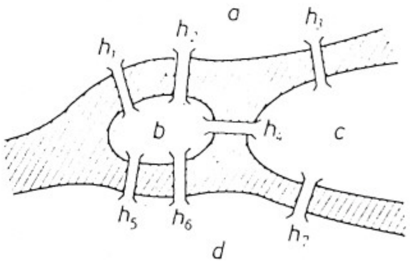
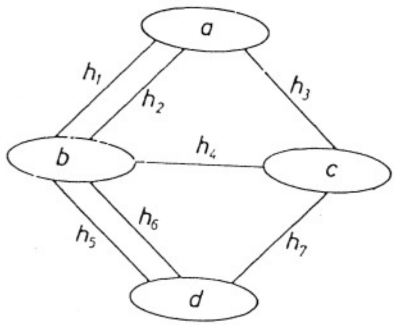
Érdekes gráfelméleti probléma származik Königsberg (a mai szovjet Kalinyingrád) városából a XVIII. századból. A várost átszelő Pregel folyót hét híd ívelte át az 53. ábrán látható módon. A város polgárai vetették fel a kérdést: Lehet-e olyan

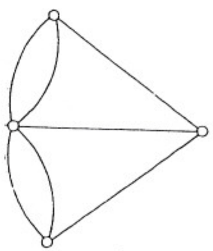


53. ábra



54. ábra

sétát tenni, hogy közben mind a hét hídon pontosan egyszer haladjanak át? A problémát nem tudták megoldani, és azzal a pétervári (leningrádi) akadémia tanárához, a svájci származású matematikushoz, Eulerhez fordultak. Euler a problémára választ adott, azaz bebizonyította, hogy mind a hét hídon pontosan egyszer áthaladó sétaút nem létezik.



55. ábra

Milyen sétaútról is van szó? A folyón át csak a hidakon szabad közlekedni, és minden hídon át kell menni. Azonban az, hogy a partokon vagy a szigeten hogyan közlekedünk, teljesen lényegtelen. A hét előírt útszakasz éppen partokat és szigeteket köt össze. Tehát, ha mondjuk éppen az *a* parton vagyunk, és kívánt sétautat akarunk megtenni, addig nem ronthatunk, míg az *a* parton kószálunk. Csak arra kell ügyelnünk, hogy az *a* partot megfelelően választott hídon hagyjuk el. Ugyanez mondható, ha part helyett pl. *b* szigetet mondunk. Ezért partot és szigetet egyaránt partnak tekintünk. Ennélfogva a feladat szempontjából térképünkről csupán azt kell leolvasnunk, hogy azon hány part szerepel, e partokat hány híd

és milyen módon köti össze. Az 54. ábra térképünkről ennek megfelelően készített vázlat. Ha még azt is észrevesszük, hogy egy-egy partot egy-egy pont is szemléltethet, rajzunkban gráfra ismerhetünk (55. ábra).

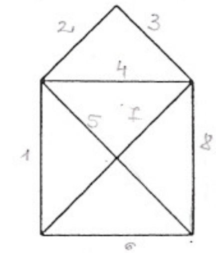
Mármost a königsbergi probléma így is szövegezhető: Be tudjuk-e járni az 55. ábra éleit úgy, hogy minden élen pontosan egyszer megyünk végig? Euler a problémát általánosan is megoldotta. Eredménye alapján eldönthető, hogy egy tetszőleges gráf élei az előbbi módon bejárhatók-e vagy sem, és ha igen, bejárási utasítás is megadható. Erről írt, 1736-ban megjelent dolgozata az első gráfelméleti munka a matematikai szakirodalomban. Euler megoldását e fejezetben tárgyaljuk.

A königsbergi kérdés a következőképpen is fogalmazható: Megrajzolható-e az 55. ábrán látható gráf élrendszere egyetlen ceruzavonással a ceruza felemelése nélkül, ha a gráfpontokat „pontoknak" (és nem karikáknak) rajzoljuk?

Gyakorlatok

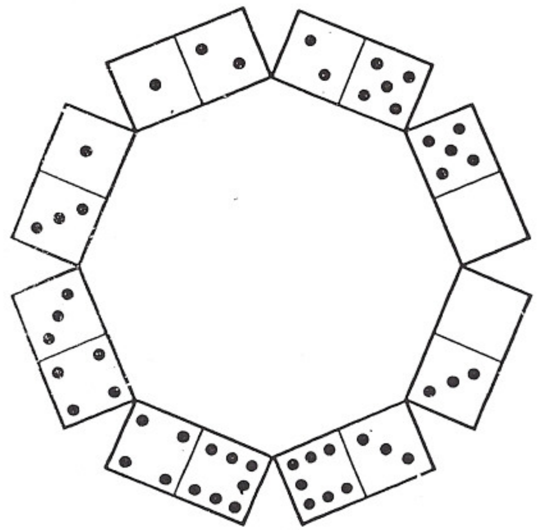
1. Rajzoljuk meg az 56. ábrát egyetlen ceruzavonással a ceruza felemelése nélkül. (Már megrajzolt vonalat keresztezhetünk, érinthetünk, de rajta nem haladhatunk.)

