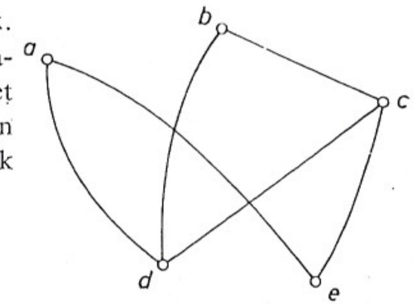
1. ISMERKEDÉS A GRÁFOKKAL

Vegyünk szemügyre valamely sportágban egy csapatbajnokságot. Bizonyos számú mérkőzés lejátszása után a már lejátszott és a még le nem játszott mérkőzésekről szeretnénk áttekinthető képet kapni. A szemléltetésre ábra kínálkozik. Minden csapatnak megfeleltetünk egy pontot. Egy mérkőzés két csapat között zajlott. Kössük össze a két csapatnak megfelelő pontokat egy vonaldarabbal. Jelöljünk be ily módon minden lejátszott mérkőzést. A csapatok jelét a pontokhoz írhatjuk. Ha ezt elmulasztanók, ábránk félreérthető lenne, mert a mérkőzéseknek megfelelő vonaldarabok metszhetik egymást, és a metszéspontok is csapatoknak megfeleltetett pontoknak tűnnek. Ezért a csapatokat jelentő pontok helyett kis karikákat rajzolunk. Az 1. ábra azt a helyzetet szemlélteti, hogy az a, b, c, d és e csapatról van szó, továbbá a következő 6 mérkőzést játszották le:

$$a-d, \quad a-e, \quad b-c,$$

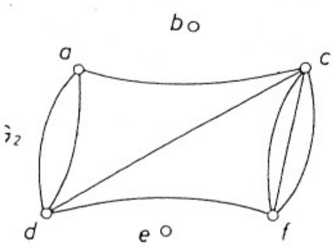
$$b-d, \quad c-d, \quad c-e.$$



1. ábra

Az 1. ábrát a vizsgált jelenség *gráf*jának nevezzük. (A gráf szó a grafikus szemléltethetőségből ered.) A karikákat a *gráf pontjai*nak, a vonaldarabokat pedig a *gráf élei*nek nevezzük. Pont helyett szokás mondani *csomópont*ot, *csúcspont*ot vagy *szögpont*ot is. Az $a-d$ mérkőzésnek megfelelő él jelölésére az $\{a, d\}$ jelet is használjuk. Természetesen $\{a, d\}$ ugyanazt az élt jelenti, mint $\{d, a\}$. Hasonlóan $\{a, e\}$ ugyanazt az élt jelenti, mint $\{e, a\}$ s í. t. Úgy is mondjuk, hogy a és d az $\{a, d\}$ él *végpont*jai, $\{a, d\}$ *illeszkedik* a-hoz és d-hez, a-nak d *szomszédja*, ill. a és d *szomszédosak*. Jelöljük az 1. ábrát G_1-gyel. Azt is mondhatjuk, hogy a G_1 gráf *tartalmazza* az a, b, c, d és e pontokat és az $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ és $\{c, e\}$ éleket.

Előfordulhat olyan eset is, hogy valamelyik csapat még egyetlen mérkőzését sem játszotta le. Többfordulós bajnokságban két csapat többször is mérkőzhetett már egymással. G_2 mindkét esetnek megfelelő helyzetet szemléltet (2. ábra). Azokat a pontokat, amelyekhez nem illeszkedik él, *izolált pont*oknak nevezzük. Ha egy ráfban két pontot több él is összeköt, akkor azt is mondjuk, hogy a gráf tartalmaz *öbbszörös élek*et. Tehát b és e G_2-nek izolált pontja. A c pontot az f ponttal összekötő leket jelölésben megkülönböztetjük, pl. indexeléssel: $\{c, f\}_1$, $\{c, f\}_2$, $\{c, f\}_3$. Hasonlóan az a és d csapat között lezajlott mérkőzéseknek megfelelő élek: $\{a, d\}_1$ és $\{a, d\}_2$.



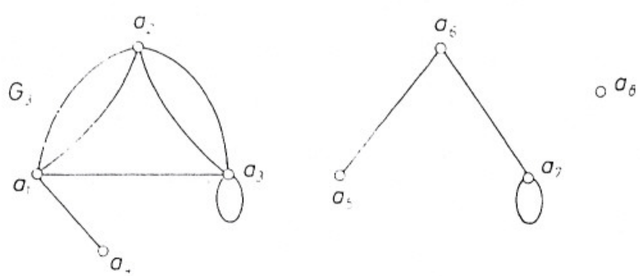
2. ábra

Bizonyos emberek között fennálló ismeretségek szemléltetésére is az eddigiekhez hasonló jellegű ábra kínálkozik, ha az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük fel. Minden embernek megfeleltetünk egy pontot, és egy él meghúzásával azt fejezzük ki, hogy a végpontjainak megfelelő emberek ismerik egymást. Azt is szemléltethetjük, hogy az a ember ismeri önmagát: lyan élt rajzolunk, amelynek mindkét vége a (3. ábra). Szokás az ilyen élt *hu-*)*kél*nek is nevezni.

Ezek után *gráf*nak olyan ábrát nevezünk, amely pontokból és vonaldarabokból lekből) áll; minden vonaldarab két — nem szükségképpen különböző — pontot öt össze. A gráf p pontjához illeszkedő élvégek számát p *fokszámá*nak ıgy röviden p *foká*nak nevezzük, és $\varphi(p)$-vel jelöljük. Ha a p pont foka akkor azt is mondjuk, hogy p *k-adfokú*.

A 3. ábrában egyetlen pont van, egyetlen él és $\varphi(a)=2$. A 4. ábrán tható G_3 gráfnak 8 pontja van, 10 éle, ebből 2 hurokél; továbbá $(a_8)=0$, $\varphi(a_4)=\varphi(a_5)=1$, $\varphi(a_6)=2$, $\varphi(a_7)=3$, $\varphi(a_1)=\varphi(a_2)=4$ és $(a_3)=5$.

