.6.
-20°

Gráfelmélet alkalmazásai

1. óra

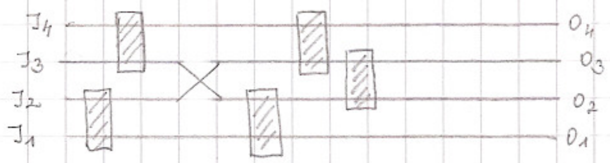
- előadás + gyakorlat
- írásbeli vizsga

Gauss: a korában abban vált híressé, hogy a csillagok állását ki tudta számolni.

Tételsor:

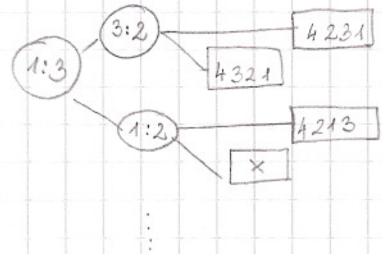
1) Gráfok megadása él listával, mátrixxal, ritka ill. sűrű-gráf fogalma, rendelkező hálózatok, bitonrendezés
2) Gráfok szélességi bejárása, szélességi kereső fa, komponensek meghatározása, Dijkstra algoritmusa.
3) Élsúlyozott gráfok, negatív körök, gráfok mélységi bejárása, Floyd-Warshall algoritmus.
4) Euler-vonal meghatározása, Fleury algoritmusa, utazó ügynök problémája, közelítő algoritmusok, P és NP fogalma.
5) Gráfok csúcsainak színezése, kromatikus szám, „klikk szám", perfekt szám, hypergráf színezése
6) Kromatikus polinom, kromatikus redukció tétele, mohó színezési algoritmus, reguláris gráfok.
7) Hálózat, folyam fogalma, minimális vágás, maximális folyam, Ford-Fulkerson gráfok, egészségi feltétel.
8) Gráfok faktorai, páros gráfok, párosítás tetszőleges gráfokban. Alternáló utak módszere.
9) Gráfok vázgyarázsai, minimális súlyú feszítőfák. Kruskal és Prim algoritmusa.
10) Ramsey számok, véletlen gráfok.

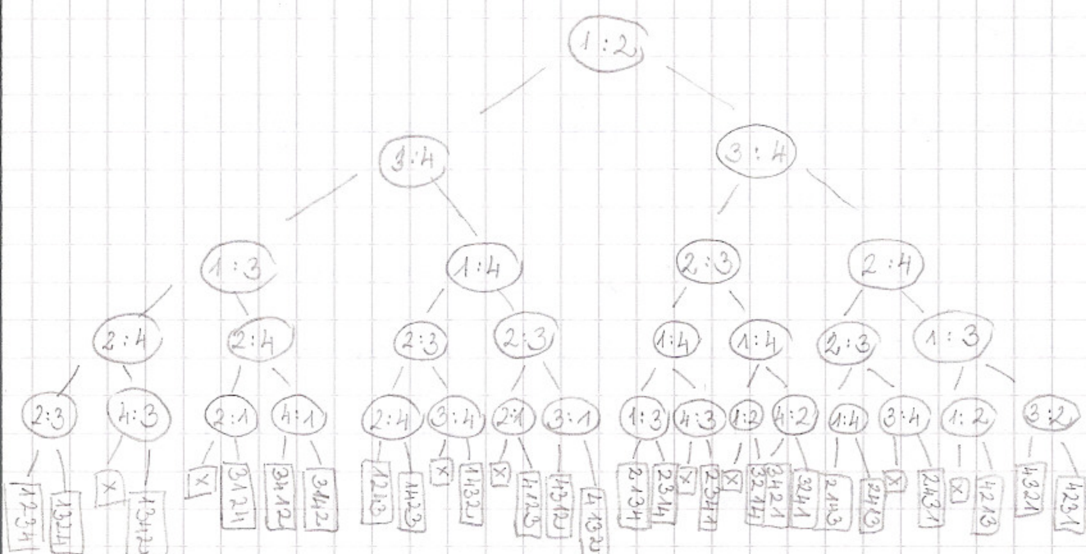
Rendező hálózatok:



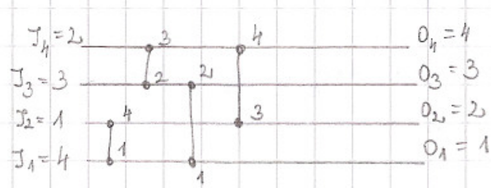
$H_{1,4}$ hálózat

Feledékeny összehasonlító fa:





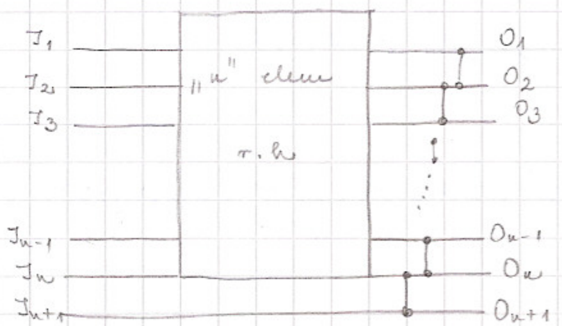
Az $I_1; I_2; I_3; I_4$ bemenő adatokat nagyság szerint rendezi. Az $O_1; O_2; O_3; O_4$ kimenő adatokra már teljesül, hogy $O_1 \le O_2 \le O_3 \le O_4$



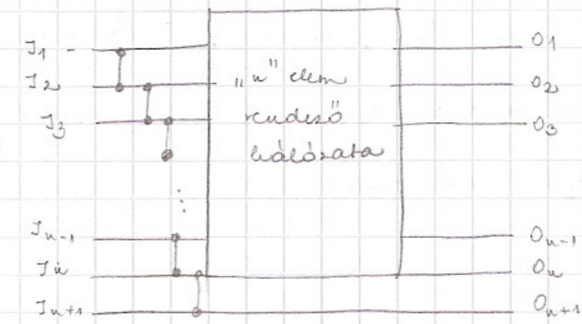
$H_{1,4}$ hálózat rendezi a 4, 1, 3, 2 sorozatot.

pl.: a felsőnek soros, a másiknak párhuzamos feldolgozású

N rendezőből n+1 rendező előállítása



,



Tétel: Nulla - egy szabály

Ha az „n" bemenetű r. h. mind a 2^n számú 0-ból és 1-ből álló sorozatot növekvően rendezi, akkor az „n" számú bármely sorozatát is növekvően rendezi.

(m, n) összefésülő hálózat, $m+n$ elemet rendezünk, feltéve, hogy az első m és az utolsó n már rendezett.

α. Ha $m=0$ v. $n=0$ a háló üres. Ha $m=n=1 \Rightarrow$ a r.h. egy összehasonlító egység.

β: Ha $m \cdot n > 1 \Rightarrow$ legyen $(x_1, x_2 \dots x_m)$ és $(y_1, y_2 \dots y_n)$. készítsük el az $(x_1, x_3, \dots x_{2\lceil \frac{m}{2} \rceil -1})$
felső egészrész.
és az $(y_1, y_3 \dots y_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil -1})$ páratlan sorozatokból $x_{2\cdot\lceil \frac{m}{2} \rceil -1}$

Biz:

Vegyük észre, hogy ha $f(x)$ mon növ fgv (ha $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$) és az „n" rendező hálózatát $(x_1, x_2, \dots, x_n)$-t $(y_1, y_2, \dots y_n)$-be rendezi akkor $(f(x_1), f(x_2) \dots, f(x_n))$-t az $(f(y_1), f(y_2), \dots f(y_n))$-be rendezi.

Biz. indirekt: Tfh valamely „x"-re $O_i > O_{i+1}$, legyen most f az a mon. növ. fgv, amelyre $f(x)=0$, ha $x < O_i$ és $f(x)=1$, ha $x \ge O_i$. Ekkor az $(f(x_1), f(x_2), \dots f(x_n))$ sorozat 0-kból és 1-ekből áll és a hálózat nem rendezi, ami ellentmond a feltételnek.

pl:

2,16 $\quad Z \le x \quad$ felső egészrész
2: - max Z $\quad$ min n

2,16 : f egész : 3
alsó egész : 2
közel legközelebbi egész : 2

az $(v_1, v_2, \ldots v_{\lceil \frac{m}{2}\rceil + \lceil \frac{n}{2}\rceil})$ rendezett sorozata

a páros $(x_2, x_4, \ldots, x_{2\cdot\lceil\frac{m}{2}\rceil})$ és $(y_2, y_4, \ldots y_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor})$ sorozatokból a

rendezett $(w_1, w_2, \ldots, w_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ sorozatot.