2. Rajzoljunk teljes 7-gráfot egyetlen ceruzavonással a ceruza felemeiése nélkül; a gráfpontok legyenek pontok.



56. ábra

Feladatok



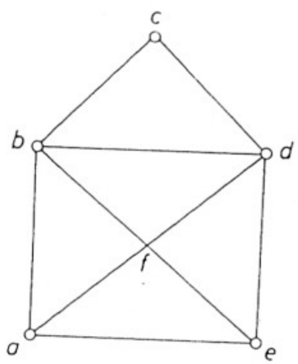
57. ábra

3. Az 57. ábrán körbe rakott dominólapocskákat láthatunk. Bármely két csatlakozó lapocska szomszédos mezőjén megegyeznek a számok. Nevezzük az ilyen elhelyezést *szabályos körlánc*nak. Válasszunk ki egy dominókészletből annyi lapocskát, hogy azokon a 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokból alkotott valamennyi különböző pár előforduljon, de más pár ne. (Tehát duplát nem válasszunk.) Hány lapocskát választottunk ki? Elhelyezhetők-e a kiválasztott lapocskák egyetlen szabályos körláncba?

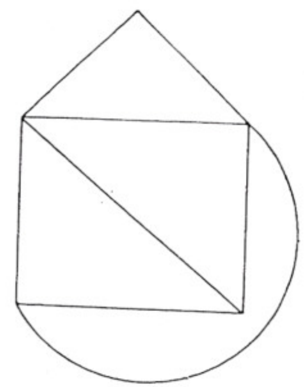
4. Bizonyítsuk be, hogy a königsbergi hét híd mindegyikén pontosan egyszer (ezt így is mondják: „egyrétűen") áthaladó sétaút nem létezik.

3. Igazoljuk, hogy ha egy élt is tartalmazó gráf minden pontjának foka páros, akkor kijelölhetők a gráfban körök úgy, hogy a gráf minden éle e körök közül pontosan egyben szerepeljen.

Mind az 1., mind a 2. gyakorlatot több módon is végrehajthatjuk. Az 56. ábra előírt megrajzolását pl. úgy adjuk meg, hogy az ábrát az 58. ábrán látható gráfnak tekintjük, és felsoroljuk az éleit abban a sorrendben, ahogyan azokat megrajzoljuk, azaz a megrajzolt éleit a rajzolás útját követően bejárjuk. Az éleket jelölő végpontpárokat is abban a sorrendben írjuk le, ahogyan azokat a bejárás során érintjük.

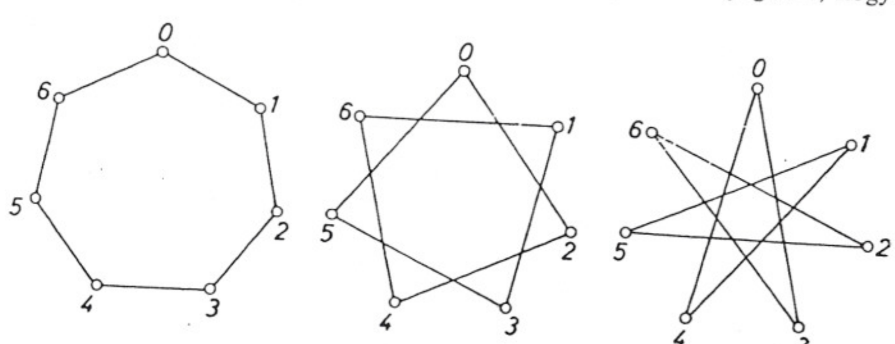


58. ábra



59. ábra

Tehát $\{a, b\}$ a felsorolásban azt jelenti, hogy az élen a-tól b-ig megyünk végig. Az f pontot nem tekintettük gráfpontnak. Így felsorolásunkkal az 56. ábrának csak olyan megrajzolása írható le, amelyben f nem tekinthető vonalak közös pontjának, vagyis mintha pl. az 59. ábra megrajzolását kívántuk volna egyetlen ceruzavonással. Ha az eredeti ábra ezzel a „megszorítással" megrajzolható egyetlen ceruzavonással, akkor e megszorítás nélkül is, esetleg még több módon is. Nyilván lényegtelen, hogy a c pontot gráfpontnak tekintjük-e, vagy csak egy $\{b, d\}$ élre eső pontnak; és ez általában bármely másodfokú pontra mondható.



60. ábra

Ezek után az 58. ábra éleinek egy, az 1. gyakorlatra is választ adó bejárása:

$$\{a, b\},\quad \{b, d\},\quad \{d, c\},\quad \{c, b\},\quad \{b, e\},\quad \{e, d\},\quad \{d, a\},\quad \{a, e\}.$$

Jelöljük a teljes 7-gráf pontjait a 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokkal. Annak megfelelően, hogy pl. a 0 pontból elindulva a 60. ábrán látható három kört járjuk be rendre, a következő sorozatot írhatjuk:

$$\{0,1\},\ \{1,2\},\ \{2,3\},\ \{3,4\},\ \{4,5\},\ \{5,6\},\ \{6,0\},$$
$$\{0,2\},\ \{2,4\},\ \{4,6\},\ \{6,1\},\ \{1,3\},\ \{3,5\},\ \{5,0\},$$
$$\{0,3\},\ \{3,6\},\ \{6,2\},\ \{2,5\},\ \{5,1\},\ \{1,4\},\ \{4,0\}.$$

Az éleket ebben a sorrendben rajzolva, végrehajthatjuk a 2. gyakorlatot.