3. ábra



4. ábra

yakorlatok

1. Határozzuk meg az 1. és 2. ábra pontjainak számát, éleinek számát és fokámait.

2. Rajzoljunk olyan 5-pontú gráfokat, amelyekben 2 harmad- és 3 negyedfokú ont van. Hány élük van a rajzolt gráfoknak?

3. Rajzoljunk olyan 6-pontú gráfokat, amelyekben a fokszámok: 1, 2, 2, 3, 5 és 5. ány élük van a rajzolt gráfoknak?

Feladatok

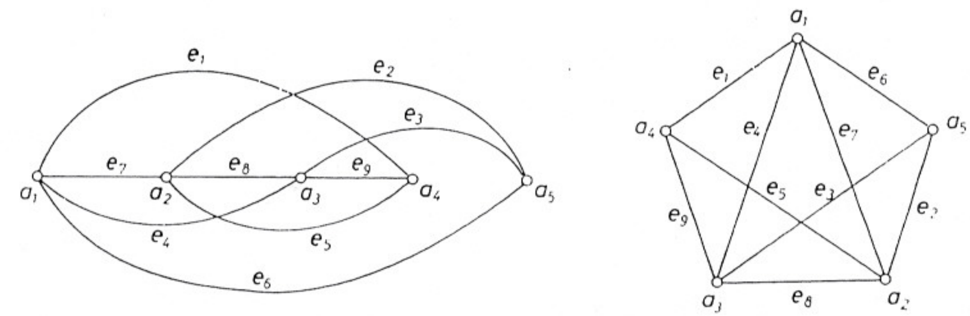
4. Hány olyan 5-pontú gráf van, amelyben a fokszámok: 1, 2, 2, 3 és 3?

5. Egy társaság bizonyos tagjai kézfogással köszöntötték egymást. Bizonyítsuk be, hogy páros azoknak a száma, akik páratlan sok emberrel fogtak kezet.

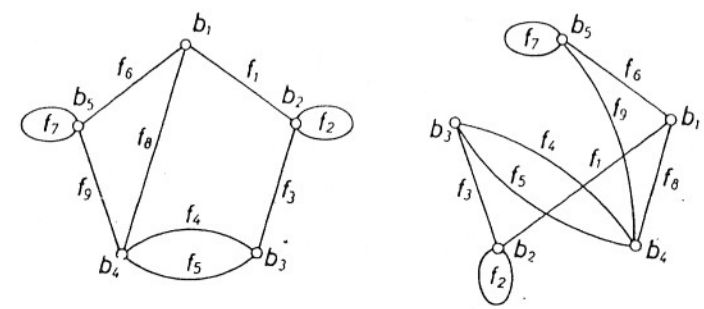
6. Egy sakkversenyen bármely két játékos legfeljebb egyszer játszott egymással. Bizonyítsuk be, hogy a verseny bármely pillanatában volt két versenyző, akik addig ugyanannyi mérkőzést játszottak le.

7. Ha az előbbi versenyen n játékos vett részt, és mindenki játszott mindenkivel, hány mérkőzés volt összesen?

A 2. gyakorlathoz nagyon sok módon lehet gráfot rajzolni. Az 5. és 6. ábrán látható két-két gráf is megfelel a követelményeknek. Az 5. ábrán látható két gráf pontjai: $a_1, a_2, \ldots, a_5$ és élei: $e_1, e_2, \ldots, e_9$. Hiába látszik e két gráf oly különbözőnek, sikerült a pontokat és éleket úgy jelölnünk, hogy mindkét gráfban $e_1 = \{a_1, a_4\}$,



5. ábra



6. ábra

$e_2 = \{a_2, a_5\}, \ldots, e_9 = \{a_3, a_4\}$. E két gráf tehát *lényegben* megegyezik: éleinek a pontjaihoz való illeszkedésével mindkét gráf ugyanazokról a kapcsolatokról tájékoztat minket.

Ha a G_1 gráf minden pontjának és élének megfeleltethető a G_2 gráfnak pontosan egy pontja, ill. éle úgy, hogy a G_2 gráf minden pontja és éle megfelel G_1 egy pontjának, ill. élének, továbbá ha az egymásnak megfelelő élek egymásnak megfelelő pontokhoz illeszkednek, akkor a G_1 és G_2 gráfokat *izomorfak*nak nevezzük. Rövidebben így is szokás mondani: Két gráf *izomorf*, ha egyikük pontjai és élei kölcsönösen egyértelmű, és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másikuk pontjainak, ill. éleinek. Gráf ábrázolását úgy is elképzelhetjük, hogy a gráf pontjai kis merev karikák, élei pedig ezekhez rögzített, tetszés szerint nyújtható gumizsinórok. Most ábránkat mozgathatjuk, nyújthatjuk, zsugoríthatjuk, bármely két helyzetben izomorf gráfokat nyerünk. Többnyire nem okoz félreértést, ha izomorf gráfok között nem teszünk különbséget, pl. ha az 5. ábrán látható két gráfra azt mondjuk, hogy *ugyanaz*. A 6. ábrán látható két gráf is izomorf; a kívánt megfeleltetést azonos betűk jelzik. De az 5. és a 6. ábra egy-egy gráfja nem izomorf, hiszen az 5. ábrában nincs hurokél, viszont a 6. ábra mindkét gráfjában van, márpedig izomorf megfeleltetésben hurokélnek szükségképpen hurokél felel meg.

Figyeljük meg, hogy az 5. és a 6. ábrán megrajzolt négy gráf mindegyikének 9 éle van. Ha a követelményeknek megfelelően rajzolunk még gráfokat, azt tapasztaljuk, hogy azoknak is 9 — 9 élük lesz. Sőt, ha a 3. gyakorlat követelményét kielégítő gráfokat rajzolunk, azok mindegyikében is 9 élt számolhatunk össze. Vajon véletlen-e ez, vagy valamely törvényszerűség következménye? Mi az, ami a két gyakorlathoz rajzolt gráfokban közös? Adjuk össze a pontokhoz tartozó fokszámokat.

A 2. gyakorlatban: $3+3+4+4+4 = 18$,
és a 3-ban: $1+2+2+3+5+5 = 18$.

Mindkét esetben a tapasztalt élszám kétszeresét kaptuk. Általában is: bármely gráf pontjainak fokösszege megegyezik az élvégek számának összegével. Ehhez az összeghez minden él 2-vel járul hozzá, ti. a két végében eggyel-eggyel, tehát az összeg annyiszor 2, ahány éle van a gráfnak. Ezzel a következő általános érvényű összefüggésre jutottunk:

8. *Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.*

Ennek alapján az is kimondható, hogy minden gráfban páros szám a fokszámok összege. Így azonnal válaszolhatunk a 4. feladatra: Nincs olyan 5-pontú gráf, amelyben a fokszámok 1, 2, 2, 3 és 3 volnának, ugyanis e számok összege nem páros szám.