Majd hasonlítsa össze az $w_1 : v_2$, $w_2 : v_3$; $w_3 : v_4$; … $w_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} : v^*$

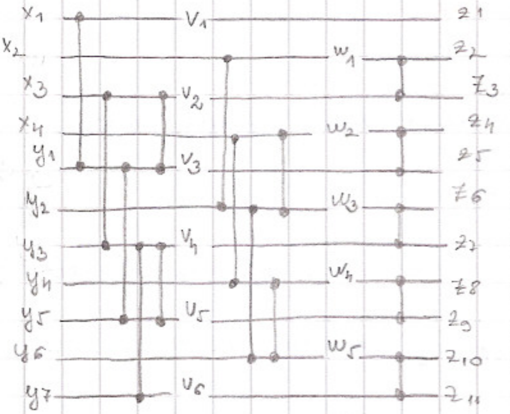
elemeket és cserélje meg az szükséges.

Ekkor az eredmény már rendezve van.

$(v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots)$

Batcher-féle (m, n) összefésülő hálózatnak is mondják az előbbit.

Az 1. lépésnél szükséges összehasonlító egységek száma $\lfloor (m+n-1)/2 \rfloor$



Jelölje az „n" bemenetű cserélve-összefésülő hálózatban lévő összehasonlító egységek számát $c(n)$, $s(n)$ pedig jelölje az „n" bemenetű r. h-hoz minimálisan szükséges legkevesebb összehasonlító egységek számát.

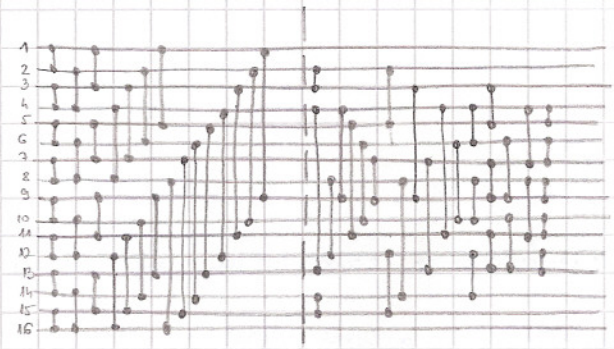
$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	10	9	11	12	13	14	15	16
$c(n) =$	0	1	3	5	9	12	16	19	31	26	37	41	48	53	59	63
$s(n) \leq t =$	0	1	3	5	9	12	16	19	29	25	35	34	46	51	56	61

$n \to \infty$ a legkevesebb összehasonlító elemeket tartalmazó hálózatot

$[\,1/4 \cdot n(\log n)^2 - \frac{371}{960} \cdot n(\log n) + O(n)\,]$ Drysdale R. L. konstruálta 1973-ban.

$$\boxed{e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \to \text{Taylor-sor}}$$

Hálózatok minimális idővel



H. W. Green (1969-...)

$n=16$ 60 összehasonlító egység ; $t=10$ idő egység

$n=16$; 61   -"-   ; $t=9$ időegység

G. Shapiro 1969 $n=16$ $S(n) \leq k = 62$

* Ajtai Miklós, Komlós János, Szemerédi Endre, „Sorting in $c \cdot \log n$ parallel steps" Combinatorica 3.(1) 1983

Richard Cole

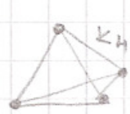
* A „c" konstans nagyon nagy, gyakorlatilag nem használható.

Feladatok:

1) (1) n^{n-2}

izomorf

$e^n = \frac{n^{n-2}}{n!}$ kombinatorikai robbanás

2) (2) 2D:  K_3 3D:  K_4 ... K_5

K_n - n csúcsú teljes gráf

$n-1$ hosszúságú irányított út

3)
(i) $K_{4,4,4,4,4}$ $\chi(K_4) = 5$

4)
(n) $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-1}$

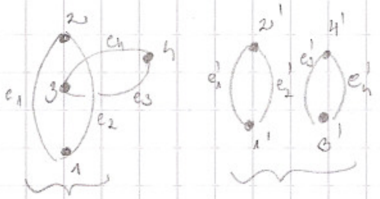
$x^2 = 2x - 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$

5)
(n) $n(2010, 2010) \neq 2009$

$n(k, k) > c\, 2^{\frac{k}{c}}$

6) (i) térképszínezési probléma
Kempe → angol matematikus (hibás volt a bizonyítása öt esetén
„4" szín sejtés
Az 1970-ben gép-pel bizonyították, h a tétel igaz

7)
$(\underbrace{3,3,3,3}, 3,3,3,3)$



topológiailag nem ekvivalensek, de izomorfak.

$G_1(E_1, f_1, V_1)$ $G_2(E_2, f_2, V_2)$

élei illeszkedési csúcsok
leképezése

$G_1 \simeq G_2$ $V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2$ $E_1 \xrightarrow{\beta} E_2$

$E_1 \xrightarrow{f_1} V_1 \times V_2$ $\forall e \in E$ $f_1(e) = (v_i, v_j)$ $v_i, v_j \in V_1$

$E_2 \xrightarrow{f_2} V_2 \times V_2$ $\forall e \in E$ $f_2(e') = (v_i', v_j')$ $v_i', v_j' \in V_2$

$E \cap V = \emptyset$, $|E|, |V| < \infty$

$f_2(\beta(e)) = (\alpha(v_i), \alpha(v_j))$

8.) Euler-gráf: összefüggő és
(i)

9.) (n)

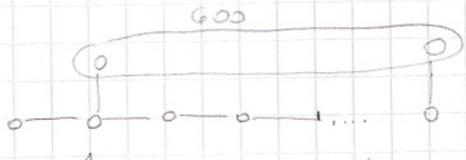
10) D.: teljesen particionált

11) Hamilton-kör

12)
(i)

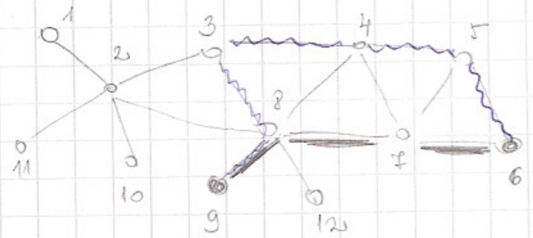
13) $600 + 806 + 602 = 2008.$

(i)



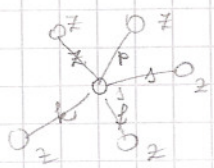
még 200 2-odfokút kell közé illeszteni

14) fa átmérője
(i)



Veszünk egy utat, melynek a hossza 1222.

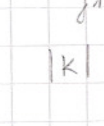
15) kromatikus szám – csúcspontokat hány színnel tudjuk színezni
(i) –"– index – éleket –"–



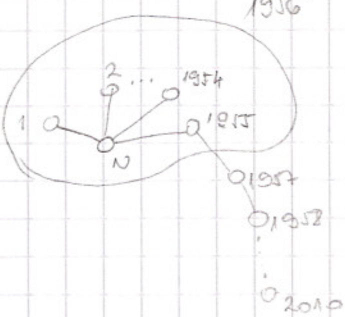
16)
(i) 17 kritikus-gráf
17 a kromatikus szám, és ha egyet eltörlök, a kromatikus szám 16 v. attól kevesebb lesz.

17.)
(h) G_1 G_2 $\frac{n(n-1)}{2} = 2k$

$|K| = |F|$ PÁROSNAK KELL LENNI!



18) (d)

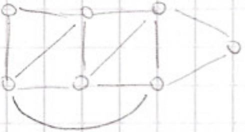


19) (b)

$$\frac{100 \cdot 94}{2} = 50 \cdot 94 \approx 5000$$

$$2010 + 2009 = 4019$$

20) (c)



7 tartomány

11.7. 17^{00}-20^{00} K3

Gráfelmélet alkalmazásai

1, tétel → CD-n
2. tétel → Dijkstra → CD-n
7. tétel → hálózati folyamok szöveg.doc
hálózatokbvb.pdf

GRÁFELMÉLET JEGYZET a honlapon lesz.

ZH: IV. 18.-án (valószínű)
1,2 írásbeli időp. ; 2,3 szóbeli időpont

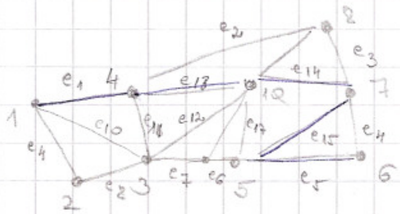
Összefüggőség:

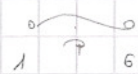
Szeparáló él, halmazok, vágások – INTERNETEN

A $G = (E, f, V)$ egyszerű összefüggő gráf éleinek F részhalmazát szeparáló él halmaznak mondjuk, ha a $G_1 = (E - F, f, V)$ gráf nem összefüggő.

