'(x) = y(x)$$

Cauchy-feladat

$$y(0) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x) = e^x$$

$$f(x;y) = y$$

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x 1\,dt = 1 + x$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^x$$

Taylor sor

Hf:

$$y'(x) = y(x)^2 - x$$

$$y(0) = 0$$

$$\varphi_3(x) = ?$$

Def.: $f: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ [n+1 változós: 1. vált: szám ; 2. vált: vektor]

f eleget tesz a második változójában a lokális Lipschitz-feltételnek D-n, ha $\forall (x_0; y_0) \in D$ esetén $\exists r > 0$ és $L \geq 0$;

$\| f(x;y) - f(x;z) \| \leq L \|y - z\| \quad \forall (x;y), (x;z) \in B_r(x_0,y_0) \cap D$ után

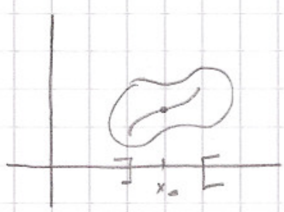
$(B_r(x_0;y_0) = \{ (x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|(x;y) - (x_0;y_0)\| < r \})$

Mj.: Ha D nyílt és f(x;y) folytonosan differenciálható ⇒ f ilyen

[második változójában] [lokálisan Lipschitz]

Lokális egzisztencia és unicitás tétel:

! $f: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (D nyílt), f folytonos, f a második változójában eleget tesz a lokális Lipschitz-feltételnek D-n. Ekkor $\forall (x_0; y_0) \in D$ $\exists \delta > 0$: az (1)-(2) Cauchy-feladatnak pontosan egy $\varphi:]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\to \mathbb{R}^n$ megoldása van. (azaz (1)-(2) lokálisan egyértelműen oldható meg.)



Globális egzisztencia-unicitás tétel:

! $J \subset \mathbb{R}$ [pozitív hosszúságú intervallum]; $f: J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonos fgv.

Tfh: $\exists L: J \to [0; +\infty[$ folyt. fgv: $\| f(x,y) - f(x,z) \| \leq L(x) \|y - z\| \quad \forall (x,y), (x,z) \in J \times \mathbb{R}^n$

[minden számpárra fennáll, nem csak egy pont környezetében]

Ekkor $\forall (x_0; y_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ után (1)-(2)-nek pontosan egy $\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ megoldása van.

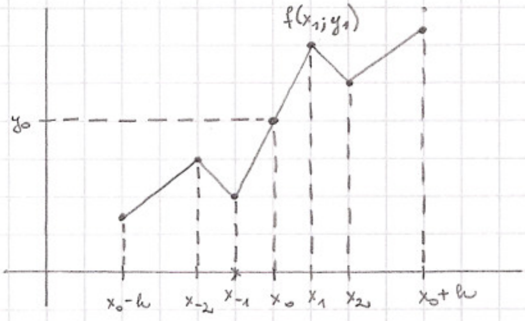
[attól globális, hogy az egész J-n van értelmezve, nem csak x_0 környezetében]

Peano-féle egzisztencia tétel:

! $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: D \to \mathbb{R}$ folyt. Ekkor $\forall (x_0, y_0) \in D$ esetén az (1)-(2) Cauchy-feladatnak van megoldása.

Megj.: Euler - féle törötttvonal módszer:

$n = 1$ [a síknak egy részhalmazán értelmezett fgv.]



[Kiszámoljuk a h-t Picard-Lindelöf tétellel]

Veszünk egy rögzített $m \in \mathbb{N}$ -t.

$$y'(x) = f(x; y(x))$$

$$y(x_0) = y_0$$

$x_0 - h$ és $x_0 + h$ intervallumot $2m$ egyenlő részre osztjuk

$y'(x_0) = f(x_0; y_0)$ [→ $(x_0; y_0)$ ponton áthaladó egyenes meredeksége]

[$f(x_1; y_1)$ pont meredekségét számoljuk ki ⇒ megnézzük, hogy hol metszi a töröttvonal x_1-et ... stb. Csak ott diff-ható, ahol törött.]