A fenti sorozatban az éleket jelölő számpárok dominólapocskákat is szimbolizálhatnak. Ekkor a sorozat a lapocskák egy szabályos körláncát adja. Ebben a 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokból alkotott valamennyi különböző pár előfordul. Tehát a 3. feladat alapján kiválasztott dominólapocskák száma annyi, mint a teljes 7-gráf éleinek száma, azaz 21, és e lapocskák elhelyezhetők egyetlen szabályos körláncba. Ezzel megoldottuk a 3. feladatot.

Az 1. és 2. gyakorlat végrehajtása alapján figyeljük meg, hogy egy gráf éleit bejárva, valahányszor egy gráfponton áthaladunk, mindig ahhoz illeszkedő két élvéget járunk be. Tekinthetjük ezeket egymással párosítottnak. Ha a bejárásunk nem a kiindulási pontban fejeződik be (mint az 1. gyakorlatban), akkor az elsőnek és az utolsónak bejárt élvégek pár nélkül maradnak, ha pedig végül a kiindulási pontba érkezünk (mint a 2. gyakorlatban), akkor ezek egymással párosíthatók. Ennek alapján kimondhatjuk, hogy ha egy gráf éleit be tudjuk járni úgy, hogy minden élen pontosan egyszer megyünk végig, akkor a gráf két pontjának foka páratlan, a többié pedig páros, vagy valamennyi pontjának foka páros. Az 55. ábrán látható gráfban négy pont foka páratlan, e gráf élei tehát nem járhatók be a fenti módon. Ezzel megoldottuk a königsbergiek kérdésére választ adó 4. feladatot.

Euler vonal
zárt, nyitott

Az 1. és 2. gyakorlat végrehajtása során szerepet kaptak a következő fogalmak: Ha a G gráf éleinek egy $\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \ldots, \{a_k, b_k\}$ sorozatában G élei nem ismétlődnek és $b_1 = a_2,\ b_2 = a_3, \ldots, b_{k-1} = a_k$, akkor az élsorozatot G egy *gráfvonalának* nevezzük. Gráfvonalunkat $b_k = a_1$ esetén *zárt*nak mondjuk, különben *nyitott*nak. ($k = 1$ esetén a zárt gráfvonal egyetlen hurokélből áll.) A G gráf *Euler-vonalán*, ill. *nyitott Euler-vonalán* G olyan zárt, ill. nyitott gráfvonalát értjük, amelyben G valamennyi éle szerepel.

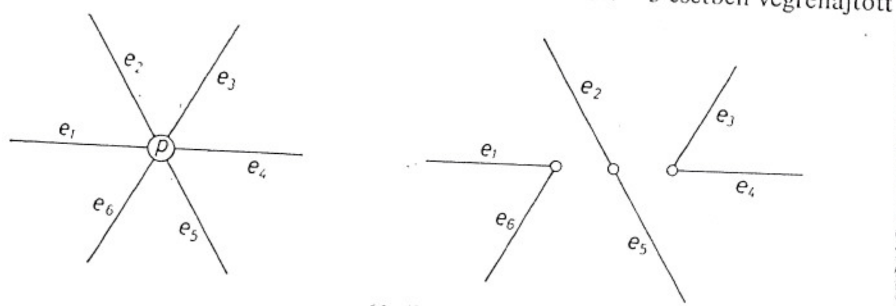
A gráf egy gráfvonalában szereplő élek egyrétű bejárásának, ill. egyetlen vonallal megrajzolásának a módját éppen a gráfvonallal megadott sorrend jelöli ki.

...ovának egy nyitott Euler-vonalát határoztuk meg, a 2. gyakorlatot és a 3. feladatot pedig a teljes 7-gráf egy Euler-vonalának megadásával oldottuk meg. A fentebb elmondottakat most így is fogalmazhatjuk: Ha van a G gráfnak Euler-vonala, akkor G minden pontjának foka páros, ha pedig van G-nek nyitott Euler-vonala, akkor G két pontjának foka páratlan, a többié pedig páros. Tehát az 55. ábrának nincs sem Euler-vonala, sem nyitott Euler-vonala, és ez a 4. feladat megoldását jelenti.