A $G = (E, f, V)$ egyszerű összefüggő gráf csúcsainak V' részhalmazát szeparáló csúcspont halmaznak mondjuk, ha $G = (E, f, V - V')$ gráf nem összefüggő

$f(e) = (u, v)$





$(1;4)\ (4;10);\ (10;7);\ (7;5);\ (5;6),$
$1, e_1, 4, e_{13}, 10, e_{14}, 7, e_{15}, 5, e_5$
} meg kell adni az utat, hogy nyomonkövethető legyen

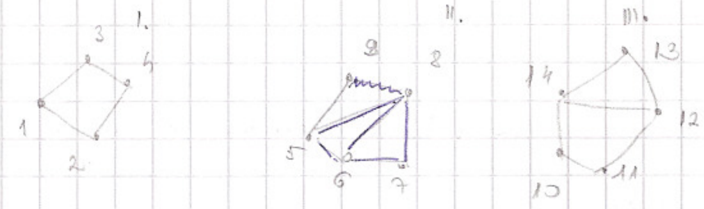
Összefüggő gráf: ha ∀ két pont között vezet út.

Gráf komponenseinek a fogalma:

D.: Ha adott G gráf, és ennek egy G' részgráfja

1, G összefüggő

2) ∄ G'' v. G $G' \subset G''$, G'' összefüggő

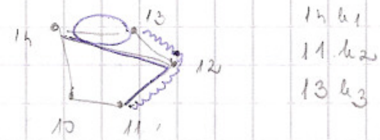


Def.: ! G gráf $G(E, \varphi, V)$

definiálok a csúcspontjain egy binér relációt $v_i, v_j \in V$ $v_i \overset{?}{\sim} v_j$

- Ez a reláció ekvivalenciareláció

[$S' \subset H \times H$ $(h_1, h_2) \in S$ $h_1 \sim h_2$
- reflexív → bármely rendezett pár benne van ✓
- szimmetrikus → $(h_1, h_2) \Leftrightarrow (h_2, h_1)$
- tranzitivitás → $(h_1, h_2) \wedge (h_2, h_3) \Rightarrow (h_1, h_3)$ ⇒ nem igaz!



14 h_1
11 h_2
13 h_3

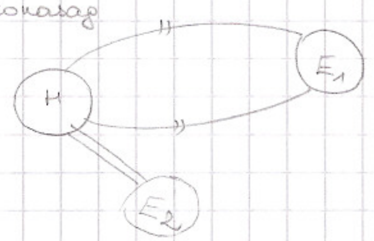
12

14 - (12 - ~~11~~ - 12) - 13

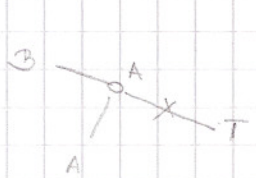
↳ kivágom az ismétlődő részeket

Ekvivalenciareláció egy halmazon mindig létrehoz egy osztályozást.

Pl.: katonaság



Pl.: Angol tanulás



A $G = (E, \varphi, V)$ egyszerű összefüggő gráf éleinek F részhalmazát W, W'-re vonatkozólag szétvágó él halmaznak mondjuk, ha F elemei W pontjait kötötték össze W' pontjaival

Feladatok:

1) Hány élet hagyjak el, h a gráf ne legyen összefüggő

$\varepsilon(G_1) = 2$ $\chi(G_1) = 1$

$\varepsilon(G_2) = 2$ $\chi(G_2) = 2$

$\varepsilon(G_3) = 2$ $\chi(G_3) = 2$

$\varepsilon(G_4) = 4$ $\chi(G_4) = 4$

A G gráf F separáló él halmazát vágásnak nevezzük, ha F-nek nincs olyan valódi F' részhalmaza, amely szintén G separáló él volna.

I. A G összefüggő gráf $\forall$ feszítőfájának van legalább egy közös éle G bármely szétvágó halmazával.

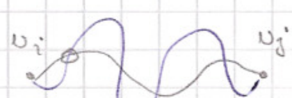
A G gráf T feszítőfája minimálisan összefüggő részgráfja G-nek.

$T_{f,g} = G' \subset G(E, \varphi, V)$

$V(T_{f,g}) = V$ és fa.

Fa: összefüggő és körmentes gráf

Be kell látni, h két pont között egy út van.
Tf az ellenkezőjét



Elindulok a kéken, hol van az első közös ponttal. Ha van $\Rightarrow \exists$ benne kör ↯ azzal, h a fa KÖRMENTES!

Él szerinti összefüggőség, csúcsok szerinti összefüggőség

A G gráf él szerinti összefüggősége $\varepsilon(G)$ az a legkisebb szám, amelyre teljesül, h $\exists$ G-nek $\varepsilon(G)$ db olyan éle, amelyeket törölve G-ből a megmaradt gráf már nem összefüggő.

Ha G egyszerű és összefüggő $\Rightarrow \varepsilon(G) \leq \delta(G)$

A G egyszerű összefüggő gráfnak csúcspont szerinti összefüggőségi száma az a legkisebb $\chi(G)$ szám, amelyre teljesül, h $\exists$ G-nek $\chi(G)$ db olyan csúcspontja, amelyeket törölve G-ből már nem összefüggő gráfot kapunk.

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d(v) \rightarrow$$ és v csúcs fokszáma
ahány él arra a csúcspontja illeszkedik.

Egyszerű gráf: nincs benne hurok v. többszörös él

Ha a $G(E, f, V)$ gráf egyszerű és összefüggő $\Rightarrow \chi(G) \leq \delta(G)$

Ha a $G(E, f, V)$ gráf egyszerű, $|E| = m$, $|V| = n$ és összefüggő $\Rightarrow$
$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$

Ha a $G = (E, f, V)$ gráf egyszerű és összefüggő $\Rightarrow \chi(G) \leq \varepsilon(G) \leq \delta(G)$
↳ kappa (κ)

Gráfelm.
III. 7.

2. Legrövidebb utak

Legyen adott a $G(E, \varphi, V)$ irányított gráf, s legyen adott az élein értelmezett w súly fgv. $E \xrightarrow{w} R$; $w(e) \in R$

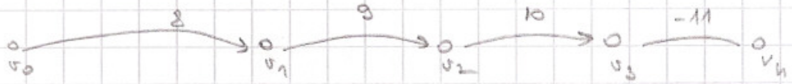
Tegyük fel, hogy G-ben nem létezik negatív c kör. A c kör negatív, ha $w(c) = \sum_{e \in c} w(e)$ negatív.

Az l út itt olyan élsorozat, melyre teljesül, hogy $e_1(v_0, v_1)$; … $e_k = (v_{k-1}, v_k)$. Az l út egyszerű, ha a v_i-k mind különbözők.

Def.: A G gráf u, v pontját összekötő l út a legrövidebb út, ha bármely u, v-t összekötő l' útra teljesül, hogy $w(l') \geq w(l)$.

$w(l) = \sum_{e \in l} w(e)$

Mj.: A negatív élsúlyok miatt, az l legrövidebb út l' rész útja lehet hosszabb l'-nél



$d(v\ ,v\ ) = 8+9+10+(-11) = 16$ $d(v_0, v_3) = 27$

T.: Az $l(v_0, v_1, \dots, v_i, \dots, v_j \dots v_k)$ legrövidebb út $l'(v_i, v_{i+1}, \dots$ $\dots v_{j-1}, v_j)$ rész útja is legrövidebb út.

Biz.: Indirekt

Tegyük fel, h.: $w(l') > w(l_1)$, ahol v_i, v_j-t összekötő legrövidebb út, de ekkor $l = d(v_0, v_i) + d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) > d(v_0, v_i) + w(l) +$ $+ d(v_j, v_k)$

és ez ellent mond l minimalitásának

Áll.: Tfh s-ből v-be tartó p legrövidebb út felbontható

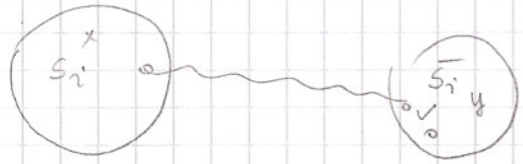
$s \xrightarrow{p'} u \xrightarrow{e} v$ módon valamely p' részút és u csúccsal,