Az 5. feladathoz alkalmas gráf már a képzeletünkben kirajzolódhat. A gráf pontjai a társaság tagjainak felelnek meg. Egy él azt jelenti, hogy a végpontjainak megfelelő emberek kezet fogtak egymással. Így egy ember annyi emberrel fogott kezet, ahány él illeszkedik a gráfban a neki megfelelő ponthoz. Ezek után azt kell bizonyítanunk, hogy gráfunk páratlan fokszámainak száma páros. Fentebb megállapítottuk, hogy minden gráfban páros a fokszámok összege. Fogjuk fel e számot két tag összegeként: az egyik tag a páros fokszámok összege, a másik a páratlan fokszámok összege. Az előbbi nyilván páros, és így — minthogy a két tag összege páros — az utóbbinak is párosnak kell lennie, márpedig páratlan számok összege csak úgy adhat páros

számot, ha páros sokat adunk össze. Ezzel az 5. feladatot megoldottuk, és úgy tűnik, hogy a következő általános érvényű összefüggést nyertük:

9. *Minden gráfban páros a páratlan fokú pontok száma.*

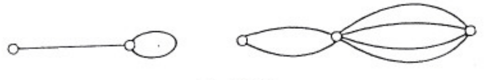
De valóban bizonyítja-e az 5. feladat megoldása ezt a minden gráfra vonatkozó állítást? Ha minden gráf az 5. feladat szövegéhez tartozónak is tekinthető, akkor igen. A feladathoz fentebb rendelt gráf nem tartalmaz többszörös éleket, hiszen két pontot legfeljebb egy éllel kötöttünk össze. De elképzelhető, hogy két ember többször is kezet fogott egymással: találkozáskor, búcsúzáskor, gratuláció alkalmával, ok nélkül, csak úgy stb. Ha azt akarjuk, hogy gráfunk minden kézfogásról számot adjon, akkor egy él a végpontjainak megfelelő emberek egymás közti kézfogásainak csak egyikét jelentse. A többszörös élek így tekinthetők szövegünk szemléltetésének. Hurokélekre még mindig nem gondoltunk. Elképzelhető, hogy valaki önmagával is kezet fogott: a jobb kezét nyújtotta a balnak s a balt a jobbnak. Egy ilyen kézfogást jelentsen egy hurokél. Persze így a bizonyítandó állítást is módosítanunk kell. Azt kell belátnunk, hogy páros az olyan emberek száma, akik páratlan sokszor nyújtottak kezet. Az, hogy egy ponthoz illeszkedő hurokél felvétele a pont fokszámát 2-vel növeli, azt jelenti, hogy egy ember önmagával való kézfogásával kétszer nyújtott kezet. Valóban, egyszer a jobb kezével, egyszer pedig a ballal. Az így módosított feladat megoldása már bizonyítja, hogy minden gráfban páros sok páratlan fokú pont van. Az elmondottak az általánosításokhoz szükséges óvatosságra intenek.

A fenti állítás alkalmazásaként a következő érdekes megállapításra is juthatunk: Bármely szénhidrogén-molekulában páros sok hidrogénatom van. Valóban, a szénhidrogén-molekulák 4 vegyértékű szénatomokból és 1 vegyértékű hidrogénatomokból állnak. Feleltessünk meg egy ilyen molekulában szereplő atomoknak gráfpontokat, és kössünk össze két pontot éllel, ha a nekik megfelelő atomok kapcsolódnak. Az így kapott gráfban a szénatomoknak megfeleltetett pontok negyedfokúak, a hidrogénatomoknak megfeleltetettek pedig elsőfokúak. Tehát a hidrogénatomok száma páros.

A 6. feladat annak bizonyítását követeli, hogy hurokélt és többszörös éleket nem tartalmazó gráfnak van két azonos fokú pontja, ha egyáltalán van két pontja a gráfnak. A továbbiakban a rövidség kedvéért *egyszerű*nek nevezünk egy gráfot, ha sem hurokélt, sem többszörös éleket nem tartalmaz. Tehát a következőt kell bizonyítanunk:

10. *A legalább két pontot tartalmazó egyszerű gráfnak van két azonos fokú pontja.*

Megjegyezzük, hogy vannak olyan nem egyszerű gráfok, amelyekben nincs két azonos fokú pont. A 7. ábrán látható gráfok ilyenek, még akkor is, ha az egész 7. ábrát egyetlen gráfnak tekintjük.



7. ábra

A 10. állítás bizonyításához tegyük fel, hogy a G gráf egyszerű. Jelöljük G pontjainak számát n-nel ($n \geqq 2$). G bármely pontja csak a többi $n-1$ ponttal lehet szomszédos, tehát minden fokszám $\leq n-1$. Ennélfogva G-ben csak a következő fokszámok lehetségesek:

$$0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Azonban a felsorolt n különböző szám mindegyike nem fordulhat elő G-ben fokszámként, hiszen ha van G-ben nulladfokú (izolált) pont, akkor nem lehet $n-1$-edfokú pont, mert ez az összes többivel szomszédos lenne, márpedig izolált pontnak nincs szomszédja. Tehát G-ben csak a következő fokszámok fordulhatnak elő:

$$0, 1, 2, \dots, n-2$$

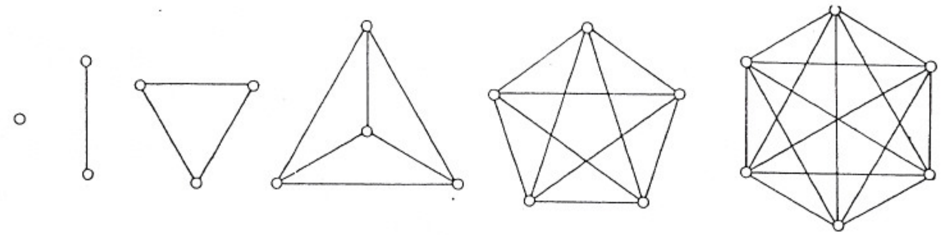
vagy

$$1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Mindkét esetben legfeljebb $n-1$ különböző fokszám lehetséges. Az első esetet vizsgálva képzeletben készítsünk $n-1$ darab dobozt, és számozzuk meg azokat sorban a $0, 1, 2, \dots, n-2$ számokkal. Most helyezzük a G gráf pontjait a dobozokba úgy, hogy minden pont fokszáma megegyezzék az őt tartalmazó doboz számával. Minthogy G-nek n számú pontja van, de a dobozok száma csak $n-1$, lesz olyan doboz, amelybe legalább két pont került. E pontok fokszámai tehát azonosak. Ugyanezzel az okoskodással a második esetben is kimutatható, hogy van G-nek két azonos fokú pontja.

A 6. feladat megoldását a gyakran használt ún. skatulyaelvre alapítottuk; érdemes ezt elvontan is megfogalmazni.

A skatulyaelv. Ha n-nél több tárgyat n osztályba sorolunk be, akkor legalább az egyik osztályba egynél több tárgy jut.