Ezek után felmerülhet a kérdés: Vajon a fenti állítás megfordítható-e, azaz abból, hogy az élt tartalmazó G gráf minden pontjának foka páros, következik-e, hogy van G-nek Euler-vonala, ill. abból, hogy a G gráf két pontjának foka páratlan, a többié pedig páros, következik-e, hogy van G-nek nyitott Euler-vonala? Nem, ugyanis ha egy gráf nem összefüggő, és két komponensének is van éle, akkor nincs a gráfnak sem Euler-vonala, sem nyitott Euler-vonala. A továbbiakban megmutatjuk, hogy összefüggő gráfokra szorítkozva a fenti állítás már megfordítható. Előbb azonban megoldjuk az 5. feladatot.

Tegyük fel tehát, hogy az élt tartalmazó G gráf minden pontjának foka páros. Töröljük G izolált pontjait, és jelöljük a megmaradt gráfot G_0-lal. E gráf minden pontjának foka legalább 2. Az 1. fejezet 23. feladatának állítása szerint G_0-ban létezik egy K_0 kör. Töröljük G_0 élei közül a K_0-ban szereplőket és a törlés után létrejött izolált pontokat. A megmaradt gráfot jelöljük G_1-gyel. E gráf minden pontjának foka ismét legalább 2, tehát létezik G_1-ben egy K_1 kör. Eljárásunkat folytatva, a $K_0, K_1, K_2, \ldots$ körök együttvéve megfelelnek az 5. feladatban mondottaknak.

Az 5. feladat egy másik megoldására a következőképpen juthatunk: A fenti G_0 gráf minden pontjának foka páros, és legalább 2. Minden olyan p pontját, amelynek foka $2k$, ahol $k > 1$, „hasítsuk szét" k számú olyan pontra, amelyek mindegyikéhez két-két él illeszkedik a p-hez illeszkedők közül. (A 61. ábra $k=3$ esetben végrehajtott



61. ábra

„hasítást" illusztrál.) A G_0-ból így nyert G_0' gráfban minden pont foka 2, tehát az 1. fejezet 36. feladatának állítása szerint G_0' minden komponense kör. E körök „megfelelői G_0-ban" éppen egy kívánt körrendszert jelölnek ki.

Az 5. feladat első megoldásában az 1. fejezet 23. feladatának állítását használtuk

fel. E feladatnak nemcsak állítását használva fel, hanem első megoldásának gondolatát követve, bármely csupa páros fokú pontot és legalább egy élt tartalmazó összefüggő G gráfnak kijelölhetjük egy Euler-vonalát, mégpedig bejárásának megadásával: Induljunk el G egy tetszőleges a_1 pontjából, és haladjunk mindig még be nem járt éleken. Ha G egy a_1-től különböző pontjába érkezünk, onnan még be nem járt élen tovább tudunk jutni, hiszen minden pont foka páros. Így csak az a_1 pontba érve akadhatunk el, és ez előbb-utóbb be is következik. Ekkor G egy zárt E_1 gráfvonalát jártuk be. Ha E_1 tartalmazza G minden élét, akkor ez G egy Euler-vonala. Ha van G-nek E_1-ben nem szereplő e éle, akkor az 1. fejezet 26. állítását G-nek E_1 éleit tartalmazó részgráfjára alkalmazva adódik, hogy van olyan E_1-ben nem szereplő éle is, amely E_1-hez csatlakozik, mondjuk az a_2 pontban (a_2 esetleg maga az a_1 pont lesz). Ezen a_2-ből elindulva, és mindig be nem járt éleken haladva, az előbbi érvelésünk szerint csak a_2-ben akadhatunk el. A közben bejárt zárt gráfvonalat jelöljük E_2-vel. Most induljunk a_1-ből, és haladjunk E_1 mentén, de csak a_2-ig. Itt E_1-ről letérve járjuk be E_2-t, majd haladjunk tovább E_1 mentén, annak még be nem járt részén a_1-ig. Ezáltal E_1-et E_2-vel bővítve, ismét zárt gráfvonalat jártunk be. Bővítési eljárásunkat folytatva végül G egy Euler-vonalára jutunk.

Ha egy összefüggő gráf két pontjának foka páratlan, a többié pedig páros, akkor kössük össze a két páratlan fokú pontot egy új éllel. Az ezzel bővített gráfnak az előbbiek szerint van Euler-vonala. Ha töröljük ebből az újólag felvett élt, az eredeti gráf egy nyitott Euler-vonalát nyerjük.

Az eddigiek összefoglalásaként kimondhatjuk az alábbi állításokat:

6. *Ha egy élt is tartalmazó összefüggő gráf minden pontjának foka páros, akkor van a gráfnak Euler-vonala; fordítva pedig, ha egy izolált pontot nem tartalmazó gráfnak van Euler-vonala, akkor a gráf összefüggő, és minden pontjának foka páros.*

7. *Ha egy gráf összefüggő és két pontjának foka páratlan, a többié pedig páros, akkor van a gráfnak nyitott Euler-vonala; fordítva pedig, ha egy izolált pontot nem tartalmazó gráfnak van nyitott Euler-vonala, akkor a gráf összefüggő és két pontjának foka páratlan, a többié pedig páros.*

Ha egy izolált pontot nem tartalmazó gráfnak van Euler-vonala, szokás a gráfot *Euler-gráf*nak is nevezni. A 6. állítás szerint az Euler-gráf mindig összefüggő, és minden pontjának foka páros.