ekkor $d(s,v) = d(s,u) + w(e)$

Biz.: $d(s,v) = w(p) = w(p') + w(e) = d(s,u) + w(e)$

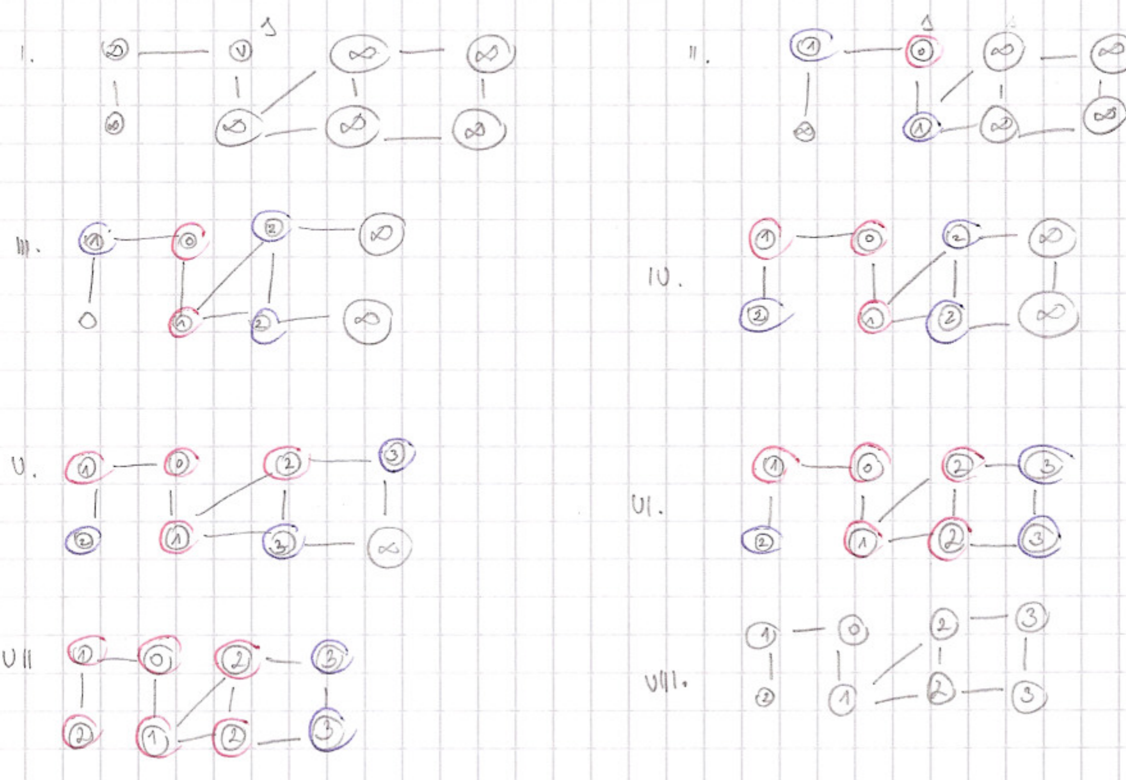
Lemma: Ha $d(s,v)$ jelöli az s,v csúcspontok közötti legrövidebb út hosszát $\Rightarrow \forall\ e = (u,v)$ élre teljesül, h $d(s,v) = d(s,u) + w(u,v)$

Áll.: Az s pontból induló szélességi bejárás megadja egy, az s,v közötti legrövidebb utat, ha $\forall$ él hossza (súlya) egy.



min $d(x,y)$

$x \in S_i$
$y \in \overline{S_i}$



Egy pontból induló legrövidebb utak

Dijkstra algoritmusa (E. W. Dijkstra, A note on Two Problems ...)

1959.

Itt feltesszük, h az élsúlyok nem negatívok

! $s \in S$ és $\bar{S}$ a komplementere $\bar{S} = V - S$. Legyen p az s-ből

$\bar{S}$ vezető legrövidebb út. A p hosszát mondjuk s és $\bar{S}$ távolságának:

$d(s, \bar{S})$

Ha $p = (s = v_0, v_1, \dots v_i, \dots, v_{k-1} = u, v) \Rightarrow d(s, \bar{S}) = d(s, u) + w(u, v)$ (1)

A (1) formula alapján $d(s, \bar{S}) = \min_{\substack{u \in S' \\ v \in \bar{S}}} \{ d(s, u) + w(u, v) \}$

Ha $v \in \bar{S}$ és $d(s, \bar{S}) = d(s, u) +$

$+ w(u, v)$ valamely $u \in S'$-re akkor $d(s, v) = d(s, \bar{S})$

Dijkstra algoritmusa V részhalmazainak olyan $S'_p = \{s\}$,

$S_1, S_2, \dots, S_i \dots$ sorozatát konstruálja meg, amelyre teljesülnek a következők.

(i) ha az $s = u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ V-nek olyan csúcsai, hogy

$d(s, u_1) \leq d(s, u_2) \leq d(s, u_3) \leq \dots \leq d(s, u_{n-1}) \Rightarrow S_i = \{s, u_1, \dots, u_i\}$

$i > 0$

(ii) Amikor az S'_i már meghatározott az

$d(s, u_1), d(s, u_2), \dots, d(s, u_i)$ távolságok már meghatározottak

Ha az S_i már definiált, akkor $d(s, u_{i+1}) = d(s, \bar{S}_i)$ azaz

S_{i+1} meghatározható az $d(s, S_{i+1})$ kiszámításával.

Dijkstra címkézési eljárása

1) Legyen $l_0(s) = 0$ és $l_0(v) = \infty$ $v \neq s$ $[S_0 = \{s\}, \bar{S}_0 = V]$

2) $i \geq 1 \Rightarrow l_i(v) = d(s,v)$ ha $\forall v \in S'_{i-1}$

$$l_i(v) = \min_{u \in S'_{i-1}} \{d(s,u) + w(u,v)\}, \text{ ha } \forall v \in \bar{S}_{i-1}$$

ekkor az u_i-re teljesül, hogy

$$d(s,u_i) = d(s, \bar{S}_{i-1}) = \min_{v \in \bar{S}_{i-1}} \{l_i(v)\}$$

Az $l_{i+1}(v)$-t l_i-ből a következő módon számoljuk ki.

1) ha $\forall v \in S_i' \Rightarrow l_{i+1}(v) = l_i(v) = d(s,v)$

2) ha $\forall v \in S_i' \Rightarrow l_{i+1}(v) = \min_{u \in S_i';\, v \in \bar{S}_i} \{d(s,u) + w(u,v)\} =$

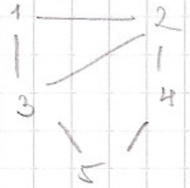
$$= \min_{v \in \bar{S}_i} \{l_i(v);\ d(s,u_i) + w(u_i,v)\} = \min_{v \in S_i} \{l_i(v),\ l_i(u_i) + w(u,v)\}$$

s ekkor u_{i+1}-t úgy választjuk, hogy $d(s,u_{i+1}) = d(s, \bar{S}_i) = \min_{v \in \bar{S}_i} (l_{i+1}(v)$

Vegyük észre, hogy az u_i-k nem változnak az S_i meghatározása után.

Dijkstra algoritmusának a leírására használjuk egy LABEL elnevezésű tömböt, amelyben a csúcsok aktuális címkéit az $l_i(v)$-t tároljuk. A PERM tömböt azon csúcsok jelzésére használjuk, amelyek címkéje állandóvá vált ekkor PERM(v) = 1. A startnál először PERM(s) = 1 és PERM(v) = 0. $\forall v = 1$-re.

A PRED tömbnél egy „rekordja" amelyik azt a csúcsot tartalmazza, amelyikből v állandó címkéjűvé vált. (v előzőjét, ősét)



1,2 (π) 3 ($\sqrt{2}$)
2, 1, 3, 4
3, 1, 2, 5
4, 2, 5
5, 3, 4

A v, PRED(v), PRED(PRED(v)) ... kijelöl egy s–v legrövidebb utat. (v szülője, legrövidebb utat látja)

A legrövidebb utat Dijkstra algoritmusa S_1 (inicializálás, kezdeti értékadás)

LABEL(s) = 0, PREM(s) = 1, PRED(s) = s és $\forall\ v \neq s \Rightarrow$

LABEL(v) = ∞, PREM(v) = 0, és PRED(v) = v

S_2 $i = 0$ és $u = s$ (u a legutolsó állandó címkéjű csúcs, per pillanat s)

S_3 = (A LABEL(v) kiszámítása és a PRED tömbbe való bejegyzés) $\forall$ v-re, amely még nem állandó címkéjű.

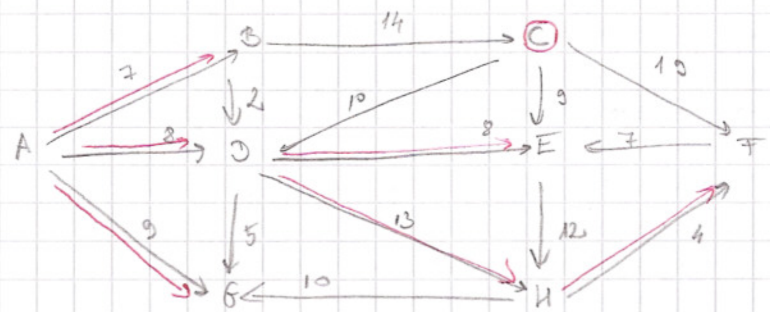
1) $M := \min\{LABEL(v), LABEL(u) + w(u,v)\}$

2) ha $M < LABEL(v) \Rightarrow LABEL(v) = M$ és $PRED(v) = u$

S_4 (az u_i meghatározása) Keressük meg a még nem állandó címkéjű csúcsok között a legkisebb címkéjű w csúcsot és PREM(w) = 1 és $u := w$ ($u_i = w$)

S_5 Ha $i < n-1 \Rightarrow$ GOTO (ugrás) S_3-ra egyébként STOP.

