Döntse el,hogy a következő állítások igazak-e. Indokolja a választ!

Van olyan egyszerű gráf melynek csúcsak rendre 2,3,1,5,1 fokúak.	H
Bármely Euler gráfnak van olyan csúcsa , amelynek foka páros.	I
Van olyan G egyszerű gráf, amelynek kromatikus indexe 20 és kromatikus száma 19.	I
Ha l_1 és l_2 a G egyszerű gráfnak két maximális hosszúságú útja, akkor van közös pontjuk.	H ?
A G gráf feszítő erdőjében lévő fák száma egyenlő a G gráf komponenseinek a számával.	I
Bármely permutáció mátrixnak az inverze is permutáció mátrix.	I
Bármely egyszerű páros gráfnak a kromatikus száma páros .	I
Van olyan egyszerű gráf, amelynek van két nem izomorf Hamilton köre.	H
Van olyan 6 csúcsú egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével.	H
Ha a G(E,φ,V) egyszerű legalább 2000 pontú gráfnak bármely csúcspontjának a foka 1000, akkor van legalább egy Hamilton-köre.	I (H)
Ha egy egyszerű gráfnak három komponense van és 30 csúcspontja, akkor incidencia mátrixának a rangja 27.	I
A Fibonacci sorozat karakterisztikus polinomja x^2-x-1	I
A 3 dimenziós „kocka" éleiből és csúcsaiból alkotott gráf átmérője 2.	H
Van olyan egyszerű összefüggő gráf, amelynek nincs sem Hamilton-köre és sem nyílt Euler-vonala.	I
A G(E,φ,V) egyszerű síkba rajzolható gráf G* duális gráfjának a csúcspontjainak 123, éleinek 789 és tartományainak 456 a száma.	H
Van olyan egyszerű gráf melynek csúcsak rendre 2,3,1,2,1 fokúak	H
5 különbözô elem harmadosztályú ismétléses kombinációinak a száma: $\binom{7}{3}$. $\binom{n+k-1}{k}$	I
Van olyan egyszerű gráf, amelynek van 3 nem izomorf feszítôfája.	I
Van olyan egyszerű gráf, amelynek van Hamilton-köre, és a komplementerének is van Hamilton-köre.	I
Ha egy összefüggő egyszerű gráf bármely 2-nél nagyobb fokszámú csúcsa szeparaló pont, akkor az fa.	H ?
Ha egy egyszerű 1456 pontú gráfnak bármely csúcspontjának a foka 896, akkor összefüggô.	I
Öt pártra 100 választó 100^5 féleképpen szavazhat, feltéve, hogy mindnyájan érvényesen szavaztak és a szavazat érvényes , ha az öt pártból pontosan egyre szavaz.	H
Van olyan erdô, amelynek a körmátrixának a rangja 2.	H
Az **A** halmaz **P(A)** hatvány halmazának az elemei legyenek a G gráfunk csúcsai, az A_1, A_2 akkor és csak akkor van éllel összekötve, ha vagy $A_1 \subset A_2$ *és* $\|A_1\| = \|A_2\| + 1$ vagy $A_2 \subset A_1$ *és* $\|A_2\| = \|A_1\| + 1$, ha A számossága 4 akkor G éleinek a száma 32.	I
Minden fa páros gráf.	I
Bármely egyszerű gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.	I
A K_4 teljes gráfnak tetszôleges irányítása mellett van irányított Hamilton-köre.	H
Öt különbözô elem páros permutációi a permutációk közötti szokásos szorzásra nézve 60 elemű csoportot alkotnak. (5·4·3)	I
A legfeljebb négy jegyű számok száma az 5 alapú számrendszerben 625. (5^4)	I
Van olyan egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével, és csúcspontjainak száma 23.	H
A tetraéder éleiből és csúcsaiból alkotott gráf átmérője 2.	H
Bármely páros gráf kromatikus -száma 2.	I
Van olyan egyszerű gráf, amelyre teljesül, hogy csúcs pontjainak a száma 2000, és nem izomorf feszítőfáinak a száma több mint 2001.	I
Van olyan ötödrendű lineárisan rekurzív sorozat, amelynek karakterisztikus polinomjának a foka 4.	H
A egy véges gráfnak van elsőfokú faktora, akkor van Hamilton köre is.	H
Ha a G(E,φ,V) gráfnak A incidencia-mátrixa, akkor rang(A)≤min(|E|,|V|).	I

Az oktaéder éleiből és csúcsaiból álló gráf χ kromatikus száma $\chi \leq 6$.	I
Ha a G egyszerű összefüggő gráf lefedhető körökkel, akkor van Hamilton köre	H
Ha l_1 és l_2 a G(E,φ,V) egyszerű legalább két komponensű gráfnak van két maximális hosszúságú útja, akkor van azoknak közös pontjuk is.	H
A G(E,φ,V) egyszerű síkba rajzolható gráf G* duális gráfjának a csúcspontjainak 121, $c-é+t=2$ éleinek 239 és tartományainak 120 a száma.	I
A 6 szögpontú csillag gráf átmérője 2.	I
Van olyan G(E,φ,V) egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével és $\|V\|$=7.	H
A páratlan permutációk a permutációk közötti szokásos szorzásra nézve csoportot alkotnak.	H
Van olyan egyszerű gráf, amelynek van Hamilton-köre és nyílt Euler-vonala.	I
Bármely egyszerű gráfban a páros fokú csúcsok száma páros.	H
A G(E,φ,V) egyszerű síkba rajzolható gráf csúcspontjainak 14, éleinek 21 és tartományainak 11 a száma.	I
Az 5 dimenziós „kocka" éleiből és csúcsaiból álló gráf χ kromatikus száma $\chi \leq 6$.	I
Van olyan egyszerű 5 csúcspontú gráf, amelynek van két nem izomorf Hamilton útja.	H
A hetes számrendszerben azoknak a legfeljebb három jegyű számoknak a száma, melyek számjegyei hárommal oszthatók, 27-tel egyenlő	I
Ha l_1 és l_2 a G(E,φ,V) egyszerű legalább két komponensű gráfnak van két maximális hosszúságú útja, akkor van azoknak közös pontjuk is.	H
Ha egy egyszerű gráf bármely csúcspontjának a foka 1999, akkor van legalább egy köre, melynek 2000 pontja van.	I
A G(E,φ,V) egyszerű síkba rajzolható gráf G* duális gráfjának a csúcspontjainak 18, éleinek 21 és tartományainak 11 a száma.	I
Ha a G egyszerű legalább három pontú gráfnak bármely csúcspontjának a foka 3, akkor van legalább egy köre.	I
Fa bármely csúcsa szeparaló pont.	H
Van olyan G(E,φ,V) egyszerű gráf, amelynek van két nem izomorf feszítőfája.	I
A 2000 szögpontú csillag gráf kromatikus száma 1999.	H
A G gráf feszítő erdőjének komponensei feszítőfák.	I
A G(E,φ,V) egyszerű síkba rajzolható gráf csúcspontjainak 12, éleinek 20 és tartományainak 11 a száma.	I
A legfeljebb négy jegyű számok száma a hármas számrendszerben 64.	H
A G(E,φ,V) egyszerű síkba rajzolható gráf G* duális gráfjának a csúcspontjainak 32, éleinek 21 és tartományainak 11 a száma.	H
A G gráf feszítő erdőjében lévő fák száma eggyel több, mint a G gráf komponenseinek a száma.	H
Ha a G egyszerű legalább 1999 pontú gráfnak bármely csúcspontjának a foka 1000, akkor van legalább egy Hamilton-köre.	I
A legfeljebb három jegyű számok száma az ötös számrendszerben 125.	I
A hexaéder lapjainak a száma 8.	H
A háromdimenziós térben bármely véges gráf realizálható.	I
Ha a G(E,φ,V) gráf véges, egyszerű és összefüggô és $\|E\| = 1998, \|V\| = 1301$, akkor a G illeszkedési mátrixának a rangja 1300 a kételemű test felett.	I
Bármely egyszerű gráfnak van duálisa.	I
Van olyan síkba rajzolható G egyszerű összefüggô gráf, melynek 2000 éle, 1456 csúcsa és 1222 tartománya van.	H
A $K_{3,3}$ (3-ház-3-kút) illeszkedési mátrixának rangja (Z/2Z, a két elemű test fölött) 5.	I
A K_5 teljes gráf csúcsmátrixa négyzetének van 2-nél nagyobb eleme.	I
Az erdô komponensei fák.	I
Ha a G(E,φ,V) egyszerű legalább tizenhárom pontú gráfnak bármely csúcspontjának a foka 13,	I