páros és [illegible]

Irányított gráfok

Minthogy minden izolált pont nélküli gráfot tekinthetünk úthálózat vázlatos rajzának, gráfvonalat mindig értelmezhetünk a szóban forgó úthálózat bizonyos részének egyrétű bejárásaként. A gráfvonalban szereplő éleknek megfelelő szakaszok bejárásáról van szó, mégpedig abban a sorrendben, ahogyan a megfelelő élek a gráfvonalban előfordulnak; az éleknek megfelelő szakaszokon a haladási irányt az élek

… megadott sorrendje mutatja. Tehát az, hogy egy úthálózat vázlatos rajza, vagyis gráfja Euler-gráf, azt is jelenti, hogy az úthálózatot be tudjuk járni, miközben minden útszakaszon pontosan egyszer megyünk végig. Adott Euler-vonal meghatározza a bejárás módját is. Azonban járművön közlekedés esetén előfordulhat, hogy az Euler-vonalat követő bejárás nem valósítható meg, ha be akarjuk tartani a közlekedési szabályokat, mert útkereszteződésben az Euler-vonalat követő kanyarodás esetleg nem megengedett, vagy valamely egyirányú útszakaszon az Euler-vonal nem megengedett haladási irányt szab meg.

A haladási irányoknak megfelelően kézenfekvő a gráféleket irányukkal együtt venni számításba. (Ezt megtettük már a 2. fejezetben is, az elektromos hálózatokat szemléltető gráfokban.) Az $\{a, b\}$ élhez rögzített irányt a és b sorrendjének rögzítésével fejezzük ki. Annak hangsúlyozására, hogy a és b sorrendje rögzített, kerek zárójelet használunk: az (a, b) *irányított él* a-hoz és b-hez illeszkedik a-ból b felé vett iránnyal, *kezdőpont*ja a, *végpont*ja b. Az irányt ábrán az élre rajzolt nyíllal szemléltetjük (62. ábra). Ha a nem azonos b-vel, akkor (a, b) nem azonos (b, a)-val, mint ahogyan a síkon koordinátáival megadott (3; 5) és (5; 3) pontok is különbözők. Ha egy gráf minden éle irányított, akkor a gráfot *irányított gráf*nak nevezzük.

62. ábra

irányított gráf

Élt nem tartalmazó gráfot mindig irányítottnak is tekintünk, mert meghatározásunk az ilyen gráftól nem kíván semmit, és természetesen bármi eleget tesz olyan — számára „üres" — követelményeknek, amelyek tőle semmit sem kívánnak. Ilyen lehetőségeket sokszor használunk fel a gráfelméletben állítások egyöntetű megfogalmazására.

gráf irányítása

Gráf irányításán éleinek irányítását értjük. $\vec{G}$ mindig a G gráf valamely irányításával nyert irányított gráfot jelöl.

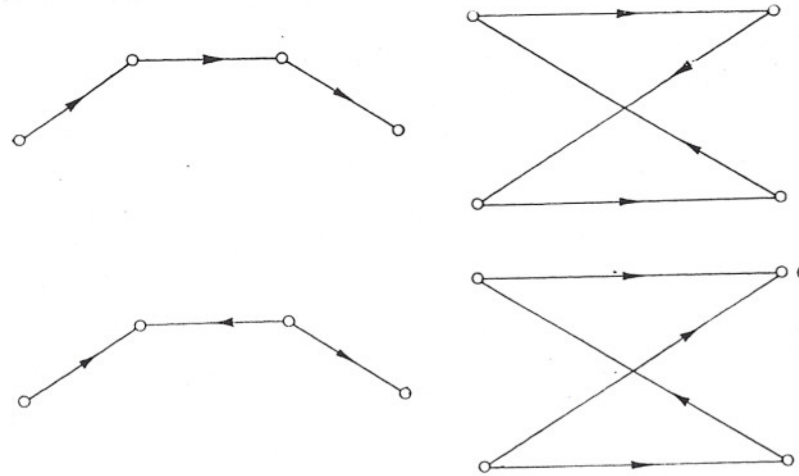
Irányított gráf gráfvonalát úgy értelmezzük, mint a nem irányított gráfét, azaz ha a $\vec{G}$ gráf éleinek egy (a_1, b_1), (a_2, b_2), …, (a_k, b_k) sorozatában $\vec{G}$ élei nem ismétlődnek, és $b_1 = a_2$, $b_2 = a_3$, …, $b_{k-1} = a_k$, akkor az élsorozatot $\vec{G}$ egy *gráfvonal*ának nevezzük. Gráfvonalunkat $b_k = a_1$ esetén *zárt*nak mondjuk, különben *nyitott*nak. A $\vec{G}$ gráf *Euler-vonal*án, ill. *nyitott Euler-vonal*án $\vec{G}$ olyan zárt, ill. nyitott gráfvonalát értjük, amelyben $\vec{G}$ valamennyi éle szerepel. Irányított gráf gráfvonala kijelöli a benne szereplő élek irányítást követő bejárását.

irányított út irányított kör

*Irányított út*nak olyan irányított gráfot nevezünk, amelynek van nyitott Euler-vonala és ez út, ha az irányítást nem tekintjük. Hasonlóan *irányított kör*nek olyan irányított gráfot mondunk, amelynek van Euler-vonala és amely kör, ha az irányítást nem tekintjük. A 63. ábra négy irányított gráfja közül irányított út csupán a bal felső, irányított kör csupán a jobb felső.