Pl.: A LABEL tömbben körrel jelöltük a már állandóvá vált címkéket és * az u_i-ket.



lépés	A	B	C	D	E	F	G	H		
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A	A
1	0	7	∞	8	∞	∞	6*	∞	A	B
2	0	7*	∞	8	∞	∞	6	∞	A	C
3	0	7	∞	8*	∞	∞	6	∞	A	D
4	0	7	∞	8	16*	∞	6	21	A	E
5	0	7	∞	8	16	∞	6	21*	A	F
6	0	7	∞	8	16	25*	6	21	A	G
7	0	7	∞*	8	16	25	6	21	H	H

Az $s_0 = A$ gyökerű legrövidebb utak fája

Adott csúcspontból induló legrövidebb utak, ha az irányított élsúlyozott $G(E, \varphi, V)$ gráfnak negatív súlyú élei is lehetnek.

Bellman - Ford - Moore algoritmusa

Legyen $G(E, \varphi, V)$ irányított élsúlyozott gráf $A(a_{ij})$ adjacencia mátrixával adott. Itt $a_{ij} = 0$, ha $i = j$ és $a_{ij} = w(\varphi(v_i, v_j))$, ha $\exists\, e = \varphi(v_i, v_j) \in E$ a többi i, j párra $\infty = a_{ij}$ $(v) = n$ és $v = \{1, 2 \ldots n\}$ és $s := 1$.

A $T_{n-1,n}$ mátrix t_{ij} $(1 \leq i \leq n-1;\ 1 \leq j \leq n)$ eleme a legrövidebb olyan $1 \to j$ utak hossza, amelyek legfeljebb „i" db élből állnak, ekkor $T(n-1, j)$ $j = 1, 2 \ldots n$ a $d(1,1), d(1,2) \ldots d(1,n)$ legrövidebb utak hosszait adja

1) Legyen $T[1, j] = a_{1j}$

2) Ha a T mátrix $1, 2, \ldots, i$ sora adott az $i+1$ sor j elemét a $\min(t_{i,j}, \min(t_{i,k} + a_{kj})) = t_{i+1,j}$ formulával számoljuk

Biz: ① Ha az útnak $i+1$-nél kevesebb éle van ⇒ annak a hossza szerepel $t_{i,j}$-ben

② A p út pontosan $i+1$ élből áll. Legyen p utolsó előtti pontja ℓ, ekkor p' $1 \to \ell$ minimális h út i db éllel és $t_{i,\ell} + a_{\ell,j}$ hossza pont p hossza, azaz p hossza szerepel a $\{ k \neq j \mid x = t_{i,k} + a_{k,j} \}$ halmazban.

A legrövidebb utak nyomonkövetésére a Dijkstra algoritmushoz hasonlóan itt is elegendő az $1 \to j$ utak utolsó előtti pontját feljegyezni

Az összes csúcspár közötti távolság meghatározása
Floyd módszer

Legyen a $G(E, \varphi, V)$ gráf adott A adjacencia mátrixával ugyanúgy mint az előző B-F-M alg-nál. Az $F_k(i,j)$ mátrix azon $i \to j$ legrövidebb utak hosszait tartalmazza, melyek közbülső pontjai k-nál nem nagyobb sorszámúak. Legyen $F_1(i,j) = A(i,j)$, s tfh ismerjük $F_{k-1}(i,j)$ értékeit, s határozzuk meg $F_k(i,j)$ értékeit. Ha az $i \to j$ közötti legfeljebb k indexű közbülső pontokat tartalmazó legrövidebb egyszerű út pontjai között van k indexű ⇒

$\Rightarrow F_k(i,1) = F_{k-1}(i,k) + F_{k-1}(k,j)$

Ha az út nem tartalmazza k-t ⇒

$\Rightarrow F_k(i,1) = F_{k-1}(i,j)$

Az algoritmust le lehet futtatni az F mátrix egyetlen példányával is.

Floyd algoritmusa

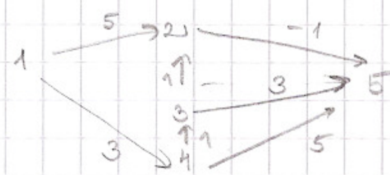
```
for i := 1 to n do
    for j := 1 to n do  F(i,j) = A(i,j)
(2) for k := 1 to n do
        for i := 1 to n do
            for j := 1 to n do
                F(i,j) = min { F(i,j) , F(i,k) + F(k,j) }
```

Előzőekből adódik k szerinti indukcióval, hogy

<u>Lemma</u>:

A (2) iteráció k-adik menete után az $F(i,j)$ mátrix (tömb) azon legrövidebb $i \to j$ utak hosszát tartalmazza, amelynek belső csúcsai az $1, 2 \dots k$ halmazból valók

Pl.:



$$F_0 = F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & -1 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} ; \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & 1 & 4 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & -1 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 0 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & 1 & 4 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & -1 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 0 \\ \infty & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad F_4 = F_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & -1 \\ \infty & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \infty & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

A legrövidebb utak nyomon követése:

Az előző algoritmusnál egy további ℓ tömböt is nyilván tartunk. Először legyen $P(i,j) = 0$. Ha az előző alg (2) ciklusában az $F(i,j)$ értékét megváltoztattuk mert találtunk egy a k. csúcson átmenő $i \to j$ legrövidebb utat $\Rightarrow$ $P(i,j) := k$. Végül a $P(i,j)$ tömb az $i \to j$ legrövidebb út egy „középső" „k" csúcsát fogja tartalmazni.

Az $i \to j$ legrövidebb út összeállításához találnunk kell egy „i"-ből „középsőbe" és középsőből „j"-be vezető legrövidebb utat. stb.

A köv. program a P tömb segítségével kiír egy $i \to j$ legrövidebb utat

```
procedure (legrövidebb út (i → j))
var k := csúcs ;
 begin
     k := P(i, j)
     if k = 0 then return;
     legrövidebb út (i → k)
     kiír (k) ;
     legrövidebb út (k, j) ;
 end ;
```

Gráfok mélységi bejárása

Legyen a $G(E, \Gamma, U)$ gráf adott az éllistájával. Minden csúcsponthoz rendeljünk az algoritmus során 2 számot az első szám (el) jelentse az, hogy hányadik lépésben értük el az adott csúcsot. A csúcshoz rendelt második szám (ml) jelölje azt a számot amikor utoljára voltunk az adott csúcsban.

Startoljunk a $s = v_1$ pontból, ha v_1 éllistájában elsőnek a $(1,2)$ él szerepel $\Rightarrow$ majd menjünk v_2-be, ha v_2 éllistájában a $(2,3)$ él szerepel menjünk v_3-ba stb. Ha v_i éllistájában első helyen (i, j_1) él áll, de v_{j_1}-ben már jártunk második helyen (i, j_2) él áll $\Rightarrow$ v_{j_2}-be, ha v_i éllistájában az utolsó él (i, j_k) s már korábban jártunk v_{j_k}-ban, akkor $ml(v_i) := i$ és menjünk vissza v_{i-1}-be.

S ha v_{i-1} éllistájában $(i-1, j_3)$ az első olyan él, melyre teljesül, hogy v_{j_3}-ban még nem jártunk $\Rightarrow$ menjünk el v_j-be, ha v_{i-1}-ben sem leltünk olyan (i, j_e) élt, hogy v_{j_e}-ben még nem jártunk volna $\Rightarrow$ menjünk vissza v_{i-2}-be ... stb.

```
procedure (bejár)
 begin
    for v := 1 to n do
       bejárva := hamis        ( inicializálás)
    for v := 1 to n do
       if bejárva (v) = hamis then
             mb (v)
    end
```

procedure (mb)

var

v: csúcs

begin

(1) bejárva (v):= igaz

for minden [i_v] - beli w csúcsra do

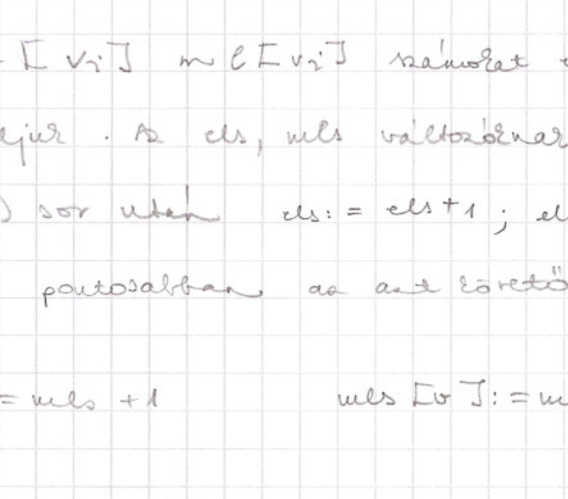
(2) if bejárva = hamis then

mb (w) (majd bejárjuk)

end

Az el [v_i] m el [v_i] számokat először 0-nak definiáljuk. Az els, mls változónak is 0 értéket adunk az (1) sor után els:= els + 1 ; els [v] := els (2) utasítás után pontosabban az azt követő end előtt írjuk.

mls := mls + 1 mls [v] := mls



Mélységi feszítő erdő, faél, előre él, visszaél, keresztél

Def: A G (E, f, V) irányított gráf v → w éle faél valamely adott mélységi bejárására vonatkozóan, ha w-t v-ből érjük el először.