akkor van legalább egy köre.	
A 120 pozitív osztóinak a száma 16.	I
Van olyan G(E,φ,V) egyszerű 6 csúcspontú gráf, amelynek van két nem izomorf Hamilton köre.	H
Minden egyszerű gráfban a páros fokú csúcsok száma páros.	H
A $K_{3,3}$ páros gráfnak van Hamilton útja..	I
Ha a G(E,φ,V) gráf véges, egyszerű és összefüggô p-csúcsú k-reguláris gráf, akkor éleinek száma $(p \circ k)/2$.	I
Bármely véges, egyszerű gráfnak létezik feszítôfája.	H
Ha a G véges, egyszerű gráf körmentes, akkor G erdô.	I
Ha a G(E,φ,V) gráf véges, egyszerű és összefüggô és $\|E\| = 1998, \|V\| = 1301$ és a komplementere G(E',φ',V'), akkor $\|E'\| = \frac{1301 \circ 1300}{2} - 1998$, $\|V'\| = 1301$.	I
Bármely véges, egyszerű ,összefüggô, páros gráfnak van duálisa.	I
A G gráfnak bármely F vágása G-nek szeparáló halmaza.	I
Ha K köre a G páros gráfnak, akkor K éleinek a száma páros.	I
Ha a G erôsen összefüggô irányított gráfnak nincsenek párhuzamos élei, sem hurokélei, akkor csúcsmátrixának bármely elemének az abszolútértéke egynél nem nagyobb.	I
Az ikozaéder éleibôl és csúcsaiból alkotott gráf síkba rajzolható és tartományainak száma 20.	I
Ha a G(E,φ,V) véges, egyszerű összefüggô és $\|E\| = 5, \|V\| = 3$, akkor a G körmátrixának rangja legalább kettô.	H
Ha a G gráf véges, egyszerű és körmentes akkor síkbarajzolható.	I
Ha G páros gráf n csúccsal és q éllel, akkor $4q \le n \circ n$.	I
Van olyan G(E,φ,V) véges, egyszerű gráf, amelynek nincs duálisa.	H
Ha a G véges, egyszerű gráf duálisa G', akkor G és G' csúcsainak a száma egyenlô	H
Van olyan G(E,φ,V) egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével és |V|=4.	I
A $K_{3,3}$ gráf körmátrixának rangja 4.	H
Ha l_1 és l_2 a G véges, egyszerű összefüggô gráfnak két maximális hosszúságú útja, akkor l_1 és l_2 -nek van közös pontja.	I
Van olyan G véges, egyszerű gráf, amely csúcsmátrixának minden eleme 1-nél nagyobb.	H
Ha a G(E,φ,V) véges, egyszerű legalább 1999 pontú gráf bármely csúcspontjának a foka 1948, akkor illeszkedési mátrixának a rangja pontosan 1998 (a két elemű test fölött).	I
Ha a G gráfnak H szeparáló halmaza, akkor létezik, H-nak olyan H' részhalmaza, amely vágása G-nek.	I
A dodekaéder gráfjának kromatikus indexe nem nagyobb négynél..	I
Az **A** halmaz **P(A)** hatvány halmazának az elemei legyenek a G gráfunk csúcsai, az A_1, A_2 akkor és csak akkor van éllel összekötve, ha vagy $A_1 \subset A_2$ *és* $\|A_2\| = \|A_1\| + 1$vagy $A_2 \subset A_1$ *és* $\|A_1\| = \|A_2\| + 1$, ha A számossága 5 akkor G éleinek a száma 25.	H
Bármely véges, egyszerű összefüggô páros gráfban a körök éleinek száma páros.	I
A K_6 teljes gráf nem rajzolható síkba.	I
Van olyan G(E,φ,V) véges, egyszerű, összefüggô gráf, amelyre |V|=1998 (csúcspontjainak száma) $\|E\| = 2525$ és illeszkedési-mátrixának rangja 1999 (a két elemű test fölött).	H
A legfeljebb tíz jegyű számok száma a kettes számrendszerben 1024.	I
A 20 csúcspontú teljes gráf él szerinti összefüggési száma:19	I
A 2001 csúcspontú teljes gráfnak 2001000 éle van. $\frac{n(n-1)}{2}$	I
Az oktaédert 12 lap határolja.	H
Azok és csak azok a véges egyszerű gráfok izomorfak, amelyeknek csúcspontjaiknak a fokszáma rendre egyenlők.	H
Bármely Euler-gráfban van legalább egy másodfokú pont.	H
Ha a G egyszerű összefüggő gráfnak 201 db. páratlan fokú csúcspontja van, akkor G lefedéséhez	I