8. ábra

A 7. feladatot a következőképpen is fogalmazhatjuk: Hány éle van annak az n-pontú egyszerű gráfnak, amelynek bármely két különböző pontját él köti össze? A szóban forgó gráfot *teljes n-gráf*nak nevezzük. A teljes 3-gráfot szokás *háromszög*nek is mondani (bár nem feltétlenül egyenes szakaszok alkotják). A 8. ábrán azok a teljes n-gráfok láthatók, amelyekre $n = 1, 2, 3, 4, 5$ és 6. A teljes n-gráf minden pontjának foka $n-1$, így a fokszámok összege $n(n-1)$. A 8. megállapítás szerint

bármely gráf éleinek számát a fokszámok összegének a fele adja. Tehát igaz a 7. feladatra választ adó megállapítás:

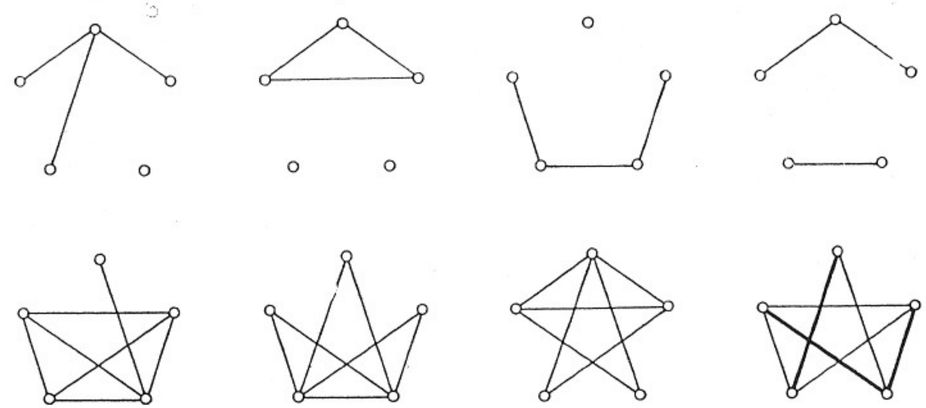
11. *A teljes n-gráf éleinek száma* $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Gyakorlatok

12. Rajzoljuk meg az összes 5-pontú 3, ill. 7 élt tartalmazó egyszerű gráfot.

13. Hány olyan 5-pontú egyszerű gráf van, amelyben minden pont foka legalább 3?

A 12. gyakorlatot különösebb megfontolások nélkül pusztán, próbálkozásokkal, csak nagyon sokára tudnók végrehajtani. Lehet, hogy végül is fennmaradna a kérdés: Vajon teljes-e felsorolásunk? Útmutatásként keressük először csak a 3 élt tartalmazó gráfokat. A fokszámok összege ezek mindegyikében 6. Lássuk be, hogy 3-nál nagyobb fokszámú pont nem fordulhat elő, és egyetlen olyan gráf van, amelyben van 3-adfokú pont. Ebben a fokszámok: 3, 1, 1, 1 és 0. A 2-nél nagyobb fokszámú pontot nem tartalmazó megfelelő gráfokban már csak a következő fokszámok jöhetnek számításba: 2, 2, 2, 0, 0 vagy 2, 2, 1, 1, 0 vagy 2, 1, 1, 1, 1. Könnyű belátni, hogy mindegyik esetben pontosan egy gráf adódik. Ennélfogva 4 olyan (lényegben különböző) 5-pontú egyszerű gráf van, amelyben az élek száma 3; ezeket láthatjuk a 9. ábra felső sorában. Az ábra alsó sorába a 7 élt tartalmazó 5-pontú egyszerű gráfokat helyeztük el.



9. ábra

Hogyan lehet e gráfokat könnyedén fellelni? Figyeljük meg az egy oszlopban elhelyezett két-két gráfot. Ha egymásra helyezzük őket, együttvéve mindegyik pár élek fedése nélkül teljes 5-gráfot ad. Ha egy n-pontú egyszerű G gráfot kiegészítünk teljes n-gráffá, és ebből töröljük G éleit, szintén gráfot, mégpedig egyszerű gráfot kapunk. Ezt *G kiegészítő gráfjá*nak vagy *komplementeré*nek nevezzük. Természetesen

G komplementerének a komplementere izomorf G-vel. Ezért azt is mondjuk, hogy G és komplementere *komplementerek*. Tehát egy n-pontú egyszerű gráfnak és komplementerének élszáma együttvéve a teljes n-gráf élszámát adja. A teljes 5-gráf éleinek száma $\frac{5\cdot 4}{2}=10$, tehát egy 5-pontú és 3-élű gráfnak a komplementere éppen egy 5-pontú és 7-élű gráfot ad. Világos, hogy két n-pontú gráf izomorf vagy nem izomorf aszerint, hogy komplementerük az, vagy nem az. Ennélfogva a 12. gyakorlat első részéhez megrajzolt gráfok komplementerei éppen a második rész kívánta gráfokat szolgáltatják.

A 13. gyakorlatnak megfelelő gráfok áttekinthetetlenül sok élt tartalmaznak. De komplementereik éppen ezért keveset. Ezért itt — és még sok más esetben — hasznos áttérni a komplementerek vizsgálatára. Gyakorlatunkban azt használhatjuk fel, hogy a keresett gráfok száma megegyezik komplementereik számával. Minthogy a teljes 5-gráfban minden pont foka 4, keresett gráfjainak komplementereiben minden pont foka legfeljebb 1. Azt már könnyű megállapítani, hogy ilyen gráf mindössze 3 van: a csupa izolált pontból álló, az egyetlen élt tartalmazó és a közös végpont nélküli két élt tartalmazó 5-pontú egyszerű gráf.

Maradjunk a 9. ábra valamelyik gráfjánál, pl. az alsó sorban levő elsőnél. E gráf és a benne levő bármelyik háromszög is része a teljes 5-gráfnak. Általában, ha egy (nem szükségképpen egyszerű) G gráf bizonyos éleit és pontjait — a pontokat a hozzá illeszkedő élekkel együtt — töröljük, ismét gráfot kapunk. Az így kapott gráfot *G részgráfjá*nak nevezzük. Ha G' a G gráfnak részgráfja, azt is mondjuk, hogy *G tartalmazza a G' gráfot*. Szokás a G gráfot is G részgráfjai közé sorolni; tőle különböző részgráfjait *valódi részgráfjai*nak mondjuk. A 9. ábra felső sorában levő gráfok mindegyike izomorf az alatta levő gráf egy részgráfjával (az utolsó oszlopban egy ilyet vastagítással jelöltünk meg), és a 9. ábrán látható bármelyik gráf részgráfja az egyetlen gráfnak tekintett 9. ábrának.

Feladatok

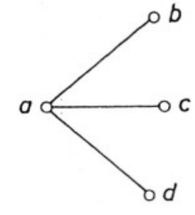
14. Bizonyítsuk be, hogy hattagú társaságnak mindig van vagy három olyan tagja, akik ismerik egymást, vagy három olyan tagja, akik nem ismerik egymást. Az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük fel.

15. Egy társasutazás bármely négy résztvevője között van olyan, aki a másik három mindegyikével már máskor is találkozott. Bizonyítsuk be, hogy ekkor bármely négy résztvevő között van olyan, aki már minden útitársával találkozott. (A feladat csak olyan társasutazásra vonatkozik, amelynek van legalább négy résztvevője.)