Def: Jelölje DF (E_F, f_F, V_F) a G (E, f, V) irányított gráfnak azt a részgráfját, amelyre $V_F \equiv V$ és E_F tartalmazza G (E, f, V) összes

Gráfelm.
IV.17.

Páros gráfok

Def: A $G=(E,\varphi,V)$ gráfot k particionálhatónak mondjuk, ha megadható V-nek olyan $V=V_1\cup V_2\dots\cup V_k$ osztályozása, ahol a $V_1,V_2\dots,V_k$ halmazok egyike sem üres és nincs olyan él, melynek mindkét végpontja ugyanazon V_i halmazban volna.

Def. A $G=(E,\varphi,V)$-t páros gráfnak mondjuk, ha V felbomlik két nem üres diszjunkt részhalmazára $V=V_1\cup V_2$, ahol nincs olyan e él melyre az teljesedne, hogy $\varphi(e)=(v_1,v_2)$ és $v_1,v_2\in V_i$, ahol $i=1,2$

Jelölje $A_1,A_2,\dots,A_n$ az A tetszőleges nem feltétlenül különböző részhalmazainak a halmazát, azaz legyen $A_i\in P(A)$, $(i=1,2\dots n)$ és A halmaz $a_1,a_2,\dots,a_n$ páronként különböző elemeit az $A_1,A_2,\dots,A_n$ részhalmaz család diszjunkt reprezentáns rendszerének mondjuk, ha $a_i\in A_i$ $(i=1,2,\dots n)$

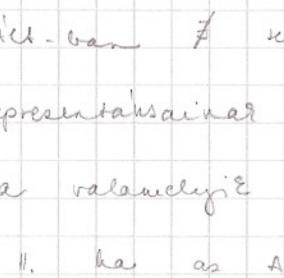
máj. 15 8^{00}
22 8^{00}
29 8^{00}
Kobájában

ZÁRÓSZIGORLAT
VI.1 Bércesné, M.L.
VI.2 -"-
VI.3 Turjányi S., G. A.
VI.4 -"-
(lehet, 4. számít)

Tanári szoba. mátr.
VI.8. Gál I, H.K.E.
VI.9. Nagy P, Deli Lajos
VI.10. -"- -"-

Áll.-ban ∄ tetszőleges $A_1,A_2,\dots A_n$ halmaz családnak diszjunkt reprezentánsainak a rendnek pl. I. ha valamelyik $A_i=\emptyset$ pont az üreshalmazzal egyenlő, vagy

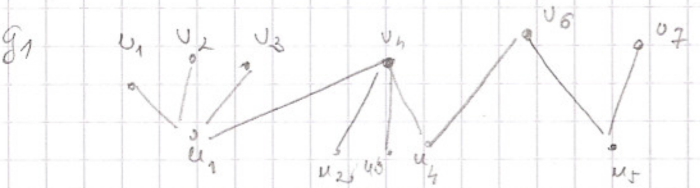
II. ha az $A_1,A_2\dots A_n$ halmazok száma nagyobb, mint ahány eleme van az $A_1,A_2\dots A_n$ halmazok F uniójának, formulával $F=A_1\cup A_2\cup\dots A_n$ és



G-nek ∄ elsőfokú faktora.

G_3-nak van elsőfokú faktora

$G_1' \le G$ $G_1' \le G_1$ $b\in G_2'$ $\deg_m(v)=k$



$|F| \le n-1$. E probléma megfogalmazója Phillip Hall volt 1935-ben. A gráfelm-ben párosítási v. házasodási problémának nevezzük.
Azon fiúk halmazát, akik szóba jönnek az i. lány férje gyanánt jelölje az A_i halmaz.
Ha azt akarjuk elérni, hogy minden lány férjhez akar menni, nyilván szükséges feltétele az, hogy a fiúk halmazának legyen olyan $a_1, a_2 \dots a_n$ disjunkt reprezentáns rendszere, hogy az i. lány férje jelölje pontosan az a_i-vel a fiút.

Tétel (Hall): ! az $A_1, A_2 \dots A_n$ halmazok az A véges halmaz részhalmazai. Az $A_1 \dots A_n$ $a_1, a_2 \dots a_n$ disjunkt reprezentáns rendszer, ha $\forall$ m-re $(1 \le m \le n)$ teljesül, h.

$$\bigcup_{j=1}^{j=n} A_{i_j} \ge m \quad (1 \le m \le n) \quad (H)$$

Azaz bárhogyan is választunk ki $A_1, A_2 \dots A_n$ halmazok közül m különbözőt $A_{i_1}, A_{i_2} \dots A_{i_m}$-t, azok uniójának mindig létezik legalább m eleme.

JEGYZET

A (H) feltételt szokták Hall feltételnek mondani.

T.: Ha G páros gráf ⇒ ∀ K körének az éleinek a száma páros.

D.: A G páros gráf éleinek nem a M részhalmazát párosításnak mondjuk, ha M ∀ éleinek nincs közös végpontja.

D.: M teljesnek mondunk, ha M lefedi G csúcsait, s maximálisnak. Ha nem ∃ M-nél nagyobb elem számú M' párosítása G-nek.

D.: A G gráf éleinek M halmazát függetlennek mondjuk, ha M bármely két élének nincs közös végpontja.
M-et teljesnek mondjuk ha M végpontja között G minden pontja szerepel.

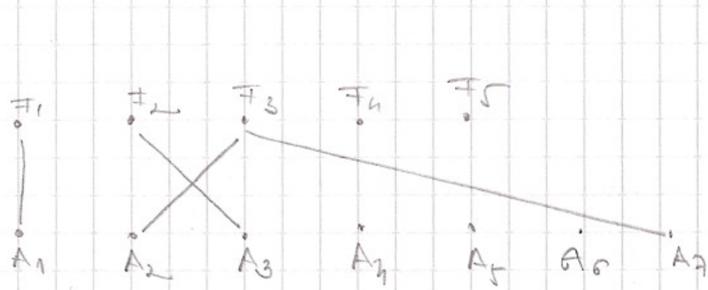
T.: Ha a G gráfban van független teljes M él halmaz ⇒ G csúcsainak száma páros.

T.: Ha a G-ben ∃ független teljes M él halmaz ⇒ G csúcsainak száma páros.

T: König Dénes 1931.
∀ páros gráf független éleinek maximális száma = az éleket lefogó minimális számával.

D.: Az M halmazt max-nak mondjuk, amely M' részhalmaza, mely független és több eleme van.

Max számú élt tartalmazó párosítás keresése magyar módszerrel.



U_1, U_2 két egymással || egyenesen vetítve fel. Nevezzük U_1 pontjait felső pontoknak és U_2-t alsó pontoknak nevezzük.

König Dezső – Egerváry Dezső 1930-as években kifej- lesztettek egy módszert a max. független élek megtalát.

Párosítatlan csúcs → párosítatlan csúccsal zárul.

$M = \{(F_1, A_1), (F_2, A_2) \dots\}$

Az M által le nem fedett pontokat szabad pontoknak nevezzük.

Pl.: $M \subseteq F(G)$

$\nexists$ M-ben: növelő út.

Tétel: ① Ha a G gráfban M egy párosítás ⇒ G szabad pontjainak a száma pontosan $|V(G)| - 2|M|$

② Növelő út mindig páratlan számú élt tartalmaz.

③ ∀ M párosításra igaz, hogy $|M| \le \frac{|V(G)|}{2}$

Def: Ha a G egyszerű gráf ∀ csúcsának foka r ⇒ G-t r regulárisnak mondjuk.

Hálózati folyam, max. folyam, minimális vágás

(kiadott jegyzetben!)

D.: ! $G = (V, E)$ gráf, s, t eleme V-nek különböző csúcsok; $k: E \to \mathbb{Z}_+^{*\mathbb{R}}$. Ekkor (V, E, s, t, k) hálózat, s a forrás, t a nyelő, k a kapacitás.

Mj.: A gráfunkat kiegészítjük úgy, hogy $\forall$ csúcsból $\forall$ csúcsba menjen él. A újonnan hozzávett élek kapacitása legyen 0.