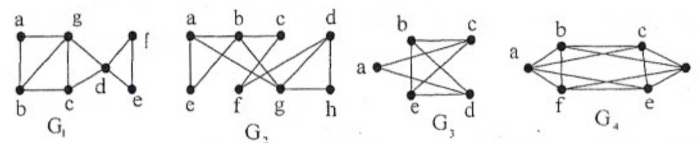
101 db. nyílt vonal szükséges.	
Ha a G véges egyszerű összefüggő gráf bármely csúcspontjának a foka 2000 és éleinek a száma páratlan, akkor G Euler-gráf.	I
Hat különböző elem harmadosztályú ismétléses variációinak a száma 216. 6^3	I
Van olyan G(E,φ,V) gráf, hogy duálisa G'(E',φ',V') és $\|E\|=19$, $\|E'\|=20$.	H
Van olyan 8 csúcspontú gráf, melynek 5 hídja van.	I
Van olyan fagráf, melynek 2001 csúcspontja van, s azok közül pontosan 1848 az elsőfokú csúcspontok száma.	I
Van olyan G(E,φ,V) gráf, melynek komplementere G'(E',φ',V'), és akkor $\|V\|=1896$ és $\|V'\|=896$ (azaz csúcspontjaik száma 1896, ill. 896).	H
A 2001 különböző pozitív osztóinak a száma 8.	I
Két kormányzó párt 20 miniszteri és 30 államtitkári poszton 600 féleképpen tud megosztozni	I
A K_5 teljes gráfnak tetszőleges irányítása mellett van irányított Hamilton köre.	H
A legfeljebb négy jegyű számok száma a négyes számrendszerben 256.	I
Az K_{10} teljes gráf kromatikus polinomja $x(x-1)^9$.	H
Ha a G egyszerű legalább száz pontú gráf bármely csúcspontjának a foka 8, akkor tartalmaz legalább egy kört.	I
Van olyan egyszerű gráf, amelynek van két nem izomorf Hamilton köre:	H
A G erdőnek 5 fája 36 csúcsa és 30 éle van.	H
Van olyan egyszerű gráf, amelynek van két nem izomorf feszítőfája.	I
Bármely véges egyszerű gráfnak létezik feszítôfája.	H
Van olyan egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével, és csúcspontjainak száma 4.	I
A 2001 szögpontú csillag gráf átmérője 2.	I
Ha egy egyszerű legalább három pontú gráfnak bármely csúcspontjának a foka 3, akkor van legalább egy köre.	I
Van olyan egyszerű 8 csúcspontú gráf, amelynek van két nem izomorf Hamilton köre.	H
Az 2100 pozitív osztóinak a száma 36.	I
Bármely síkba rajzolt gráfnak van duálisa.	I
Van olyan G egyszerű gráf, amelynek van két nem izomorf feszítőfája.	I
A három ház három kút gráfnak ($K_{3,3}$) van elsőfokú faktora.	I

```
Fazekas István Valószínűségszámítás_elemei\
Párosítások\
              hálózatokvb.pdf
              Párosítások.rtf
              Bővített változat.doc
              Edmonds példa2..doc
              Diplomamunka összesítve.doc
              Diplomamunka 1..doc

Legrövidebb_utak\
Modern_Alkalmazások\
              bevprog[1].pdf
              Párhuzamos_Algoritmusok_Iványi_A.pdf
              Hibalista[1]_Infalg1E_hez.pdf
              Infalg1E[1].pdf

Fák_algoritmusok\
                 binarisfak\
              ~$ateljes.doc
              Minimális feszít.doc
              bfateljes.doc
              Fák.rtf
              Fák_II.doc

Folyamok_hálózatok\
     Dinicalgor\
          Az_Edmonds_Karp_algoritmus\
          Összehangolt támadási feladat.doc
          PETRI_T_Márk.doc
          hálózatokvb.pdf
          Vezető_folyamok_szinkron_gyűrűben.doc
          NÉMETH PÁL.doc
          Ford-Fulkerson.doc
          Ford.doc
          Hálózati folyamok szöveg.doc
          A biton sorozat4.doc
          Fák és Hálózatok prezentáció.ppt
          párosítások_folyamok.ps
          Szinkron hálózatok.doc

Algebra\
Tételso+irodalom r Gráf elm. _Alkalmazásai  2009_febr.-6.doc
Tételsor Gráf elm. _Alkalmazásai  2009_febr.-6.doc
Fazekas István Valószínűségszámítás.htm
Matroidokalkjav.doc
```

	Név és szak; kódszó (6 betű); Sorszám:	
	Ha a következő állítások valamelyike ön szerint igaz, akkor a sor végi keretbe I-t, ha nem igaz, akkor N-t írjon!	I/N
1	Ha a G véges egyszerű összefüggő gráf bármely csúcspontjának a foka 2004, akkor G Euler-gráf.	I ?
2	A három-ház három-kút gráf kromatikus indexe 6.	H ?
3	Van olyan 2007 csúcspontú gráf, melynek 2002 hídja van.	
4	Ha G(E,φ,V) véges egyszerű, összefüggő és $\lvert E\rvert=98$, $\lvert V\rvert=22$, akkor G alapvágatainak a száma 60.	
5	Az $(x+y+z)^{2007}$ polinom $x^{1000}y^{1000}z^{7}$ tagjának az együtthatója $\frac{2007!}{1000!1000!7!}$.	
6	Ha a G egyszerű összefüggő gráfnak 2007db. páratlan fokú csúcspontja van akkor G éleinek a lefedéséhez 1702 db. nyílt vonal elegendő.	I
7	Bármely 2007élű gráf illeszkedési mátrixának a rangja kisebb mint 2000. (A mátrixot Z_2 felett tekintve.)	
8	A ötdimenziós szimplex gráfjának tetszőleges irányítása mellett van 5 élből álló irányított útja.	
9	Van olyan G(E,φ,V)gráf, hogy duálisa G'(E',φ',V') és $\lvert E\rvert=2007$ $\lvert E'\rvert=481$. (azaz éleik száma 2007ill. 481).	
10	Van olyan G(E,φ,V) gráf, melynek komplementere G'(E',φ',V'), $\lvert E\rvert=2007$és $\lvert E'\rvert=481$ (azaz éleik száma 2007 ill. 481).	
11	Bármely matroidnak van bázisa.	
12	Bármely G síkba rajzolható gráf vágatainak a G duálisában körök felelnek meg.	I
13	Van olyan 17-kritikus gráf, melynek a csúcsainak a száma 2007.	H ?
14	Ha a G_1 és G_2 egyszerű és összefüggő gráfok A_1 és A_2 csúcsmátrixaihoz létezik olyan P permutáció mátrix, melyre ($A_1=PA_2P^{-1}$), akkor G_1 és G_2 izomorf.	I
15	Ha G egyszerű és összefüggő és minden csúcspontjának foka 2008, akkor van G-nek Hamilton-köre.	H ?
16	Az 5x5-ös permutáció mátrixok száma 120.	I ?
17	Van olyan fagráf, melynek 2008 csúcspontja van, s azok közül pontosan 1956 az elsőfokú csúcspontok száma.	I
18	Az n(2006,2007,2008) Ramsey-féle szám 2009-cel egyenlő.	
19	Az $u_n=2u_{n-1}-u_{n-2}$ rekurzív sorozat karakterisztikus polinomjának pontosan 2 különböző gyöke van.	H
20	Van olyan 3 csúcspontú gráf, mely izomorf a komplementerével.	H
21	Van olyan síkba rajzolható G(E,φ,V) gráf, melyre teljesül, hogy $V(G)=n=7, E(G)=q=12$ és tartományainak t száma $t=7$.	I
22.	Jelölje $E=\{1,2,3,4,\ldots,2006,2007,2008,2009\}$ számhalmazt. I jelölje E $P(E)$ hatványhalmazának azt a részhalmazát, amelynek bármely $X\in I$ esetén az $\lvert X\rvert\le 4$ (azaz X-nek legfeljebb 4 eleme van), ekkor $M=(E,I)$ matroid.	