Ha a $\vec{G}$ gráf p pontja i számú élének kezdőpontja és j számú élének végpontja, akkor azt mondjuk, hogy p *ki-foka* i és *be-foka* j; jelöléssel:

$$\varphi_{ki}(p) = i, \qquad \varphi_{be}(p) = j.$$



63. ábra

Pl. a 63. ábrán szereplő q, ill. r pontra:

$$\varphi_{ki}(q) = 0, \qquad \varphi_{be}(q) = 2, \qquad \varphi_{ki}(r) = \varphi_{be}(r) = 1.$$

Világos, hogy ha $\varphi(p)$ a p pont foka G-ben, akkor

$$\varphi_{ki}(p) + \varphi_{be}(p) = \varphi(p).$$

Ha az $\vec{L}$ irányított út pontjai a nyitott Euler-vonalát követő sorrendben: $a_1, a_2, \ldots, a_k$, akkor azt is mondjuk, hogy a_1-ből a_k az $\vec{L}$ *úttal elérhető*; továbbá

$\vec{L}$ *kezdőpont*ja a_1, erre: $\quad \varphi_{be}(a_1) = 0 \quad$ és $\quad \varphi_{ki}(a_1) = 1$,

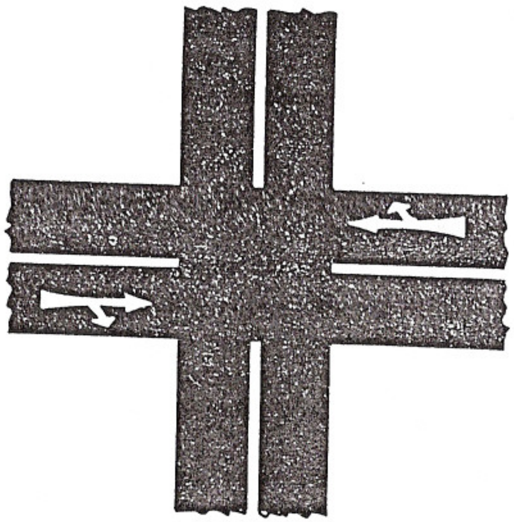
$\vec{L}$ *végpont*ja a_k, erre: $\quad \varphi_{ki}(a_k) = 0 \quad$ és $\quad \varphi_{be}(a_k) = 1$,

$\vec{L}$ *belső pont*jai $a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}$, ezekre $\quad \varphi_{ki}(a_m) = \varphi_{be}(a_m) = 1$.

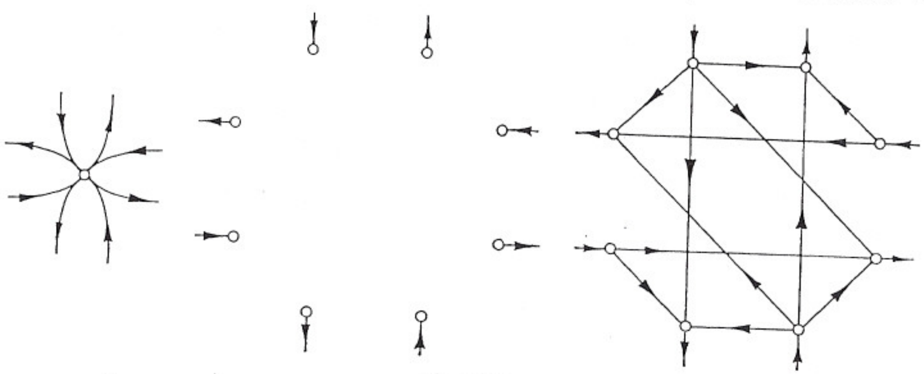
Ha egy irányított kör pontjai egy Euler-vonalát követő sorrendben: $b_1, b_2, \ldots, b_k$, akkor

$$\varphi_{ki}(b_m) = \varphi_{be}(b_m) = 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots, k).$$