$\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}$: amelyhez tartozó φ_ε töröttvonalra teljesül:

$\| \varphi'_\varepsilon(x) - f(x; \varphi_\varepsilon(x)) \| < \varepsilon$, ha x nem töréspont.

$\varepsilon = \frac{1}{k}$ -hoz konstruáljuk meg (φ_k) töröttvonalsorozatot

$\exists\ \varphi_{n_k}$ konvergens $\varphi_{n_k} \to \varphi : \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t; \varphi(t))\, dt$

[határfgv: φ] $\Downarrow$ (2) Cauchy - feladat

6. tétel

Elsőrendű n-dimenziós lineáris differenciálegyenlet-rendszer.

$J \subset \mathbb{R}$ [poz. hosszúságú intervallum]

M_n [$n \times n$-es mátrixok lineáris terét jelenti]
/ +; számmal való szorzás → lin. tér /
+; · -ra → gyűrű

$A \in M_n$, $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \le 1\}$
[A mátrix hossza]

$\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$ → vektor hossza
↳ mátrix hossza
↳ Ax norma

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$ [1 oszlopos és n soros mátrix hossza: az elemek négyzetösszegéből vont négyzetgyök]

! $A : J \to M_n$ folytonos [legyen A mátrix értékű fgv.]

$b : J \to \mathbb{R}^n$

(1) $y'(x) = A(x)\,y(x) + b(x)$ [inhomogén, ha $b \neq 0$]

(2) $y'(x) = A(x)\,y(x)$

2 részletesen kiírva:

$$\left(\begin{array}{l} y_1'(x) = a_{11}(x)\,y_1(x) + a_{12}(x)\,y_2(x) + \dots + a_{1n}(x)\,y_n(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)\,y_1(x) + a_{n2}(x)\,y_2(x) + \dots + a_{nn}(x)\,y_n(x) \end{array} \quad ; \quad A(x) = (a_{in})_{n \times n}\right)$$

Tétel: $\forall (x_0; y_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ esetén (1)-nek pontosan egy, az egész J-n értelmezett olyan megoldása van, melyre: $f(x_0) = y_0$.

Biz: globális egz. és un. tétel.

$f(x,y) = Axy + b(x)$

$$\|f(x;y) - f(x,z)\| = \|A(x)(y-z)\| \le \underbrace{\|A(x)\|}_{\substack{\text{mátrix norma} \\ \downarrow \\ L(x)}}\ \underbrace{\|y-z\|}_{\text{vektor norma}}$$

Megj.: I. Ha (2) valamely megoldása egy pontban eltűnik ⇒ a megoldás mindenütt eltűnik.

$$\left(\varphi \text{ megoldása } \begin{array}{l} y'(x) = A(x)\,y(x) \\ y(x_0) = 0 \end{array} \Rightarrow \varphi \equiv 0\right)$$

[a másik megoldása az azonosan 0 fgv.

II. • (1) bármely két megoldásának a különbsége (2) megoldása

• (2) megoldásainak a halmaza lineáris tér

III. (2) megoldásainak a halmaza n-dimenziós lineáris tér:

Legyen $x_0 \in J$ tetszőleges, és legyen $\varphi_k : J \to \mathbb{R}^n$ az

$y'(x) = A\,x\,y(x)$; $y(x_0) = e_k$ [e_k: k-dik bázisvektor]

Cauchy-feladatok $(k = 1, \dots, n)$

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ bázis a megoldástérben:

Tfh: $C_1 \dots C_n \in \mathbb{R}$, hogy $C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) = 0$, $x \in J$

$$x = x_0 \Rightarrow 0 = C_1\varphi_1(x_0) + \dots + C_n\varphi_n(x_0) = \underbrace{c_1 e_1 + \dots + c_n e_n}_{\text{lin. függetlenek}} \Rightarrow c_k = 0$$

$(k = 1, \dots, n)$

$\varphi : J \to \mathbb{R}$ (2) megoldása, $x_0 \in J$, $\exists\, c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$:

$\varphi(x_0) = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n = c_1\varphi_1(x_0) + \dots + c_n\varphi_n(x_0) \Rightarrow \varphi - (c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n) : J \to \mathbb{R}^n$

(Ez a fgv (2) megoldása, és amely x_0-ban eltűnik.