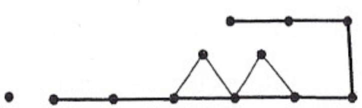
*A teszt hibátlan kitöltéséért 30p. jár a 10. helyes választól kezdve minden jó válaszért 3 pontot kap. A tételek közül **egyet és csak egyet** kell kidolgoznia.* A jól kidolgozott tételért 30 pont jár.

Feladatok: 1. Határozza meg a következő gráfok élösszefüggési számait ($\varepsilon(G_i)$,i=1,2,3,4), illetve pont összefüggési számait ($\kappa(G_i)$,i=1,2,3,4).



2.Határozza meg az {1,2,3,…,2007,2008} számok közül azok számát,amelyek az 3,7,11 számok közül legalább eggyel oszthatók..

3. Írja fel a következő gráf kromatikus polinomját.



4. A 32 lapos magyar kártyából hányféle módon lehet kiválasztani 5 olyan lapot, amelyek színe között pontosan csak két szín szereppel!

Tételek:1. Gráfok síkba rajzolhatósága, Euler-formula.

2. Rekurzív sorozatok.   Debrecen, 2007. december 28.

Tételsor+irodalom: Gráfelmélet Alkalmazásai (2009)

1. Gráfok megadása él listával, mátrixxal, ritka ill. sűrű-gráf fogalma, rendező hálózatok, biton rendezés (D. Knuth, I. köt.2.1.-2.3.,249-389. old; III. köt. 5.3.4., 238-264 old., Cormen és trs.; Új Algoritmusok, VII.27.601-618. old.)
2. Gráfok szélességi bejárása, szélességi kereső fa, komponensek meghatározása, Dijkstra algoritmusa. (Cormen és trs.; Új Algoritmusok,VI.22.2.,461-469 old., VI.24.3.,512-517 old.
3. Élsúlyozott gráfok, negatív körök, gráfok mélységi bejárása, mélységi erdő, Floyd-Warshall algoritmus. (**Rónyai L.,Ivanyos G.,Szabó R.: Algoritmusok**)
4. Euler-vonal meghatározása, Fleury algoritmusa, utazó ügynök problémája, közelítő algoritmusok, P ill. NP probléma fogalma. (Hajnal P.:Gráfelmélet 4., 145-159. old.; Lovász L. és Gács P.: Algoritmusok)
5. Gráfok csúcsainak színezése kromatikus szám, "klikk szám" perfekt gráf, hypergráf színezése.(Béla Bollobás: Combinatorics,Cambridge Univ. Press,1986., §7-.§15.45-122)
6. Kromatikus polinom, kromatikus redukció tétele, mohó színezési algoritmus, reguláris gráfok. (CD-n, R. Diestel, Graph T. 5.111-139. p.)
7. Hálózat, folyam fogalma, minimális vágás, maximimális folyam , Ford_Fulkerson algoritmus, egészségi feltétel. (E. L. Lawler;Komb…,4.f.105-169. old.; Barabási A. L.: Behálózva, CD)
8. Gráfok faktorai, páros gráfok, párosítás tetszőleges gráfokban. Alternáló utak módszere. (L. Lovász and M. D. Plummer; *Matching Theory*)
9. Gráfok beágyazásai, minimális súlyú feszítőfák, Kruskal és Prim algoritmusa.(Katona Gyula Y., Recski András, Szabó Csaba (2002) "A számítástudomány alapjai", Typotex Kiadó, Budapest)
10. Ramsey számok, véletlen gráfok. (Bollobás B.: Random Graphs, Cambridge Univ. Press, 2001.,498 p., Lovász L. és Vesztergombi K.: Discrete Mathematics, Lecture Notes, Yale University, Spring 1999 , CD-n megvan az angol nyelvű változat, s magyarul megjelent a Typotex-nél)

Irodalom

Andrásfai Béla, **Gráfelmélet (Folyamok, Mátrixok),** ***Akadémiai Kiadó Budapest 1983., Polygon , Szeged, 1994.***

Andrásfai Béla, **Ismerkedés a gráfelmélettel ,** ***Tankönyvkiadó Budapest 1971,1973, Introductory graph theory, Pergamon Press New York 1977.0***

Barabás Albert-László, **Behálózva: a hálózatok új tudománya. Magyar Könyvklub, Budapest,2003**

Bollobás Béla, **Graph Theory,** ***Springer-Verlag New Zork 1979.***

Bóna, Miklós, **A walk through combinatorics. An introduction to enumeration and graph theory.** ***With a foreword by Richard Stanley. (English), Singapore: World Scientific. xviii, 406 p. \sterling 48.00, \$ 123.00/hbk; \sterling 29.00, \$ 74.00/pbk (2002).***

Busacker, R.G. és Saaty,T.L., **Véges gráfok és hálózatok,** ***Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1969.***

Cormen,Thomas H., Leiserson,Charles E., Rivest RonaldL.: **Algoritmusok,** ***Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1997.***

Cormen,Thomas H., Leiserson,Charles E., Rivest RonaldL., **Új Algoritmusok,** ***Budapest 2004.***

Diestel Reinhard: **Graph Theory (Second Edition),** ***Springer,2000.***

Hajnal Péter, **Összeszámlálási problémák.,** ***Polygon , Szeged, 1997.***

Hajnal Péter, **Gráfelmélet.,** ***Polygon , Szeged, 1997.***

Hajnal Péter, **Elemi Kombinmatorikai Feladatok.** ***Polygon , Szeged, 1997.***

Herbert S. Wilf, **Algorithms and Complexity (Electronic edition, 1994)**

R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász (Eds.), **Handbook of Combinatorics** ***(Springer 1996)***

Gross, Jonathan L.; Yellen, Jay, **Handbook of graph theory.** ***(English),Boca Raton, FL: CRC. 1176 p. \$ 119.95; \sterling 79.99 (2003).***

G. Gutin & J. Bang-Jensen, **Digraphs: Theory, Algorithms and Applications** ***(2000)***

T.R. Jensen & B. Toft, **Graph Coloring Problems** ***(Wiley 1995)***

Katona Gyula Y.,Recski András,Szabó Csaba: **A számítástudomány alapjai,** ***Typotex Kiadó,Budapest 2002.***

Donald E. Knuth: **A számítógép-programozás művészete** ***(The Art of Computer Programming), Addison-Wesley Professional***