D.: ! (V, E, s, t, k) hálózat $f: E \to \mathbb{Z}$ folyam, ha rendelkezik

a) kapacitási megszorítás

b) ferde szimmetria

c) megmaradási szabály

A egész élre vonatkozó folyamnagyságot a köv. képpen ért.

$\|f\| = f(s, V) = \sum_v f(s, v)$.

Mj.: Az E halmaz (u, v) eleme telített él, ha $f(u, v) = k(u, v)$, amúgy telítetlen.

D.: Ha (V, E) gráf V részhalmaza A, B, $(A \neq \emptyset, B \neq \emptyset)$ és $h: E \to \mathbb{Z}$ fgv. $\Rightarrow h(A, B) = \sum_u \sum_v h(u, v)$

Lemma: Ha (V, E, s, t, k) hálózat; $f: E \to \mathbb{Z}$.

V részhalmaza A, B $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ $\Rightarrow$

a) $f(A, B) \leq k(A, B)$

b) $f(A, A) = 0$

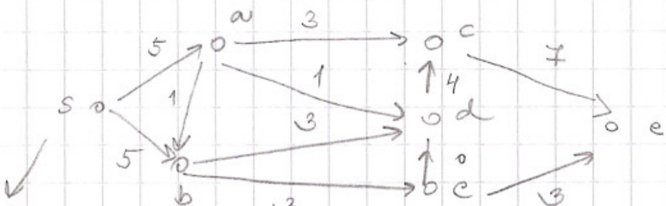
c) $f(s, V) = -f(s, V)$

<u>Lemma</u>: ! (U, E, s, t, c) egy hálózat, f pedig egy folyam. Ekkor U-nak $\forall$ A, B részhalmaza esetén: $f(A,B) = -f(B,A)$

U-nak $\forall$ A, B, C $(A \cap B = \emptyset)$ részhalmaza esetén:

$f(A \cup B, C) = f(A,C) + f(B,C)$ és $f(C, A \cup B) = f(C,A) + f(C,B)$

Pl.:



FORRÁS

<u>Maximális folyam, min. vágás:</u>

Max. folyam problémának azt nev., mikor egy adott V hálózatban az s-ből t-be vezető max nagyságú folyamot keressük.

<u>D.</u>: ! (U, E, s, t, c) egy hálózat, U részhalmazai A, B, melyek uniója U és $A \cap B = \emptyset$. (azaz A és B particionálják U-t). ! továbbá s eleme A-nak, $t \in B$. Ekkor az A, B halmazpárt s,t vágásnak nevezzük. Az A, B vágás kapacitásán a $c(A,B) := \sum_u \sum_v c(u,v)$ mennyiséget értjük.

Ha f folyam $\Rightarrow$ definiáljuk A, B vágáson áthaladó folyamot.

$f(A,B) := \sum_u \sum_v f(u,v)$

T: Tetszőleges A, B vágásra és f folyamra $\|f\| \leq c(A,B)$

Lemma: ! f a V hálózat egy folyama, ! A, B a V egy vágása. Ekkor az A, B vágáson átfolyó folyam nagysága: $f(A, B) = \|f\|$.

Javító gráf: Tfh. $\exists$ egy f folyam, és érdekel minket, h tudunk-e javítani rajta. Minden egyes (u, v) csúcspárra vizsgáljuk meg, h mennyi anyagot tudnánk átvinni u-ból v-be.
Ez a mennyiség nemnegatív, mert f egy folyam, s f növelésére ott a lehetőség, ahol $c(u, v) - f(u, v) > 0$

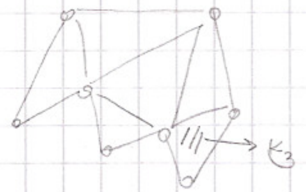
RESIDIUM

Def: Adott egy (V, E, s, t, c) hálózat és rajta egy f folyam. Tfh. $r(u, v) := c(u, v) - f(u, v)$ a maradék kapacitásának fgv-ét. Az f folyamhoz tartozó javító-gráf a (V, E_f) gráf az élein értelmezett r kapacitásfgv-el, ahol $E_f = \{(u, v) : r(u, v) > 0\}$

Def: ! (V, E, s, t, c) hálózat, f egy folyam rajta
A (E, r)-beli irányított s-t utakat önkéntes utaknak nev.

Mersenne prí: $2^p - 1$ alakúak

Ramsey-szám:



simpla síkidomok

K_{n+1}

Rédei László (1930-as évek)

Ha egy n csúcspontú gráfot tetszőleges módon irányítjuk, van benne „n − 1" hosszúságú irányított út.

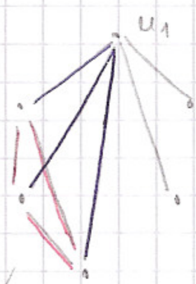
∃ irányított Hamilton út, de nem feltétlenül H.-kör.

K_6 6 csúcspontú teljes gráf

6 ember között 2 ember v. ismeri egymást v. nem.

ha ismerik ⇒ zöld
ha nem ismerik ⇒ piros

Biztos-e, h van benne egyszínű kromatikus gráf.



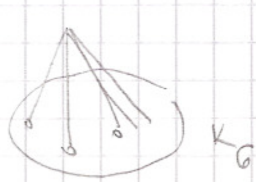
Ha itt található 2 él ⇒ van zöld Δ, ha mind piros ⇒ PIROS Δ-em van.

$K_{(n)}$ a legkisebb számot nevezem Ramsey számnak

17 tudós levelez 3 témáról 3 nyelven.

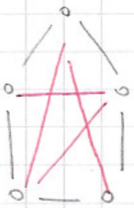
Biz be, h ∃ 3 tudós, ugyanarról levelez ugyanolyan nyelven!

$d(v) = 16$



$n(3;3) = 6$ $\qquad$ $n(3;3;3) = 17$

$n(3;3) \neq 5$



$n(m, k) = n(k, m)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36
4	1	4	9	18	25	?	?	?	?
5	1	5	14	25	?	?	?	?	?
6	1	6	18	?	?	?	?	?	?

Erdős - tétel:

Ha $k \geq 2 \Rightarrow n(k, k) \geq (\sqrt{2})^k$

$N(q_1, q_2, \dots q_t, 1) = q_1 + q_2 + \dots + q_t - t + 1.$

Cayley

T_n . n^{n-2} $\qquad$ $P_n = n!$

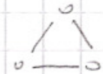
ciklikus perm. száma (n-

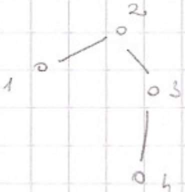
$\frac{5!}{5} = (5-1)!$

$\frac{(n-1)!}{2}$ → a gyöngyöket lehet tükrözni $\left(\frac{n!}{2n}\right.$

K_n → n csúcspontú gráf

elemeinek száma : $n!$





Ezeket nem lehet akárhogyan leképezni egymásra

$$< \frac{n^{n-2}}{n!}$$

Erdős P, Rényi Alfréd (1960) Véletlen gráfok

n $\binom{n}{2}$

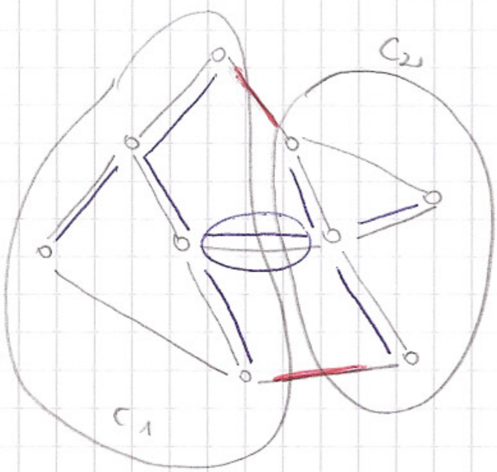
↳ max él

Gráf egyszerű, összefüggő

∃ feszítőfája

⇓

elhagyom 1 élet



A 2 komponenst összekötő élek ⇒ ALAPVÁGAT!

$T \subseteq G$

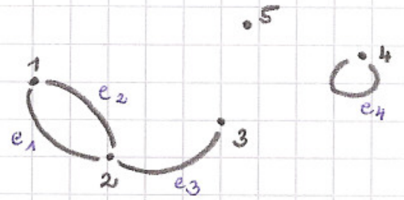
$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

$\cup$

$\forall \begin{pmatrix} 0 & \overset{a_2}{1} & \overset{a_3}{1} & \overset{a_4}{1} & 0 \end{pmatrix} \in V_5$

A gráfelmélet alapjai

D: Pontból és azokat összekötő vonalakból álló alakzatot gráfnak nevezzük.



D.: Az e_4 élet hurokélnek nevezzük, mert végpontjai megegyeznek.

D.: Az e_1 és e_2 éleket párhuzamos v. többszörös éleknek nevezzük, mert megegyezik a kezdő- és végpontjuk.