$\varphi(x_0) = c_1\varphi_1(x_0) + \dots + c_n\varphi_n(x_0)$)

$\varphi(x) - c_1\varphi_1(x) - \dots - c_n\varphi_n(x) = 0 \quad \forall\, x \in J.$

Def.: (2) megoldásának bármely $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ bázisát (2) alaprendszerének nevezzük.

$\Phi(x) = (\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x))$, $x \in J$ (2) alapmátrixa.

Megj.: $\varphi : J \to \mathbb{R}$ (2) megoldása ⇔, ha $\exists\, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ $x \in J$-re ⇔ $\exists\, c \in \mathbb{R}^n$: $\varphi(x) = \underbrace{\Phi(x)}_{\text{alapmátrix}}\, c$ $\quad x \in J$.

Megj.: I. $\phi : J \to M_n$ (2) alapmátrixa $\Leftrightarrow$, ha ϕ differenciálható $\wedge$

$$\phi'(x) = A(x)\,\phi(x)$$

II. Def.: ! $\varphi_1, \dots, \varphi_n : J \to \mathbb{R}^n \Rightarrow W(x) = \det(\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x))$, $x \in J$
[oszlopok általi mátrix determinánsa]

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ Wronski determinánsa

Tétel: ! $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (2) megoldása. Ha $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ lineárisan függetlenek [= bázist alkotnak] $\Rightarrow W(x) \neq 0 \quad \forall x \in J$.

Ha $\exists x_0 \in J : W(x_0) \neq 0 \Rightarrow \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ lineárisan függetlenek.

III. Tétel: Liouville-formula

$\varphi_1, \dots, \varphi_n : J \to \mathbb{R}^n$ (2) megoldásai W és $x_0 \in J \Rightarrow$

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{spur} A(t)\,dt}, \quad \forall x \in J.$$

[spur: főátlóban álló elemek összege]

IV. Konstansvariálás.

! ϕ (2) egy alapmátrixa és keressük (1) egy φ_p megoldását: $\varphi_p(x) = \phi(x)\,c(x)$ alakban. Ekkor φ_p (1) megoldása $\Leftrightarrow$ (ha behelyettesítve az (1) egyenletben fennáll az ...)

$$\phi'(x)c(x) + \phi(x)c'(x) = A(x)\big(\phi(x)c(x)\big) + b(x) = \text{[a mátrix szorzása asszociatív]}$$

$$= \underbrace{\big(A(x)\phi(x)\big)}_{\phi'(x)} c(x) + b(x) \Leftrightarrow \phi(x) \cdot c'(x) = b(x) \Leftrightarrow c'(x) = \phi(x)^{-1} b(x) \Leftrightarrow c(x) = \int \phi(x)^{-1} b(x)\,dx$$

kiesnek [φ determinánsa az oszlopai W-determinánsa)

$$\boxed{\varphi_p(x) = \phi(x) \int \phi(x)^{-1} b(x)\,dx}$$

V. Tétel: ! ϕ (2) alapmátrixa. Ekkor $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ (1) megoldása $\Leftrightarrow$, ha $\exists\, c \in \mathbb{R}^n$. $\varphi(x) = \phi(x)c + \phi(x) \int \phi(x)^{-1} b(x)\,dx$.

VI. $\varphi(x_0) = y_0$

$\varphi_p(x_0) = \phi(x) \int_{x_0}^{x} \phi(t)^{-1} b(t)\, dt \Rightarrow \varphi_p(x_0) = 0$

$y_0 = \phi(x_0)\, c\, (+0) \Rightarrow c = \phi(x_0)^{-1} y_0$

A Cauchy-feladat megoldása:

$\varphi(x) = \phi(x)\, \phi^{-1}(x_0)\, y_0 + \varphi_p(x)$

Az a fgv, amely az x_0 pontban eltűnik.

7. tétel

Konstans együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszerek.