Első kötet: **Alapvető algoritmusok** ***(Fundamental Algorithms), második kiadás, 1994, Budapest, Műszaki Könyvkiadó***

Második kötet: **Szeminumerikus algoritmusok** ***(Seminumerical Algorithms), második kiadás, 1994, Budapest, Műszaki Könyvkiadó***

Harmadik kötet: **Keresés és rendezés** ***(Keresés és rendezés), második kiadás, 1994, Budapest, Műszaki Könyvkiadó***

Lawler, Eugene L., **Kombinatorikus optimalizálás: hálózatok és matroidok,** ***Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1982.***

Lovász L., **Combinatorical problems and exercises** ***Akadémiai Kiadó Budapest és North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford 1979***

Lovász L., **Kombinatorikai problémák és feladatok,** ***Typotex Kiadó,Budapest 1999.***

Lovász L. és Gács P., **Algoritmusok,** ***Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.***

L. Lovász & M.D. Plummer, **Matching Theory** ***(North-Holland 1986)***

Lynch N. A., **Osztott algoritmusok.** ***Kiskapu Kiadó, Debrecen, 2002.***

Mayeda W., **Alkalmazott Gráfelmélet,** ***Műszaki Könyvkiadó Budapest 1976.***

Merria R., **Graph Theory,** ***John Wiley&Sons, 2001***

B. Mohar & C. Thomassen, **Graphs on Surfaces** ***(Johns Hopkins 2001)***

Ore,O. **A gráfok és alkalmazásaik,** ***Gondolat, Budapest 1972.***

Recski, András, **Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics.** ***(English),Budapest: Akadémiai Kiadó. xiii, 531 p. (1989).***

Rónyai L.,Ivanyos G.,Szabó R., **Algoritmusok,** ***Typotex,Budapest, 1998.***

Thulasiraman K and Swamy M.N.S., **Graphs: Theory an algorithms,** ***John Wiley & Sons, INC. New York, 1992***

A következő web helyeken sok gráfelmélettel kombinatorikával kapcsolatos információt találhat. Továbbá kombinatorikával foglalkozó (angol esetleg más nyelvű) könyvek elektronikus kiadása is megtalálható, melyek szabadon letölthetők és kinyomtathatók.

http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html,

http://www.combinatorics.org/

http://lovelace.thi.informatik.uni-frankfurt.de/~jukna/EC_Book/links.html ***e címeken több gráfelmélettel***

http://www.utm.edu/departments/math/graph/

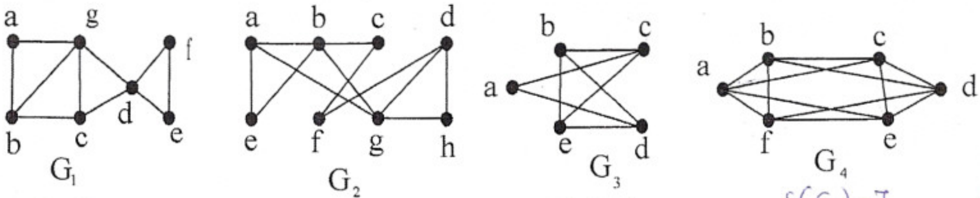
	Név: Tóthné Simegi Adrienn Sorszám:	9.
	Ha a következő állítások valamelyike ön szerint igaz, akkor a sor végi keretbe I-t, ha nem igaz, akkor N-t írjon!	I/N
1.	A 2011 csúcspontú cimkézett fák száma 2011^{2009}. u^{u-2}	H
2.	A ötdimenziós szimplex gráfjának tetszőleges irányítása mellett van 5 élből álló irányított útja.	I
3.	A teljesen particionált $K_{4,4,4,4,4}$ gráf kromatikus száma $\chi(K_{4,4,4,4,4})=5$.	H
4.	Az $u_n=2u_{n-1}-u_{n-2}$ rekurzív sorozat karakterisztikus polinomjának pontosan 2 különböző gyöke van.	H
5.	Az n(2010,2010) Ramsey-szám 2009-cel egyenlő.	I
6.	Bármely G síkba rajzolható gráf vágatainak a G duálisában körök felelnek meg.	H
7.	Ha a $G_1(E_1,\varphi_1,V_1)$ és a $G_2(E_2,\varphi_2,V_2)$ gráfok fokszám sorozata $(3,3,3,3,3,3,3,3)$, akkor a $G_1(E_1,\varphi_1,V_1)$ és a $G_2(E_2,\varphi_2,V_2)$ gráfok izomorfak.	I
8.	Ha a G egyszerű összefüggő gráfnak 2009db. páratlan fokú csúcspontja van akkor G éleinek a lefedéséhez 1702 db. nyílt vonal elegendő.	H
9.	Ha a G véges egyszerű összefüggő gráf bármely csúcspontjának a foka 2007, akkor G Euler-gráf.	H
10.	Ha a G_1 és G_2 egyszerű és összefüggő gráfok $\boldsymbol{A_1}$ és $\boldsymbol{A_2}$ csúcsmátrixaihoz létezik olyan $\boldsymbol{P}$ permutáció mátrix, melyre $(\boldsymbol{A_1=PA_2P^{-1}})$, akkor G_1 és G_2 izomorf.	H
11.	Ha G egyszerű és összefüggő és minden csúcspontjának foka 2010, akkor van G-nek Hamilton-köre.	I
12.	Fa gráf bármely két különböző csúcspontja között egy és csak egy út van.	I
13.	Létezik olyan 2008 csúcspontú fa gráf, melynek fokszám sorozata $\left(\underbrace{3,3,\dots,3}_{600},\underbrace{2,2,\dots,2}_{806},\underbrace{1,1,\dots,1}_{602}\right)$	I
14.	Létezik 2010 csúcspontú és 1222 átmérőjű fa.	H
15.	Létezik olyan 2010 csúcspontú $G(E,\varphi,V)$ egyszerű gráf, melynek kromatikus száma $\chi(G)=2$ és kromatikus indexe $\chi_e(G)=2007$.	I
16.	Van olyan 17-kritikus gráf, melynek a csúcsainak a száma 2009.	H
17.	Van olyan 3 csúcspontú gráf, mely izomorf a komplementerével.	H
18.	Van olyan fagráf, melynek 2010 csúcspontja van, s azok közül pontosan 1956 az elsőfokú csúcspontok száma.	I
19.	Van olyan G(E,φ,V) gráf, melynek komplementere G'(E',φ',V'), $\lvert V\rvert=100$, $\lvert E\rvert=2010$ és $\lvert E'\rvert=2009$.	H
20.	Van olyan G(E,φ,V) síkba rajzolható gráf, melyre teljesül, hogy $V(G)=n=7, E(G)=q=12$ és tartományainak t száma $t=7$.	I

A teszt hibátlan kitöltéséért 30p. jár a 10. helyes választól kezdve minden jó válaszért 3 pontot kap. Egy-egy feladat megoldáért 10 pont jár. Összesen 40 pontot szerezhet.