Ha a 14. feladathoz rajzolt gráf éleivel ismeretségeket fejezünk ki, akkor e gráf komplementerének bármely éle éppen azt fejezi ki, hogy a végpontjainak megfelelő emberek nem ismerik egymást. Ennélfogva a feladat a következő állítás bizonyítását kívánja:

16. *Minden 6-pontú egyszerű gráfnak vagy a komplementerének van háromszög részgráfja.*

A bizonyításhoz tekintsük egy tetszőleges 6-pontú egyszerű gráfnak egy tetszőleges a pontját. Az a pontnak a többi 5 pont mindegyike szomszédja a gráfban vagy a komplementerében. Osszuk az 5 pontot két csoportba úgy, hogy az egyikbe azokat tesszük, amelyek a-nak a gráfban, a másikba pedig azokat, amelyek a-nak a gráf komplementerében szomszédai. Ekkor az egyik csoportba legalább 3 pont jut. Jelöljön b, c és d 3 ilyen pontot. Ez annyit jelent, hogy a 10. ábra vagy a gráfnak vagy a komplementerének részgráfja; amelyiknek részgráfja, azt G-vel jelöljük. Ha G a $\{b, c\}$, $\{c, d\}$ és $\{b, d\}$ élek valamelyikét tartalmazza, akkor van G-ben háromszög, hiszen ezen él két végpontja a-nak szomszédja G-ben. Ha G a felsorolt három él egyikét sem tartalmazza, akkor ezeket szükségképpen G komplementere tartalmazza, de e három él éppen egy háromszöget ad. Ezzel megoldottuk a 14. feladatot.



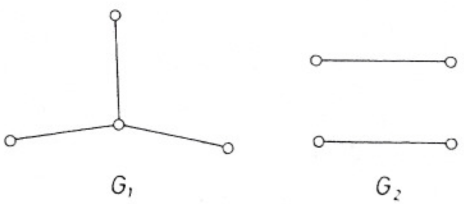
10. ábra

A 14. feladatot természetesen gráfok ismerete és felhasználása nélkül is megoldhatjuk. De megfigyelhetjük, hogy okoskodásunk áttekinthetőbb lesz, ha átszövegezzük a feladathoz tartozó gráfra. E megjegyzésünket alátámasztjuk a következő feladat megoldásával is: A 15. feladatra előbb egy gráfokat fel nem használó megoldást közlünk, majd átszövegezve a feladatot gráfokra, lényegileg ugyanazt a megoldást elmondjuk a gráfok nyelvén is.

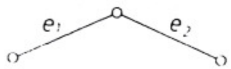
Legyen tehát A és B a 15. feladat társasutazásában szereplő két olyan résztvevő, akik korábban még nem találkoztak. Feltehetjük, hogy van két ilyen, hiszen különben bármely résztvevő megfelelne a feladat kívánalmának. Azt is feltehetjük, hogy van az AB pártól különböző utaspár (ilyen pár egyik tagja lehet esetleg A vagy B is), akik szintén először találkoznak, mert különben minden A-tól és B-től különböző résztvevő megfelelne, és bármely négy résztvevő között van ilyen (sőt legalább kettő). Az AB-től különböző, ugyancsak először találkozó utaspárban szerepelnie kell A-nak vagy B-nek, mert ha ez a CD utaspár A-tól és B-től különböző útitársakból állna, akkor A, B, C, D közül egyik sem találkozott volna korábban a másik három mindegyikével, és ez ellentmond a feladat feltevésének. Legyen tehát AC ez az AB-től különböző, ugyancsak először találkozó utaspár, hiszen minden lehetséges eset ezzé az esetté betűzhető át. Megmutatjuk, hogy bármely A-tól, B-től és C-től különböző D résztvevő találkozott már minden útitársával. Ha ugyanis D az A, B vagy C valamelyikével nem találkozott volna korábban, akkor e négy résztvevőre, ha pedig D az A-tól, B-től és C-től különböző E-vel nem találkozott volna korábban, akkor az A, B, D, E résztvevőkre nem teljesülne a feladat feltevése. Ezzel megoldottuk a feladatot.

Most gráfot rendelünk a 15. feladathoz. Gráfunk pontjai jelöljék a társasutazás résztvevőit, két pontot pedig akkor kössünk össze éllel, ha a két pontnak megfelelő két útitárs korábban még nem találkozott. A 15. feladat a most bevezetett gráfra átszövegezve a következő alakot ölti:

Egy egyszerű gráfnak nincs négy olyan pontja, amelyeknek mindegyike szomszédos a másik három pont valamelyikével. Bizonyítsuk be, hogy a gráf bármely négy pontja között van izolált pont. (A feladat csak olyan gráfra vonatkozik, amelynek van legalább négy pontja.)



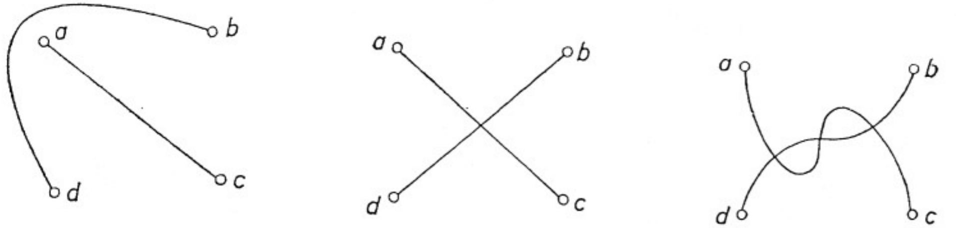
11. ábra



12. ábra

Ennek megfelelően bizonyításunk így módosul: A feladat feltétele szerint a szóban forgó gráfnak nem lehet részgráfja sem G_1, sem G_2 (11. ábra). Feltehetjük, hogy gráfunknak van két éle, e_1 és e_2, mert különben bármely négy pont között volna izolált pont is. Minthogy G_2 nem részgráfja gráfunknak, az e_1, e_2 élek egyik végpontja közös (12. ábra). Mármost bármely e_1 és e_2 végpontjaitól különböző pont izolált pont, mert különben találnánk gráfunkban G_1-gyel vagy G_2-vel izomorf részgráfot.

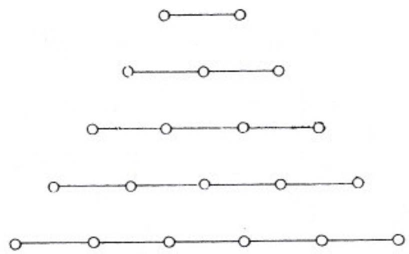
Gráfok rajzolási utasítása nem szabja meg, hogy az éleknek megfelelő vonaldarabokat hogyan vezessük, csupán a végpontjaikat határozza meg. Rajzolásunk önkényétől függően két élt jelentő vonaldarab esetleg nem metszi egymást, esetleg metszi egymást, lehet, hogy több pontban is. Tehát a 13. ábrán látható mindhárom rajz mint gráf ugyanazt jelenti.