Adott útrendszeren a közlekedési szabályok betartása mellett megvalósítható forgalmat alkalmasan felvett irányított gráffal jellemezhetünk a következő módon: Minden útrendszert csupa egyirányú útszakaszból állónak tekintünk, ugyanis egy kétirányú útszakasz — két oldalának megfelelően — felfogható két egyirányúnak is. Feleltessünk meg útkereszteződéseknek gráfpontokat és útszakaszoknak irányukat jelző irányított éleket. Az így kapott gráf azzal az előírással jellemezheti a megengedett forgalmat, hogy mindig gráfélen és csak irányt követően szabad haladni. Ez azonban még nem ad módot a lehetséges megfordulások és a tiltott kanyarodások feltüntetésére. Kétirányú útszakaszon megengedett visszafordulás nem nehezíti a forgalom áttekintését, ettől akár el is tekinthetünk. Ha az útkereszteződésekben nincsenek így alkalmas a megengedett forgalom szemléltetésére: az ilyen úthálózatnak ez a *forgalmi gráf*ja. Útkereszteződésekben szabott kanyarodási tilalmak esetén pedig a következőképpen járunk el: Először nem vesszük figyelembe a kanyarodási tilalmakat. Az útkereszteződésnek ily módon megfeleltetett gráfpontot a hozzá illeszkedő élvégekkel együtt eltávolítjuk, a szabadon maradt élvégekben egy-egy gráfpontot veszünk fel, és ezekhez úgy illesztünk új irányított éleket, hogy azokon az összes megengedett továbbhaladást végrehajthassuk, de mást ne. Példaként megrajzoljuk egy forgalmi gráfnak a 64. ábrán látható útkereszteződéshez tartozó részletét. A megengedett haladási irányokat útburkolati jelekkel szemléltetjük. A „vízszintes" úton haladva, a kereszteződésben jobbra kanyarodni szabad, balra nem. A „függőleges" úton nincs előírt haladási irányt jelző nyíl, azon haladva szabad mindkét irányba kanyarodni, sőt az útkereszteződésben megfordulni is. Az utak közepén látható fehér vonalakat, az ún. záróvonalakat nem szabad érinteni, ez tehát amúgy is kizárja az útszakaszon való megfordulás lehetőségét, amitől eltekintettünk. Ezek után a 65. ábra szemlélteti a forgalmi gráf megfelelő részletének kialakulását.



64. ábra



65. ábra

A modern városi forgalomban egyre nagyobb szerepet játszanak az egyirányú utcák. Ha bizonyos utcákon egyirányú forgalmat akarunk bevezetni, ügyelnünk kell arra, hogy a város bármely pontjából bármely másik pontjába el lehessen jutni a közlekedési szabályok megsértése nélkül, röviden mondva, hogy teljesüljön a *közlekedési feltétel.* Kérdés, hogy ez mely esetben valósítható meg, ha útkereszteződésekben kanyarodási korlátokat nem szabunk. A közlekedési lehetőségeket forgalmi gráffal szemléltetve, kérdésünk a gráfok nyelvén így fogalmazható: Milyen gráfokat lehet úgy irányítani, hogy bármely pontjából bármely másik irányított úttal elérhető legyen? Az olyan irányított gráfot, amelyben ez a gráfokra átfogalmazott közlekedési feltétel teljesül, *erősen összefüggő*nek nevezzük. Egy gráf összefüggő volta nyilván szükséges ahhoz, hogy erősen összefüggővé lehessen irányítani; ez azonban általában kevés (élt nem tartalmazó gráfra a követelmény „üres" volta miatt elég). Gondoljunk arra, hogy ha a Szentendrei-szigetre vezető egyetlen hídon csak egyirányú forgalmat engednénk meg, akkor vagy a szigetre bemenni, vagy onnan kijönni közúton nem lehetne a közlekedési szabályok megsértése nélkül.

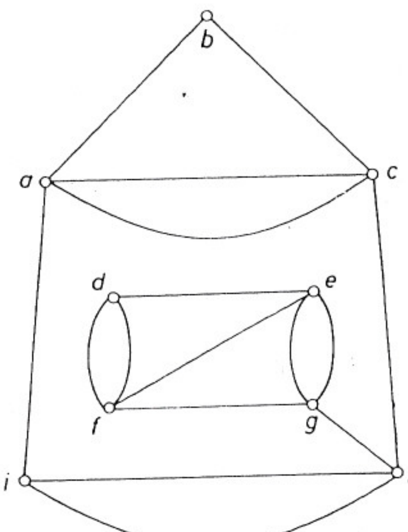
Egy összefüggő gráf egy élét a gráf *híd*jának nevezzük, ha az él törlésével a gráf megszűnik összefüggő lenni. Nyilvánvaló, hogy hidat tartalmazó gráfot nem lehet úgy irányítani, hogy a közlekedési feltétel teljesüljön.

Az 1. fejezet 25. és 26. állítása gráfok összefüggő voltát jellemzi. Irányított gráfnak azt a tulajdonságát, hogy az irányításának elhagyásával belőle nyert gráf összefüggő, a 26. állításnak alábbi megfelelője jellemzi, amely annak bizonyításához hasonlóan igazolható.

8. *Ha $\vec{G}$ az összefüggő G gráf tetszőleges irányítása révén nyert irányított gráf és $\vec{G}'$ a $\vec{G}$ gráfnak nem minden élét tartalmazó részgráfja, akkor van $\vec{G}$-nek $\vec{G}'$-be nem tartozó olyan irányított éle, amelynek kezdőpontja vagy végpontja $\vec{G}'$-beli.*

Irányított gráfnak erősen összefüggő voltát pedig az 1. fejezet 25. állításának alábbi megfelelője jellemzi, amely annak bizonyításához hasonlóan igazolható, csak két irányított út veszi át az ott előforduló út szerepét.