0

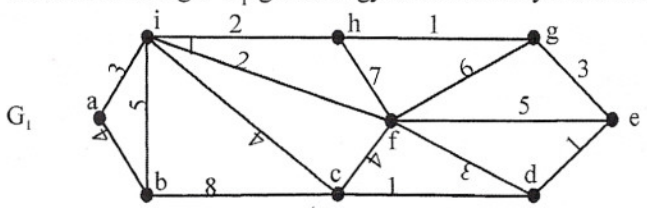
Feladatok:

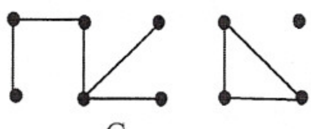
1. Határozza meg a következő gráfok élösszefüggési számait ($\varepsilon(G_i)$,i=1,2,3,4), illetve pont összefüggési számait ($\kappa(G_i)$,i=1,2,3,4).



$\varepsilon(G_1)=6$ $\varepsilon(G_2)=3$ $\varepsilon(G_3)=8$ $\varepsilon(G_4)=7$ 0

2. Határozza meg a G_1 gráfnak egy minimális súlyú feszítőfáját.





3. Írja fel a G_{chr} gráf kromatikus polinomját.

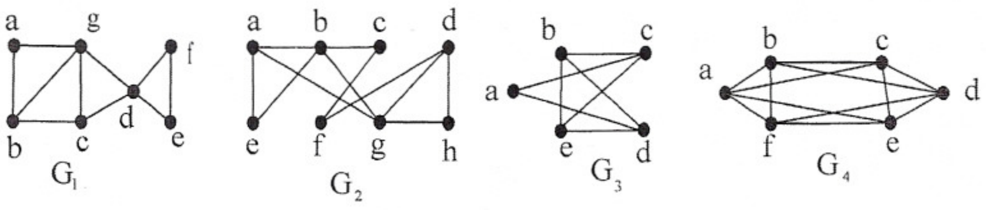
Debrecen, 2009. február 6.

	Név: Sorszám:	
	Ha a következő állítások valamelyike ön szerint igaz, akkor a sor végi keretbe I-t, ha nem igaz, akkor N-t írjon!	I/N
1.	A 2011 csúcspontú cimkézett fák száma 2011^{2009}.	
2.	A ötdimenziós szimplex gráfjának tetszőleges irányítása mellett van 5 élből álló irányított útja.	
3.	A teljesen particionált $K_{4,4,4,4,4}$ gráf kromatikus száma $\chi(K_{4,4,4,4,4})=5$.	
4.	Az $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$ rekurzív sorozat karakterisztikus polinomjának pontosan 2 különböző gyöke van.	
5.	Az n(2010,2010) Ramsey-szám 2009-cel egyenlő.	
6.	Bármely G síkba rajzolható gráf vágatainak a G duálisában körök felelnek meg.	
7.	Ha a $G_1(E_1,\varphi_1,V_1)$ és a $G_2(E_2,\varphi_2,V_2)$ gráfok fokszám sorozata $(3,3,3,3,3,3,3,3)$, akkor a $G_1(E_1,\varphi_1,V_1)$ és a $G_2(E_2,\varphi_2,V_2)$ gráfok izomorfak.	
8.	Ha a G egyszerű összefüggő gráfnak 2009db. páratlan fokú csúcspontja van akkor G éleinek a lefedéséhez 1702 db. nyílt vonal elegendő.	
9.	Ha a G véges egyszerű összefüggő gráf bármely csúcspontjának a foka 2007, akkor G Euler-gráf.	
10.	Ha a G_1 és G_2 egyszerű és összefüggő gráfok $\boldsymbol{A_1}$ és $\boldsymbol{A_2}$ csúcsmátrixaihoz létezik olyan $\boldsymbol{P}$ permutáció mátrix, melyre ($\boldsymbol{A_1=PA_2P^{-1}}$), akkor G_1 és G_2 izomorf.	
11.	Ha G egyszerű és összefüggő és minden csúcspontjának foka 2010, akkor van G-nek Hamilton-köre.	
12.	Fa gráf bármely két különböző csúcspontja között egy és csak egy út van.	
13.	Létezik olyan 2008 csúcspontú fa gráf, melynek fokszám sorozata $\left(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{600},\underbrace{2,2,\ldots,2}_{806},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{602}\right)$	
14.	Létezik 2010 csúcspontú és 1222 átmérőjű fa.	
15.	Létezik olyan 2010 csúcspontú $G(E,\varphi,V)$ egyszerű gráf, melynek kromatikus száma $\chi(G)=2$ és kromatikus indexe $\chi_e(G)=2007$.	
16.	Van olyan 17-kritikus gráf, melynek a csúcsainak a száma 2009.	
17.	Van olyan 3 csúcspontú gráf, mely izomorf a komplementerével.	
18.	Van olyan fagráf, melynek 2010 csúcspontja van, s azok közül pontosan 1956 az elsőfokú csúcspontok száma.	
19.	Van olyan G(E,φ,V) gráf, melynek komplementere G'(E',φ',V'), $\lvert V\rvert=100$, $\lvert E\rvert=2010$ és $\lvert E'\rvert=2009$.	
20.	Van olyan G(E,φ,V) síkba rajzolható gráf, melyre teljesül, hogy $V(G)=n=7, E(G)=q=12$ és tartományainak t száma $t=7$.	

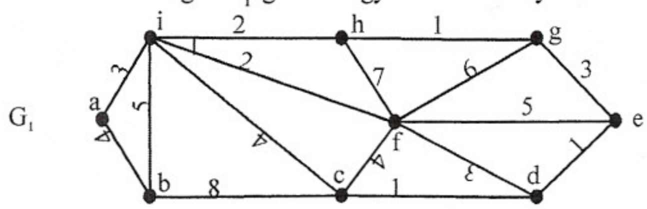
A teszt hibátlan kitöltéséért 30p. jár a 10. helyes választól kezdve minden jó válaszért 3 pontot kap. Egy-egy feladat megoldáért 10 pont jár. Összesen 40 pontot szerezhet.

Feladatok:

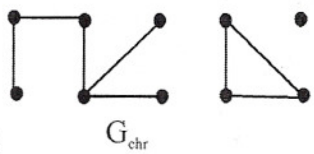
1. Határozza meg a következő gráfok élösszefüggési számait ($\varepsilon(G_i), i=1,2,3,4$), illetve pont összefüggési számait ($\kappa(G_i), i=1,2,3,4$).



2. Határozza meg a G_1 gráfnak egy minimális súlyú feszítőfáját.



3. Írja fel a G_{chr} gráf kromatikus polinomját.