D.: Az 5 izolált pont, mivel egyik élnek sem végpontja.

D.: Azokat a gráfokat, amelyekben nincs hurokél v. többszörös él, egyszerű gráfoknak nevezzük.

D.: A $G=(V,E)$ párt egyszerű gráfnak nevezzük, ahol: $V \neq \emptyset$, az E pedig V elemeiből képzett kételemű részhalmazok összessége. Ha E és V is véges halmaz $\Rightarrow$ a G gráfot véges gráfnak nevezzük.

D.: Az i csúcs fokszáma: $d(i)$ = az i csúcsra illeszkedő élvégek számával.

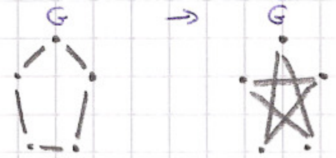
T.: $\forall G$-re igaz, hogy ha $V(G) = \{A_1, \dots, A_n\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d(A_i) = 2|E(G)|$

($V(G)$: V gráf G csúcshalmaza ; $E(G)$: élek száma)

T.: $\forall n$ $(n \geq 2)$ egyszerű gráfban van két azonos fokszámú pont.

D.: n-szögpontú teljes gráfnak nevezzük azt az n szögpontú egyszerű gráfot, amelynek két csúcsa szomszédos. (éllel van összekötve.)

D: Az n szögpontú egyszerű G gráf $\overline{G}$ komplementere az az egyszerű gráf, amelynek $V(\overline{G})$ megegyezik a $V(G)$, és $\overline{G}$-ben két csúcs szomszédos pontosan akkor, ha G-ben nem szomszédosak.



D: A G_1 és G_2 gráfokat izomorf gráfoknak nevezzük, ha $\exists$ olyan f kölcsönösen egyértelmű leképezés, amely $f: V(G_1) \to V(G_2)$ és illeszkedéstartó, azaz A és B szomszédos csúcsok G_1-ben $\Leftrightarrow$, ha f(A) és f(B) szomszédos szögpontok G_2-ben. (jel.: $G_1 \cong G_2$)

D: Végpontjaikkal egymáshoz kapcsolódó élek egy $A_1 e_1 A_2 \dots A_n e_n A_{n+1}$ élsorozatát az A_1 csúcsot az A_{n+1} csúccsal összekötő élsorozatnak nevezzük. Egy élsorozatot vonalnak nevezünk, ha nincs benne két azonos él. Egy élsorozatot zárt élsorozatnak nevezzük, ha kezdő és végpontja megegyezik. Egy élsorozatot nyílt élsorozatnak nevezzük, ha kezdő- és végpontja különbözik. Egy nyílt vonalat útnak nevezzük, ha benne semelyik csúcs sem ismétlődik. Egy zárt, legalább egy élű vonalat körnek nevezzük, ha a kezdő- ill. végpont kivételével semelyik csúcs nem ismétlődik.

D: Egy G gráfot összefüggőnek nevezünk, ha $\forall$ két csúcsához $\exists$ őket összekötő, a gráf éleiből álló élsorozat.

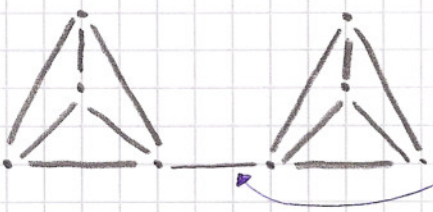
T: $\forall$ G egyszerű gráf v. komplementere összefüggő.

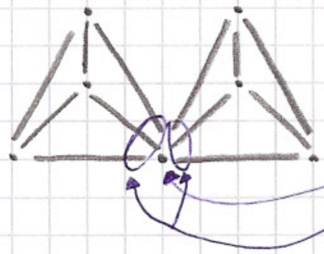
T: Ha egy n pontú egyszerű G gráfban $\forall$ pont foka $\geq k$ $\left(0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1\right)$ és élszáma $|E(G)| > \binom{k+1}{2} + \binom{n-(k+1)}{2} \Rightarrow$ G összefüggő.

D: Egy G gráfot n-szeresen élösszefüggőnek nevezzük, ha van olyan n éle, amelyeket a gráfból törölve már nem összefüggő gráfot kapunk, de n-nél kevesebb élt törölve a gráf még összefüggő marad.

D: Egy G gráfot n-szeresen pontösszefüggőnek nevezünk, ha van olyan n pontja, amelyeket a rájuk illeszkedő élekkel együtt a G-ből elhagyva a kapott gráf már nem összefüggő, de n-nél kevesebb pontot kitépve a kapott gráf még összefüggő marad.

Pl.: (K_4 teljes gráf)





D: A G gráf zárt Euler vonalának nevezzük a gráf összes élét tartalmazó zárt élsorozatot. A G gráf nyílt Euler vonalának nevezzük a gráf összes élét tartalmazó nyílt élsorozatot.

T: Egy izolált ponttól mentes G gráfnak $\Leftrightarrow$ $\exists$ zárt Euler-vonala, ha G összefüggő és $\forall$ csúcsának a foka páros.

T: Egy izolált ponttól mentes G gráfnak $\exists$ nyílt Euler-vonala, ha a gráf összefüggő, és pontosan két csúcsa páratlan fokszámú, a többi páros.

D: Egy n szögpontú G gráf Hamilton körének nevezzük a gráf összes csúcsát tartalmazó körét.

D: Egy n szögpontú G gráf Hamilton útjának nevezzük a gráf összes csúcsát tartalmazó útját.

T: Ha egy összefüggő G gráf k csúcsát kitépve a maradék gráf legalább $k+1$ komponensű $\Rightarrow$ nincs Hamilton köre, ha pedig legalább $k+2$ komponensű $\Rightarrow$ nincs Hamilton útja sem.

T.: Ha egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka $\geq \frac{n}{2}$ $\Rightarrow$ a gráfnak van Hamilton köre. $(n \geq 3)$

D.: Egy gráfot fagráfnak nevezzük, ha összefüggő és körmentes.

T.: Az $n \geq 2$ csúcspontú G gráfra vonatkozó alábbi állítások egymással páronként ekvivalensek.

I. G összefüggő és körmentes

II. Ha $n = 1 \Rightarrow G$ izomorf K_1-gyel. Ha $n \geq 2 \Rightarrow \forall$ két pontját pontosan egy út köti össze.

III. Ha $n = 1 \Rightarrow G \cong K_1$. Ha $n \geq 2 \Rightarrow \forall$ élét elhagyva két komponensű gráfot kapunk.

IV. G összefüggő és $n-1$ éle van.

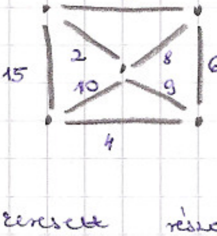
V. G körmentes és $n-1$ éle van.

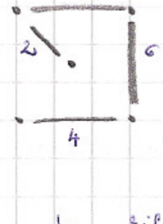
T.: A $d_1 \dots d_n$ $(n \geq 2)$ pozitív egész számokhoz $\Leftrightarrow \exists$ olyan n csúcspontú fa, melynek fokszámsorozata éppen $d_1, d_2 \dots d_n$, ha $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$

T.: (Cayley) A $V = (1, 2 \dots n)$ csúcshalmazú különböző számozott fagráfok száma n^{n-2}.

D.: Egy összefüggő gráf feszítőfájának nevezzük a gráf minden pontját tartalmazó fa részgráfját.

Pl.:





A keresett részgráfban nincs kör, így feszítőfa. Ha az élekhez rendelt költségek csupa különböző pozitív valós számok $\Rightarrow$ a legolcsóbb feszítőfát a köv. algoritmus szolgáltatja. Kiválasztjuk a legolcsóbb élt, ezután ismételten a még ki nem választott élek közül a legolcsóbb olyat választjuk, amely a kiválasztott élek által alkotta részgráfban nem hoz létre kört. (Mohó algor.)

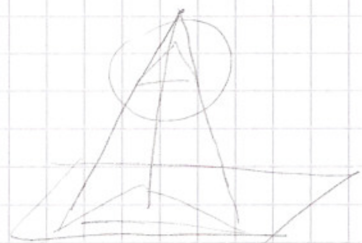
T: (Euler) Legyen a síkbeli összefüggő G gráf csúcsainak száma C, éleinek száma E, és a G síkot L db tartományra bontja. $C-E+L=2$.

T: (Kuratowski) Egy gráf <=> síkbeli gráf, ha nem tartalmaz részgráfként a K_5 gráffal, v. a $K_{3,3}$ gráffal topológikusan izomorf gráfot.

Kruskal → élek } min feszítőfa
Prim → csúcsok

Mohó színezési alg → kromatikus szám

Sztereografikus projekció (D.t. beágyazás)



izolált r^n } kromatikus polinom
fa $r(r-1)^{n-1}$
klikk $r(r-1)\dots(r-(n-1))$