13. ábra

Minden izolált pont nélküli gráfot tekinthetünk úthálózat vázlatos rajzának: A gráf pontjai városokat jelölnek, egy él pedig a végpontjainak megfelelő városokat

összekötő közvetlen utat jelent. Most félreértésre adhat okot, ha a 13. ábra mindhárom gráfját — amelyek ugyan páronként izomorfak — ugyanannak tekintjük, hiszen az első szerint úgy látszik, hogy az a és a b várost semmiféle út sem köti össze, míg a másik kettő alapján közvetlen összeköttetés is látszik. Ebben a megfeleltetésben a 13. ábra első két gráfját nem tekinthetjük azonosnak. Ezen azonban könnyen segíthetünk. Képzeljük el, hogy az éleknek megfelelő utakat rendre úgy építik, hogy már meglevő utakat nem szabad keresztezni, pl. valamennyi út autópálya, és egyikről a másikra áttérés csak városban lehetséges. Alul- és felüljárókkal ez megoldható.

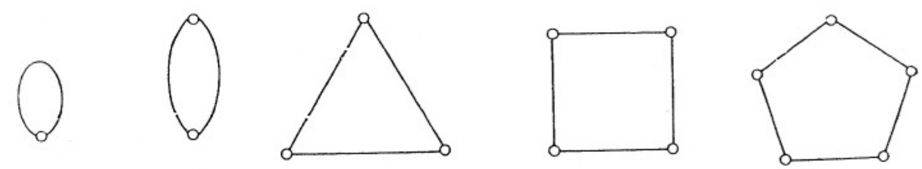


14. ábra

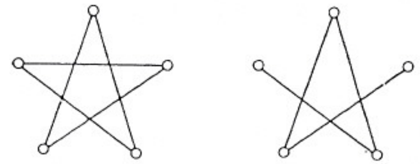
Tegyük fel, hogy egy G gráfban az a ponttal jelölt városból az éleknek megfelelő úthálózaton haladva egy másik, mondjuk b ponttal jelölt városba utaztunk. Közben esetleg több városon is áthaladtunk, de mindegyiken legfeljebb egyszer. Jelöljük meg G-ben az útvonalunkat, a közben érintett városokat jelentő pontokat, továbbá az a és a b pontot. Ekkor G megjelölt L része is gráf. Az L gráfot *út*nak, ill. az *a és b pontot összekötő út*nak nevezzük. Azt is mondjuk, hogy G-ben *a-ból b* (és egyszersmind b-ből a) *az L úttal elérhető.* Az L gráf a és b pontját az *út végpontjá*nak, L többi pontját pedig az *út belső pontjá*nak nevezzük. Világos, hogy L-ben a végpontok elsőfokúak, a belső pontok pedig másodfokúak.

Tegyük fel most, hogy a G-nek megfelelő úthálózatunkon „körutazást" tettünk: Minden városon legfeljebb egyszer haladtunk át, és végül visszaértünk a kiindulási helyünkre. Körútunkat is megjelölhetjük G-ben az előbbi módon. Ekkor G megjelölt K része is gráf lesz. A K gráfot *kör*nek nevezzük. Világos, hogy K-ban minden pont másodfokú.

Út, ill. *kör hosszá*n éleinek számát értjük. Látható, hogy az n-pontú út hossza $n-1$, az n-pontú kör hossza pedig n. Az n-pontú kör ábrázolható úgy, hogy egy geometriai körvonalnak tetszőlegesen választott n számú pontját gráfpontnak tekintjük, és úgy is, hogy egy szabályos n-szög csúcsait gráfpontoknak tekintjük. Ezért az n-pontú kört *n-szög*nek is nevezzük. A 14. ábrán 1, 2, 3, 4 és 5 hosszúságú utak, a 15. ábrán pedig ugyanilyen hosszúságú körök láthatók. Ha egy n-pontú kör egy



15. ábra



élét töröljük, n-pontú utat nyerünk. A 16. ábrán egy 5-pontú kör és egy 5-pontú út látható.

16. ábra

Gyakorlat

17. A 16. ábrát egyetlen gráfnak tekintve, keressük meg mindazokat a pontokat, amelyek ennek egyik elsőfokú pontjából úttal elérhetők.

A gyakorlatot végrehajtva megállapíthatjuk, hogy a kiválasztott elsőfokú pontból a jobb oldalon levő többi négy pont mindegyike elérhető, de a bal oldali öt egyike sem. Ha egy gráfban bármely két pont úttal elérhető, akkor a gráfot *összefüggő*nek nevezzük, különben pedig nem összefüggőnek. Az egyetlen pontot tartalmazó gráfot is összefüggőnek mondjuk. Nyilvánvalóan bármely út és bármely kör összefüggő gráf. Ha egy gráf összefüggő, akkor bármely vele izomorf is az, ha viszont egy gráf nem összefüggő, akkor egyetlen vele izomorf sem az. A 13. ábrán látható 3 gráf egyike sem összefüggő. Minden gráfnak van összefüggő részgráfja, pl. az, amelyik mindössze egyetlen izolált pontot tartalmaz, vagy — ha a gráfnak van éle — az, amelyik csupán egyetlen élből és annak végpontjaiból áll.

A G gráf egy *komponens*ének olyan részgráfját nevezzük, amely összefüggő, de nem bővíthető G újabb pontjával vagy élével az összefüggő jelleg megtartásával. Pontosabban G egy komponense G-nek olyan részgráfja, amely összefüggő, de nem valódi részgráfja G egyetlen összefüggő részgráfjának sem. Pl. ha G a 9. ábra, akkor G-nek 13 komponense van; az alsó sorban 4, a felsőben 9. Minden összefüggő gráf egyetlen komponensből áll, ti. saját magából. A legalább 2 komponensből álló gráf nem összefüggő, hiszen egyetlen gráfban sem lehet olyan él, amelynek végpontjai különböző komponensekbe tartoznak.

Feladatok

18. Bizonyítsuk be, hogy ha egy legalább 2-pontú összefüggő gráfnak kevesebb éle van, mint pontja, akkor van a gráfnak elsőfokú pontja.

19. Bizonyítsuk be, hogy ha $2n$ számú telefonközpont mindegyikének van a többiek közül legalább n-nel közvetlen összeköttetése, akkor bármely két központ között létesíthető telefonkapcsolat (esetleg többük közvetítése révén).

20. Bizonyítsuk be, hogy ha n számú telefonközpont közül bármely kettő között létesíthető telefonkapcsolat, akkor van e központok között $n-1$ számú közvetlen összeköttetés is.