$A \in M_n$, $b : J \to \mathbb{R}^n$ folytonos

(1) $y'(x) = Ay(x) + b(x)$

(2) $y'(x) = Ay(x)$

[Elegendő (2) megoldásait felírni, mert ha ismert (2) alapmátrixa, konstansvariálással előállítható (1) összes megoldása.]

Megj.: $\sum a_n z^n$

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ abszolút konvergens $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$x \in \mathbb{C} \to$ komplex számok halmazán vizsgálva ezt a hatványsort

(mátrixokat kell írni)

- → lehet hatványozni
- → lehet számmal szorozni
- → lehet véges sokszor összeadni
- → lehet határértéket venni → tagonként!

Def.: $A \in M_n$

$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ saját értéke } A\text{-nak}\}$

[mindig van saját értéke egy mátrixnak a komplex számok testében]

$\sum a_n z^n$ hatványsor konvergenciasugara $r(A) < R \leq +\infty$

R pozitív

↳ 0 v. nagyobb

! $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $|z| < R$

↳ analitikus fgv (ezek hatványsorba fejthetők)

Ekkor $\sum \| a_k A^k \|$ konvergens, így $\sum a_k A^k$ is konvergens (elemenként)

Legyen $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$

Megj.: $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$

$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k A^k$

$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)!} \cdot A^{2k+1}$

Tétel: (2) egy alapmátrixa $\phi(x) = e^{xA}$; $x \in \mathbb{R}$

Tétel: ! $A \in M_n$ [A egy n-szer n-es mátrix]

$$p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ különböző $m_1, \dots, m_r$ multiplicitással

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = n$$

Ekkor $\exists$ olyan H_{ik} [polinomok, amelyek nem függnek f-től]

legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinomok $i = 1, \dots, r$ $(k = 0, \dots, m-1)$

$$f(A) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{m_i - 1} f^{(k)}(\lambda_i) H_{ik}(A) \quad \forall \text{ olyan } f \text{ függvényre},$$

melyre $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ $|z| < R$, ahol $r(A) < R \leq +\infty$.

[sajátérték: karakterisztikus polinomjának a gyökei]

Megj.: $f(\lambda) = e^{x\lambda}$

8. tétel

Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek, a konstans együtthatós eset.

$n \in \mathbb{N}$, $J \subset \mathbb{R}$ [poz. hosszúságú intervalluma a valós számoknak]

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f: J \to \mathbb{R}$ valós értékű folytonos függvények

(1) $y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$ n-edrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja.

(2) $y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$ homogén egyenlet.

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \qquad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}_{n \times 1} \quad x \in J$$

Átírási elv:

(1) ((2)) ekvivalens az

(1') $y'(x) = A(x)y(x) + b(x)$

(2') $y'(x) = A(x)y(x)$ speciális elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel

véve a rájuk vonatkozó Cauchy-feladattal.

$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{n-1} \end{pmatrix}$ n dimenziós mátrix megoldása (1')-nek.

$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : J \to \mathbb{R}$ megoldása (1')-nek $\Leftrightarrow$ φ_1 megoldása (1)-nek

Tétel: (Átírási elv segítségével)

a) $\forall$ (1)-re vonatkozó Cauchy-feladatnak egy $\varphi: J \to \mathbb{R}$ megoldása van. (globális egzisztenciatétel következménye)

b) (1) $\forall$ két megoldásának különbsége a (2) megoldása is. (triviális)

c) (2) teljes megoldásainak halmaza n dimenziós lineáris tér.

Definíció: (2) n darab lineárisan független megoldását (2) alaprendszerének nevezzük.

Megj.: (2) alaprendszere és (2) minden megoldása az alaprendszer elemeinek lineáris kombinációja.

Definíció: ! $f_1 \dots f_n : J \to \mathbb{R}$ függvények n-szer differenciálhatók.