Debrecen, 2009. február 6.

$$\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}=\frac{k^2-k+n^2-nk-n-nk+k^2+k}{2}=$$
$$=\frac{2k^2+n^2-2nk-n}{2}=\frac{n^2-n-2k(n-k)}{2}\le\frac{n^2-3n+2}{2}$$

1. Maximálisan hány éle lehet egy *n* pontú, nem összefüggő gráfnak?

Ha a gráf nem összefüggő, akkor legalább két komponensből áll. Ha több mint két komponensből áll, akkor valamelyik két komponens között még húzhatunk be éleket, ezzel az élszámot növeljük és a gráf továbbra sem lesz összefüggő. Tehát a maximális élszámú nem összefüggő gráfban két komponens van. Ha ezek pontszáma k és n–k (feltesszük, hogy k≤n-k), akkor az élszám kétszeresének maximuma
k2 – k + (n–k)2 – n + k = n2 – n – 2k(n–k) ≤ n2 – 3n + 2.
Tehát a nem összefüggő n pontú gráf élszámának maximuma (n2 – 3n + 2)/2.

2. Mutassuk meg, hogy ha egy összefüggő gráf bármely köréből elhagyunk egy élt, akkor összefüggő marad.

Azt kell belátnunk, hogy ha egy körből elhagyunk egy *xy* élt, akkor továbbra is bármely két pont között megy út. Az *x* és *y* között továbbra is megy út: ez éppen a kör megmaradt éleiből áll. Legyen tehát *a* és *b* a gráf két pontja. (Ha egy gráf két pontja között van séta, akkor van út is,**másrészt:** ha egy gráfban van A-t és B-t összekötő út és van B-t és C-t összekötő út, akkor van A-t és C-t összekötő út is. Van olyan A-t C-vel összekötő út is, amely csak e két út pontjait és éleit „használja".) szerint elég belátni, hogy van közöttük séta. Az eredeti gráfban ment közöttük út. Ha ez az út nem tartalmazta az *xy* élt, akkor továbbra is benne van a gráfban. Ha tartalmazta az *xy* élt, akkor helyettesítsük az élt azzal az *xy*-úttal, amely a kör megmaradt éleiből áll. Így egy sétát kapunk a két pont között, amely nem használja az *xy* élt, tehát továbbra is van séta a gráfban *a* és *b* között.

3. Bizonyítsuk be, hogy egy fában bármely két út közös része vagy üres, vagy egy út.

Ha az állítás nem volna igaz, akkor két útnak volna két közös pontja, amelyeket két különböző út kötne össze, és ez (Egy gráf pontosan akkor fa (körmentes összefüggő gráf), ha bármely két pontja között pontosan egy út vezet.) szerint lehetetlen.

4. Anna és Béla a következő gráfjátékot játssza n ponton: Felváltva húznak be éleket, és az veszít, aki kört zár be. Kinek van nyerő stratégiája?

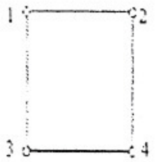
Az veszít, akinek az n-edik élt kell behúznia, mert ha még csak legfeljebb n–2 él van behúzva, akkor a gráf (F) szerint biztosan nem összefüggő. Két különböző komponensbe tartozó élét összekötve biztosan nem zárunk be kört, így az n–1-edik él behúzásáig nem kell kört bezárnunk. Aki viszont az n-edik élt kényszerül behúzni, az biztosan hoz létre kört, mert n élű gráf a nem lehet körmentes.

5. Mutassuk meg, hogy egy véges gráf és a komplementere közül legalább az egyik összefüggő.

Ha a gráf összefüggő, kész vagyunk. Ha nem az, akkor a pontjai két nem üres osztályba sorolhatók úgy, hogy a két osztály pontjai között nem fut él. Legyen a két osztály A és B. Ekkor minden A-t B-vel összekötő él a gráf komplementerében van. Ezért A bármely pontjából el lehet jutni B bármely pontjába éllel és onnan vissza A bármely másik pontjába. Ezzel azt az erősebb állítást is beláttuk, hogy ha egy gráf nem összefüggő, akkor komplementere 2-átmérőjű. Vagyis vagy összefüggő a gráf is, a komplementere is, vagy az egyik nem összefüggő, a másik 2-átmérőjű.

6. Egy társaságban öt házaspár van jelen. Azok, akik nem ismerik egymást, bemutatkozásul kezet fognak egymással. Kovács úr megkérdezi minden jelenlevőtől, hogy hány emberrel fogott kezet és csupa különböző számot kap válaszul. Hány emberrel foghatott kezet egy feleség és a férje ?

A házastársával senki nem fog kezet, ezért a kilenc megkérdezett csak úgy mondhat csupa különböző számot, ha rendre 0,1,2,3,4,5,6,7,8-at mondanak. Aki nyolcat mond, az a házastársán kívül mindenkivel kezet fogott, így nullát csak a házastársa mondhatott. Aki hetet mondott, az a házastársán és a nulláson kívül mindenkivel kezet fogott, így csak az ő házastársa mondhatott egyet (a többiek már legalább kettővel: a nyolcassal és a hetessel kezet fogtak).Az eljárást folytatva azt kapjuk, hogy a hatos és a kettes, az ötös és a hármas házastársak, a négyesnek pedig a házastársa is néggyel fogott kezet. Tehát a két négyes a Kovács-házaspár. Tehát mindketten négy emberrel fogtak kezet.



7. Egy három házaspárból álló társaság együtt vacsorázik egy étteremben. A társaság minden tagja külön-külön érkezik és kezet nyújt a jelenlevőknek, kivéve saját házastársát. Amikor mind a hatan megérkeztek, Kovácsné megkérdezi a többiektől, ki hány embernek nyújtott kezet, és mindenkitől más számot kap válaszul. Hányadiknak érkezett Kovácsné?

A házastársával senki nem fog kezet, ezért az öt megkérdezett csak úgy mondhat csupa különböző számot, ha rendre 0,1,2,3,4 volt a válaszuk. Ez összesen tíz kéznyújtás, viszont összesen $6 \cdot 4/2=12$-szer nyújtottak kezet (egy kézfogásnál mindkét fél kezet nyújt!). Vagyis Kovácsné kétszer nyújtott kezet, tehát érkezésekor ketten voltak már ott, és esetleg még házastársa. Vagyis harmadiknak vagy negyediknek érkezhetett. Mindkét eset lehetséges. Ha például az érkezési sorrend: A,B,C,a,b,c (az azonos betűk jelölik a házastársakat), akkor az érkező kéznyújtásainak száma: 0,1,2,2,3,4. Kovácsné lehet C vagy a.

8. Egy táncos estén négy fiú és négy lány vett részt. Megkérdeztük a lányokat, hogy hány fiúval táncoltak és a következő válaszokat kaptuk: 3, 1, 2, 2. Megkérdeztük a fiukat is, hogy hány lánnyal táncoltak és a következő válaszokat adták: 2, 2, 3, 2. Mutassuk meg, hogy valaki nem az igazat mondta.

A lányok szerint összesen $3+1+2+2 = 8$ féle táncospár volt, viszont a fiúk szerint $2+2+3+2 = 9$, ez ellentmondás, tehát legalább egy valaki biztosan tévedett.