A 18. feladathoz tegyük fel, hogy az összefüggő G gráf pontjainak száma $n \geqq 2$. G-nek, minthogy összefüggő, izolált pontja nem lehet. Ha elsőfokú pontja sem volna, akkor minden pontjának foka legalább 2 volna, és így a fokszámok összege legalább $2n$ volna. Ebből viszont az adódnék, hogy G éleinek száma legalább n, ugyanis a 8. állítás szerint a fokszámok összegének fele minden gráfban az élek számát adja.

A 19. és 20. feladathoz a következőképpen rendelhetünk gráfot: A telefonközpontok gráfpontok, és két pontot akkor kötünk össze éllel, ha a megfelelő központok között van közvetlen összeköttetés. Ekkor a 19. feladat állítása következménye az alábbinak:

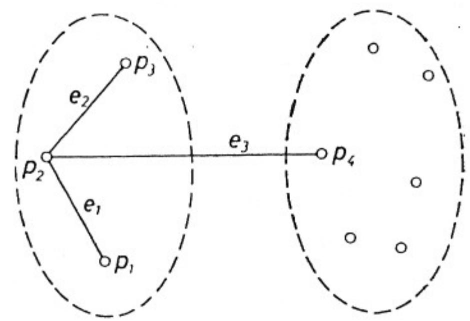
21. *Ha egy legfeljebb 2n-pontú egyszerű gráf minden pontjának foka legalább n, akkor a gráf összefüggő.*

Az indirekt okoskodáshoz tegyük fel, hogy a szóban forgó gráf 1-nél több komponensből áll. Ekkor van olyan komponens, amelyben nem lehet n-nél több pont. Egy ilyen komponensnek bármely p pontját csak ugyanezen komponensbe tartozó pontokkal kötheti össze él. Minthogy gráfunk egyszerű, ez azt jelenti, hogy $\varphi(p) \leqq n-1$, ami ellentmond a feladat fokszámkikötésének. Tehát gráfunk egyetlen komponensből áll, azaz összefüggő.

Megjegyezzük, hogy ha egy $2n$-pontú egyszerű gráf minden pontjának foka legalább $n-1$, még nem feltétlenül összefüggő a gráf. Pl. ha egy gráf két komponensből áll, és mindkét komponens teljes n-gráf, akkor a gráf nem összefüggő, bár minden pontjának foka $n-1$.

A 20. feladatot megoldjuk, ha bebizonyítjuk, hogy az n-pontú összefüggő egyszerű gráfnak legalább $n-1$ éle van. A bizonyításban összefüggő gráfoknak a következő tulajdonságát használjuk fel: Bármilyen módon is osztjuk két csoportba egy összefüggő gráf pontjait, mindig van a gráfnak olyan éle, amelynek két végpontja különböző csoportokba tartozik (lásd a 25. állítás bizonyítását).

Szemeljünk ki az n-pontú összefüggő egyszerű G gráfban egy tetszőleges p_1 pontot. Ha van G-nek p_1-től különböző pontja, akkor a fent említett két csoport egyike álljon csupán p_1-ből. Van tehát G-nek egy p_1-hez illeszkedő e_1 éle. Jelöljük e_1-nek p_1-től különböző végpontját p_2-vel. Ha van G-nek p_1-től és p_2-től különböző pontja, akkor a fent említett két csoport egyike álljon most p_1-ből és p_2-ből. Van tehát G-nek olyan e_2 éle, amelynek egyik végpontja p_1 vagy p_2, a másik pedig p_1-től is és p_2-től is különböző; jelöljük ezt p_3-mal. Nyilván $e_1 \neq e_2$. A bizonyítás következő lépését a 17. ábra szemlélteti. A szaggatott vona-



17. ábra

lak a pontok újabb két csoportba osztását jelzik. Eljárásunkat folytatva végül is találunk G-ben $n-1$ számú élt. Ezzel bizonyítottuk állításunkat.

Megmutatjuk, hogy a 20. feladatot megoldó állítás nem egyszerű gráfokra is érvényes. Ha ugyanis az n-pontú összefüggő G gráf nem egyszerű, akkor először is töröljük valamennyi hurokélét. Az így kapott n-pontú G_1 gráf összefüggő és G-nek részgráfja. Ha G_1-ben két pontot több él is összeköt, akkor töröljük azokat egyikük kivételével. Az így adódó n-pontú G_2 gráf összefüggő, egyszerű, és G-nek részgráfja. A fent bizonyított állítás szerint G_2-ben van $n-1$ számú él; G_2 élei pedig G-nek is élei. Ennélfogva bizonyítottuk a következő állítást:

22. *Az n-pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van.*

A 22. állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval a következőképpen is bizonyíthatjuk: $n=1$-re az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n \geqq 1$-re minden n-pontú összefüggő gráfnak van $n-1$ éle. Belátjuk, hogy akkor minden $n+1$-pontú összefüggő gráfnak van n éle. Legyen G egy $n+1$-pontú összefüggő gráf. Ha G-nek nincs $n+1$ éle, akkor a 18. feladat szerint van elsőfokú pontja. Egy ilyen pontot a hozzá illeszkedő éllel együtt törölve n-pontú és nyilván összefüggő gráfot kapunk. Indukciós feltevésünk szerint ennek van $n-1$ éle, ami a törölt éllel együtt adja, hogy G-nek van n éle.

Ezzel a 22. állítást két módon is bizonyítottuk. Megjegyezzük, hogy az első bizonyítás pontosításával ugyancsak teljes indukcióra jutnánk. Mondhatjuk azt is, hogy az első bizonyítás ún. *indukciós eljárása* a teljes indukció egy nyersebb formája.

Feladatok

23. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor van a gráfban kör.

24. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf tartalmaz olyan utat is, amely az a és b pontját köti össze, és olyan utat is, amely a b és c pontját köti össze, akkor tartalmaz a-t és c-t összekötő utat is.

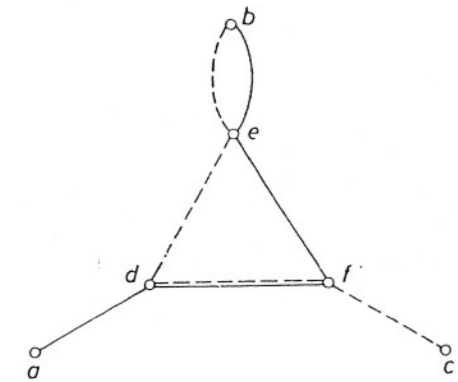
A 23. feladat megoldásához induljunk el a szóban forgó gráf egy tetszőleges pontjából, és haladjunk a gráf élein. Minthogy minden pont foka legalább 2, bármelyik új pontba jutva, még be nem járt élen mehetünk tovább. Csak akkor akadhatunk el, ha már érintett pontba jutunk. Ekkor egyszersmind a gráf egy körét is bejártuk.