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & & f_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in J \quad [\text{Wronski-det.}]$$

Tétel: (Abikei elv következménye)

$f_1, \dots, f_n : J \to \mathbb{R}$ megoldásai (2)-nek. Ekkor:

a) ha $\{f_1, \dots, f_n\}$ alaprendszere (2)-nek $\Rightarrow W(x) \neq 0 \quad \forall x \in J$.

b) ha $\exists\, x_0 \in J : W(x_0) \neq 0 \Rightarrow \{f_1, \dots, f_n\}$ alaprendszere (2)-nek

c) $\forall\, x_0 \in J$ esetén $W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\,dt}, \quad x \in J$

Konstansvariálás:

Legyen $\{f_1, \dots, f_n\}$ (2) egy alaprendszere. Keressük (1) egy $f_0 : J \to \mathbb{R}$ megoldását $f_0(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) f_k(x)$ $(x \in J)$ alakban, ahol $C_k : J \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. $(k = 1, \dots, n)$

$f_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k f_k \qquad f_0' = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' f_k}_{0} + \sum_{k=1}^{n} C_k f_k'$ [legyen C_k úgy meghatározva, hogy a kifejezés $= 0$.]

$$f_0'' = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' f_k'}_{0} + \sum_{k=1}^{n} C_k f_k''$$

$\vdots$

$$f_0^{(n-2)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' f_k^{(n-3)}}_{0} + \sum_{k=1}^{n} C_k f_k^{(n-2)}$$

$$f_0^{(n-1)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' f_k^{(n-2)}}_{0} + \sum_{k=1}^{n} C_k f_k^{(n-1)}$$

$$f_0^{(n)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' f_k^{(n-1)}}_{=f} + \sum_{k=1}^{n} C_k f_k^{(n)}$$

[↳ inhomogenitást adó fgv.]

Meg lehet-e így változtatni a $C_1, \dots, C_n$ függvényeket? IGEN!

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) f_k(x) = 0 \\ &\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) f_k'(x) = 0 \qquad (x \in J) \\ &\qquad \vdots \\ &\sum_{k=1}^{n} C_k'(x) f_k^{(n-1)}(x) = f(x) \end{aligned}\right\} \text{ lineáris formájú egyenletrendszer}$$

[Egyetlen megoldása van minden rögzített C_k mellett.]

$C_k'(x) = \dfrac{W_k(x)}{W(x)}$ $(x \in J)$, ahol $W_k(x)$ az a determináns, amely $W(x)$-ből úgy adódik, hogy annak a k. oszlopát a $(0, \dots, 0, f(x))$ oszlopra cseréljük. [konstansok oszlopa]

$$C_k(x) = \int \frac{W_k(x)}{W(x)}\,dx \qquad (k = 1, \dots, n)$$

Ha a C_k függvényeket így választjuk, $f_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k f_k$ megoldása-e (1)-nek? IGEN!

$$f_0^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i f_0^{(i)} = f + \sum_{k=1}^{n} C_k f_k^{(n)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \sum_{k=1}^{n} C_k f_k^{(i)}}_{\sum_{k=1}^{n} C_k \sum_{i=0}^{n-1} a_i f_k^{(i)}} = f + \sum_{k=1}^{n} C_k \left[f_k^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i f_k^{(i)} \right] = f.$$

Tétel: Legyen $\{f_1, \dots, f_n\}$ (2) egy alaprendszere. Ekkor $f: J \to \mathbb{R}$ (1) megoldása $\Leftrightarrow$, ha $\exists\, C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$, úgy hogy

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k f_k(x) + f_0(x) \quad (x \in J), \text{ ahol } f_0(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \int \frac{W_k(x)}{W(x)}\,dx \quad (x \in J)$$

Alaprendszer a konstans együtthatós esetben:

! $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

(3) $y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$ konstansegyütthatós differenciálegyenlet.

$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ a (3) egyenlet karakterisztikus egyenlete. Legyenek ennek valós gyökei $\lambda_1,\dots,\lambda_r$; $m_1,\dots,m_r$ multiplicitással és komplex, nem valós gyökei $\alpha_1+i\beta_1,\dots\ \alpha_s+i\beta_s$; $n_1,\dots,n_s$ multiplicitással.