9. a) Egy táncos estén 21 fiú és 21 lány vett részt. Minden fiú vagy négy lánnyal vagy két lánnyal táncolt, kivéve egyet, aki hat lánnyal táncolt. Lehetséges-e, hogy minden lány három vagy öt fiúval táncolt?

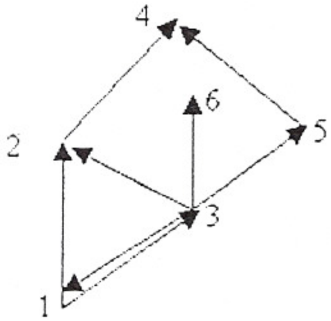
   b) Egy 21 tagú társaságból mindenki két vagy négy másiknak írt levelet, kivéve egyet, aki hat társának írt levelet. Lehetséges-e, hogy mindenki három vagy öt levelet kapott?

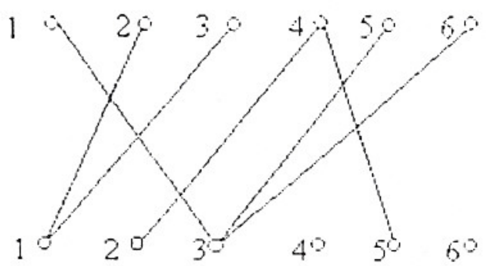
a) Az első esetben a lányok adatait összeadva azt kapjuk, hogy biztosan páros sok táncospár alakult ki az este folyamán, hiszen 21 darab páros számot kell összeadnunk, hogy megkapjuk az összes táncospár számát. Ha viszont minden fiú három vagy öt lánnyal táncolt volna, akkor az ő adataikat összeadva páratlan sok páratlan számot kellene összeadnunk, s így biztos páratlan számot kapnánk, ami ellentmondás volna.
b) Ez a feladat szinte ugyanaz, mint az előző. Ha azt nézzük, hogy ki hány levelet írt (ha valaki egy társának több levelet is írt, azt is csak egynek számoljuk), akkor azt kapjuk, hogy összesen páros sok levelet írtak. Ha viszont mindenki három vagy öt levelet kapna, akkor a kapott levelek száma páratlan lenne, tehát összesen nem ugyanannyi levelet írtak volna, mint amennyit kaptak. (Feltettük, hogy a postán nem kallódik el levél.)

10. Az előző feladat a) részét egy ún. „páros gráffal" szemléltethetjük: az olyan gráfot nevezzük páros gráfnak, amelynek csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle két különböző osztálybeli pontot kössön össze. (Jelen esetben a két csúcsosztály: a fiúk „osztálya" és a lányok „osztálya", minden táncospár egy fiúból és egy lányból áll.)

A feladat b) részét egy irányított gráffal szemléltethetjük: minden levél egy él, amelynek kezdőpontja az, aki írta, végpontja az, aki kapta. A feladat azt sejteti, hogy az irányított gráfok és a páros gráfok között szoros megfeleltetéses kapcsolat van. Mutassuk meg, hogy ez valóban így is van!

Minden irányított gráfhoz hozzárendelhető egy páros gráf a következőképpen: az irányított gráf pontjait megduplázzuk. Az egyik „osztály" lesz a kezdőpontok halmaza, a másik osztály lesz a végpontok halmaza. Tehát minden irányított élnek megfeleltetjük a páros gráf egy irányítatlan élét, amely a megfelelő kezdőpontból (az első osztályba tartozó pontból) indul ki és a megfelelő végpontba (a második osztályba tartozó pontba) érkezik. Vagyis: számozzuk meg az irányított gráf pontjait 1-től n-ig, majd a páros gráf mindkét osztályának pontjait is számozzuk meg 1-től n-ig. Az i-edik pontból a j-edik pontba mutató irányított élnek a páros gráfban azt az élt feleltetjük meg, amely az első osztály i-edik pontját a második osztály j-edik pontjával köti össze. Nyilvánvaló, hogy erről a páros gráfról „visszaolvasható" az eredeti irányított gráf.





Másrészt így mindig olyan páros gráfot kapunk, amelynek két osztályában ugyanannyi pont van. Vagyis: *a megadott megfeleltetés egyértelmű megfeleltetés az irányított gráfok és az olyan páros gráfok között, amelyeknek két osztályában ugyanannyi pont van.*

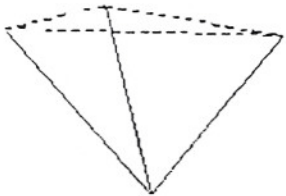
11. Egy összejövetelen 21 gyerek vett részt. Mindegyiktől sorra megkérdeztem, hány osztálytársa van a jelenlévők közt. Az első 13 válaszoló közül öten mondtak hármat, nyolcan négyet. Vajon hány osztálytársa volt jelen a többi gyereknek, ha azt tudjuk, hogy mindegyiküknek volt jelen legalább egy osztálytársa?

Osszuk „klikkekre" a társaságot úgy, hogy az egy osztályba járók alkossanak egy klikket. Aki hármat mond, az egy négy fős klikkbe tartozik, s mivel öten mondtak hármat, legalább két négy fős klikk van. Aki négyet mond, az egy-egy öt fős klikkbe tartozik, s mivel nyolcan mondták, így legalább két öt fős klikk is van, ez már összesen 4+4+5+5=18 ember. A társaságban még hárman vannak, akik e négy klikk egyikébe sem tartoznak. Mindegyikük egy legalább két fős klikkhez csak úgy tartozhat, ha ők egy három fős klikket alkotnak. Tehát a hiányzó számok: még három hármas, két négyes és három kettes.

12. Egy üdülő bármely három lakója között van kettő, aki nem ismeri egymást, de bármely hét között van legalább kettő, aki ismeri egymást. Az üdülés befejeztével mindenki megajándékozza minden ismerősét egy-egy ajándéktárggyal. Bizonyítsuk

be, hogy n lakó esetén legfeljebb 6n ajándéktárgyat adtak át.Fogalmazzuk át az állítást gráfokra!

A feladatot gráfelméleti nyelven elmondva azt kell belátnunk, hogy ha egy n pontú gráfban nincs háromszög (vagyis három olyan pont, amelyek közül bármely kettő össze lenne kötve) és nincs üres hétpontú gráf, akkor legfeljebb $3n$ éle van. Ennél több is igaz: igaz az, hogy minden pont foka legfeljebb hat. Ez azért igaz, mert ha egy gráfban nincs háromszög, akkor bármely pont szomszédai üres gráfot alkotnak. (Az ábrán szaggatott vonal jelzi a nem-éleket.)



Tehát a mi gráfunkban bármely pontnak legfeljebb hat szomszédja lehet. Ebből viszont már következik a feladat állítása: az élszám éppen a fokszámok összegének a fele. Esetünkben a fokszám összeg legfeljebb $6n$, tehát az élszám legfeljebb $3n$.