A 23. feladatot megoldjuk más módon is. Ebben az alább megfogalmazott, más esetekben is eredményesen használható módszert alkalmazzuk:

Leghosszabb út módszere. Legyen az m hosszúságú L út a G gráfnak egy leghosszabb útja, és ennek egyik végpontja a. Vizsgáljuk G-nek az a pontjához illeszkedő éleit. Vegyük figyelembe, hogy bármely ilyen élének a-tól különböző végpontja biztosan L-hez tartozik, ugyanis ellenkező esetben vele L m-nél hosszabb úttá volna bővíthető. Ha G egyszerű, akkor ebből az is adódik, hogy $\varphi(a) \leqq m$.

Mármost ha G minden pontjának foka legalább 2, akkor illeszkedik a-hoz egy L-be nem tartozó e él is. Ha e hurokél, akkor ez G egy körét is kijelöli. Ha e nem hurokél, akkor e-nek a-tól különböző b végpontja L-ben van. Így L-nek az a és b pontot összekötő része — amely szintén út — e-vel együtt G egy körét adja.

Jelöljük G-vel a 24. feladatban szereplő gráfot. Az világos, hogy a G gráf a pontjából éleken haladva el tudunk jutni a c pontjába: egymás után bejárva egy-egy, a feltétel szerint létező a és b pontot összekötő L_1, majd a b és c pontot összekötő L_2 utat. De nem feltétlenül út az, amit így bejárunk. A 18. ábra ilyen esetet szemléltet; ezen L_1 éleit folytonos vonallal, L_2 éleit szaggatott vonallal rajzoltuk meg. De találunk az ábrán a és c pontot összekötő utat, pl. az $\{a, d\}$, $\{d, f\}$ és $\{f, c\}$ élekből állót. Általában a következőképpen nyerhetünk ilyen utat L_1 és L_2 felhasználásával: Az a pontból elindulva haladjunk L_1 élein, amíg egy L_2-beli pontba nem érünk; ábránkon ez d. (Ez lehet esetleg maga a, de biztosan bekövetkezik; legkésőbb b-ben.) Innen haladjunk L_2 élein a c pontig. Amit bejártunk, az éppen egy kívánt tulajdonságú út.



18. ábra

A 24. feladatban szereplő G gráfban a következőképpen is kiválaszthatunk egy kívánt tulajdonságú utat: A b pontból elindulva, és L_2 élein haladva, L_1-beli pontokat is érintünk: b mindig ilyen, ábránkon e, d és f is. Az utoljára érintett L_1-beli pontot p-vel jelölve (ábránkon $p=f$), egy kívánt tulajdonságú utat járunk be, ha L_1-en haladunk a-tól p-ig, majd L_2-n p-től c-ig.

A 24. feladat megoldásában szereplő L_1 út részgráfja az összefüggő G gráfnak. A G gráf $\{c, f\}$ élének pontosan egyik végpontja tartozik az L_1 részgráfhoz. Ugyanez mondható el a G gráf L_2 részgráfjáról és $\{a, d\}$ éléről. Általában érvényes a továbbiakban többször alkalmazásra kerülő következő állítás:

25. *Ha az összefüggő G gráf G' részgráfja nem tartalmazza G minden pontját, akkor van G-nek olyan G'-be nem tartozó éle, amelynek egyik végpontja G'-beli, a másik nem.*

Állításunk bizonyításához legyen p G-nek egy G'-beli és q egy nem G'-beli pontja. Minthogy G összefüggő, q-ból p egy L úttal elérhető. A q pontból elindulva haladjunk L élein, amíg egy G'-beli pontba nem érünk. Az utoljára bejárt él előírt tulajdonságú.

A továbbiakban többször kerül alkalmazásra a hasonlóan bizonyítható következő állítás is:

26. *Ha az összefüggő G gráf G' részgráfja nem tartalmazza G minden élét, akkor van G-nek olyan G'-be nem tartozó éle, amelynek legalább az egyik végpontja G'-beli.*

Érdemes kiemelni a legutóbb alkalmazott bizonyítási eljárásokból az **először, ill. utoljára érintett pont** sok más esetben is jól hasznosítható szerepét.

*

Gyakorlatok

27. Rajzoljuk meg az összes 4-pontú egyszerű gráfot.

28. Keressünk olyan 4-pontú egyszerű gráfot, amely izomorf a komplementerével.

29. Mutassuk meg, hogy 3, 4, ill. 5 tagú társaságnak nem mindig van a 14. feladat állításának eleget tevő három tagja, de 6-nál több tagúnak mindig van.

30. Jellemezzük az olyan gráfok komponenseit, amelyekben minden pont foka kisebb, mint 3.

31. Hány olyan 8-, ill. 9-pontú nem összefüggő egyszerű gráf van, amelyben minden pont foka legalább 3?

32. Rajzoljunk olyan 7-pontú nem összefüggő egyszerű gráfot, amelynek 15 éle van.

Feladatok

33. Egy csapatbajnokságra n csapat nevezett be. Eddig $n+1$ mérkőzés zajlott le. Bizonyítsuk be, hogy van olyan csapat, amely legalább 3 mérkőzést játszott.

34. Jelöljük A-val egy gráf tetszőlegesen kiválasztott pontjainak halmazát és k-val a gráf azon éleinek számát, amelyeknek egyik végpontja A-ba tartozik, a másik pedig nem. Bizonyítsuk be a következőt: k páros, ill. páratlan aszerint, hogy az A-ba tartozó páratlan fokú pontok száma páros, ill. páratlan.

35. Kijelölünk a síkon $2n$ számú pontot, majd ezeket lefedjük körlapokkal. Mutassuk meg, hogy ha minden körlap legalább $n+1$ kijelölt pontot fed, akkor létezik a síkon a $2n$ számú pont közül bármely kettőt összekötő, körlapokkal lefedett vonal.

36. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráf minden pontja másodfokú, akkor az kör.

37. Van-e olyan nem összefüggő egyszerű gráf, amelynek nincs 6-nál több pontja, és minden pontja másodfokú?

38. Hány olyan 6-pontú egyszerű gráf van, amelyben minden pont foka 2, ill. amelyben minden pont foka 3?

39. Hány olyan 5-pontú egyszerű gráf van, amelynek 4 éle van, ill. amelynek 6 éle van?

40. Hány olyan 5-pontú egyszerű gráf van, amely izomorf a komplementerével?

41. Hány 5-pontú egyszerű gráf van?

42. Bizonyítsuk be, hogy bármely egyszerű gráf vagy a komplementere összefüggő.

43. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráfban van m hosszúságú út, de hosszabb út nincs, akkor a gráf bármely két, m hosszúságú útjának van közös pontja.

44. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf nem tartalmaz hurokélt, és minden pontjának foka legalább 3, akkor van a gráfban páros hosszúságú kör.

45. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden pontjának foka legalább 3, akkor nincs olyan 2-nél nagyobb egész szám, amellyel a gráf minden körének hossza osztható.