$(\lambda_1,\dots,\lambda_r,\ \alpha_1,\dots,\alpha_s,\ \beta_1,\dots\beta_s \in \mathbb{R}$, +fh: $\beta_1>0,\dots,\beta_s>0)$

$n = m_1+\dots+m_r + 2(n_1+\dots+n_s)$

Ekkor (3) egy alaprendszere:

$$\left.\begin{array}{ll}
e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \dots,\ x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} & \lambda_1 \\
\vdots & \vdots \\
e^{\lambda_r x},\ xe^{\lambda_r x},\ \dots,\ x^{m_r-1}e^{\lambda_r x} & \lambda_r \\
e^{\alpha_1 x}\cdot\cos\beta_1 x,\ xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ \dots,\ x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x & \alpha_1+i\beta_1 \\
e^{\alpha_1 x}\cdot\sin\beta_1 x,\ xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ \dots,\ x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x & \vdots \\
\vdots & \\
e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x,\ xe^{\alpha_s x}\cos\beta_s x,\ \dots,\ x^{m_s-1}e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x & \alpha_s+i\beta_s \\
e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x,\ xe^{\alpha_s x}\sin\beta_s x,\ \dots,\ x^{m_s-1}e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x & \vdots
\end{array}\right\}\ \text{gyökökhöz tartozóak}$$

$y(x)\ x^p e^{\lambda x}$ $\qquad$ p nem egész

λ: komplex szám

→ megoldás [egymástól függetlenek]

9. tétel

A variációszámítás elemei, az Euler-Lagrange differenciálegyenlet.

Néhány klasszikus probléma:

I. A legrövidebb út problémája:

$A, B \in \mathbb{R}^n$

feladat: Keresendő a két pontot összekötő görbék közül a legrövidebb

(amely ívhossza a legkisebb)

görbe: $x: [\alpha;\beta] \to \mathbb{R}^n$ $\underbrace{x(\alpha)=A,\ x(\beta)}_{\text{összeköti a két pontot}}=B$

$\underbrace{f(x)=\int_\alpha^\beta \|x'\|}_{\text{ívhossz}}$ [Ennek a fgv-nek a változója nem szám, hanem fgv.]

(Többváltozós fgv-ek szélsőértékénél parciális deriváltat használunk)

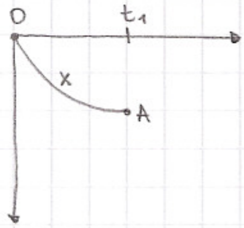
Adva van egy fgv: $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g(x(t))=0,\ t\in[\alpha;\beta]$ ez is teljesül

II. A legrövidebb idő:

brachistochron

Melyik az a görbe, amelyen ebből a pontból elindulva a legrövidebb idő alatt lecsúszik, úgy, hogy csak a nehézségi gyorsulás hat rá.



$x: [0;t_1] \to \mathbb{R}$ [fgv]

idő, ami alatt O A-ba lecsúszik adott körülmények között: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{t_1}\sqrt{\frac{1+x'^2}{x}}$

Keressük azt az x-et, ahol a legkisebb értéket veszi fel.

$\frac{1+x'^2}{x} \to$ improprius integrál

Megoldás: ciklois ív

III. Izoperimetrikus probléma:

2D: adott kerületű síkidomok közül melyik a nagyobb területű?

3D: -"- felszínű testek -"- térfogatú?

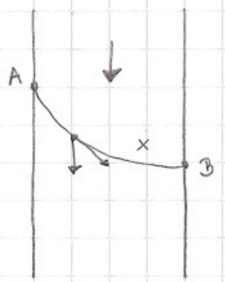
2D: válasz: KÖR.

$x:[\alpha;\beta]\to\mathbb{R}^2$ [2 koordinátája van]

$e=\int_\alpha^\beta \|x'\|$ $f(x)=\int_D 1$ [a síkidom felett integráljuk az azonosan 1 fgv-t.]

$f(x)=\int_D 1 \overset{Green}{=} \int_{\partial D} x_1\,dx_2 \overset{Riemann}{=} \int_\alpha^\beta x_1 x_2'$ [2 koordinátájú görbétől függ]

IV. Hajózási problémák:

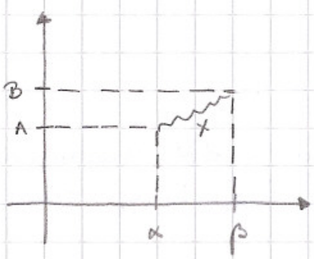


Milyen úton kell a hajónak haladni A-ból B-be, hogy a legrövidebb idő alatt odaérjen?

2D-s probléma

3D-s: tengeralattjárók, repülők

V. Euler:



Melyik az a függvény a két pont között, amelyet x tengely körül megforgatva a keletkezett forgástest felszíne a legkisebb?

$f(x)=2\pi\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+x'^2}$ $x(\alpha)=A$; $x(\beta)=B$.

Megoldás: cos hiperbolikus fgv. egy transzformáltja

Definíció: $(X, \| \ \|)$ normált tér, ha $\underbrace{X \text{ (valós) lineáris tér}}$.

[lin. tér a valós számok teste felett]

$\| \ \| : X \to \mathbb{R}$

$\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$, $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $x \in X$ (abszolút homogén)

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$

lin. normált tér v. lineáris tér.

Megj.: $d(x;y) = \|x-y\| \quad x, y \in X$

keressük a függvények szélsőérték helyét.

Def.: Legyen $D \subset X$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $D \neq 0$

Az f függvények x_0 pontban helyi minimuma ill. maximuma

[min] van, ha $\exists \ r > 0$, $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in D$, $\|x_0 - x\| < r$

[x_0 kp-ú r sugarú gömb]

[max] ha $\exists \ r > 0$, $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D$, $\|x_0 - x\| < r$.

$a \in X$ megengedett irány $x \in D$-ben f számára, ha $\exists \ r > 0$:

$x + \lambda a \in D$, ha $|\lambda| < r$ és $\exists$ valós $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x+\lambda a) - f(x)}{\lambda} = \partial_a f(x)$

[f fgv a irány menti deriváltja x pontban]

Mj.: $f_a(\lambda) = f(x + \lambda a)$, $\lambda \in]-r; r[$,

$\dfrac{f_a(\lambda) - f_a(0)}{\lambda - 0} \to f_a'(0) = \partial_a f(x)$

Mj.: Ha f-nek x-ben helyi minimuma van $\to$ f_a-nak 0-ban szintén helyi minimuma van. (min. helyett max-ot is lehet mondani.)

Tétel: Ha f-nek x-ben helyi szélsőértéke van $\Rightarrow \partial_a f(x) = 0 \quad \forall a \in X$: x-ben megengedett irány esetén.

Tétel: Legyen $A = \{ a \in X : a(\alpha) = a(\beta) = 0 \}$ [a végpontban eltűnnek]

Ekkor A minden eleme megengedett irány bármely $x \in D$ esetén f számára és $\partial_a f(x) = \int_\alpha^\beta \big(\partial_2 F(t, x(t), x'(t))\, a(t) +$

$+ \partial_3 F(t, x(t), x'(t))\, a'(t) \big)\, dt \quad \forall a \in A$.

Köv.: Ha f-nek x-ben helyi szélsőértéke van $\Rightarrow$

$$\int_\alpha^\beta [\partial_2 F(t, x(t), x'(t))a(t) + \partial_3 F(t, x(t), x'(t))\, a'(t)]\, dt = 0 \quad \forall a \in A.$$

Tétel: (du Bois Reymon)

$u, v : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ folyt. és $\int_\alpha^\beta (ua + va') = 0 \quad \forall a \in A \Rightarrow v$ folytonosan differenciálható és $v' = u$.

Köv.: Ha f-nek $x \in D$-ben helyi szélsőértéke van $\Rightarrow t \to \partial_3 F(t, x(t), x'(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ folyt. diff-ható és $\frac{d}{dt} \partial_3 F(t, x(t), x'(t)) = \partial_2 F(t, x(t), x'(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$.

*

Euler-Lagrange