9. *Ha $\vec{G}'$ az erősen összefüggő $\vec{G}$ gráfnak nem minden pontját tartalmazó részgráfja, akkor $\vec{G}'$-be nem tartozó olyan éle is van $\vec{G}$-nek, amelynek kezdőpontja $\vec{G}'$-be tartozik, de végpontja nem, és olyan is, amelynek végpontja tartozik $\vec{G}'$-be, de kezdőpontja nem.*



66. ábra

Gyakorlatok

10. Lehet-e úgy irányítani a 66. ábrán látható gráfot, hogy a közlekedési feltétel teljesüljön?

… összegét és élének számát.

Feladatok

12. Bizonyítsuk be, hogy ha az e él az összefüggő G gráfnak hídja, akkor G nem tartalmaz olyan kört, amelyben az e él szerepel.

13. Bizonyítsuk be, hogy a 12. feladat állítása megfordítható, azaz, ha az összefüggő G gráfban nincs olyan kör, amely a gráf e élét tartalmazza, akkor e a G gráfnak hídja.

14. Bővítsük a 66. ábrát az $\{a, d\}$ éllel, és az így nyert gráfot irányítsuk úgy, hogy erősen összefüggő legyen.

15. Igazoljuk, hogy ha egy élt is tartalmazó irányított gráf minden pontjának ki-foka egyenlő a pont be-fokával, akkor kijelölhetők a gráfban irányított körök úgy, hogy a gráf minden éle e körök közül pontosan egyben szerepeljen.

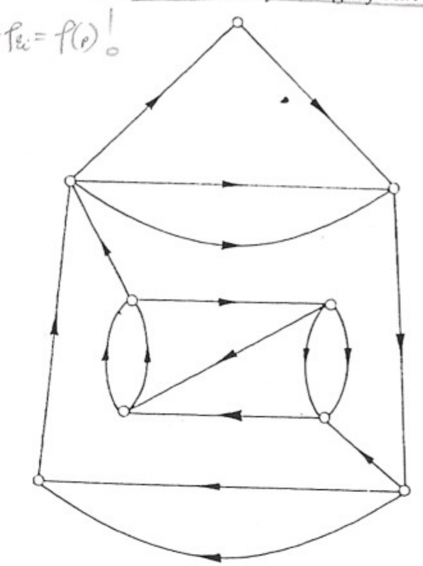
16. Bizonyítsuk be, hogy tetszőlegesen irányított teljes gráfban van olyan pont, amelyből a gráf bármely más pontja elérhető 2-nél nem hosszabb irányított úttal.

A 66. ábrában a $\{g, h\}$ él híd, tehát a gráf nem irányítható úgy, hogy a közlekedési feltétel teljesüljön.

A 11. gyakorlatban kérdezett három szám mindegyike 16, bárhogyan is irányítottuk a gráfot. Nem véletlen, hogy e számok megegyeznek, hiszen minden él eggyel járul hozzá a ki-fokokhoz is és a be-fokokhoz is. Tehát érvényes a következő megállapítás:

17. *Minden irányított gráfban a ki-fokok összege is és a be-fokok összege is az élek számát adja.*

$P_{be}+P_{ki} = f(e)$!



67. ábra

Ha a 12. feladatban szereplő e él a G gráf valamely körének éle, akkor a 2. fejezet 3. feladata szerint az e él törlésével G-ből összefüggő gráfot nyerünk, tehát e nem lehet G-nek hídja.

A 13. feladat megoldásához tegyük fel, hogy az összefüggő G gráfban nincs a gráf $e = \{a, b\}$ élét tartalmazó kör. Így nem létezhet G-ben az a és b pontot összekötő út, amely e-t ne tartalmazná, hiszen különben egy ilyen út e-vel együtt olyan kört adna, amelyben e szerepel. Ennélfogva az e él törlésével G-ből nyert G' gráfban a-ból b nem érhető el úttal, vagyis G' nem összefüggő; tehát e a G gráfnak hídja.

A 66. ábrának a 14. feladatban kijelölt bővítése

már nem tartalmaz hidat. Ennek egy kívánt irányítása a 67. ábrán látható. Általában a következő állítás érvényes:

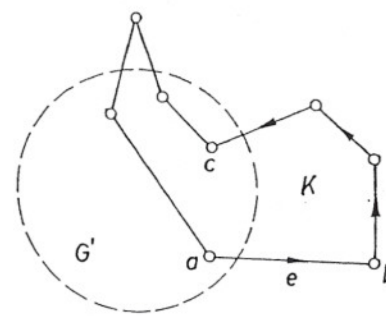
18. *Bármely hidat nem tartalmazó összefüggő gráf irányítható úgy, hogy erősen összefüggő legyen.*

Az állítást a következő lépésekben lehet bizonyítani. Először vesszük az összefüggő és hidat nem tartalmazó G gráf egy olyan részgráfját, amely irányítható úgy, hogy erősen összefüggő legyen. Ilyen biztosan van, hiszen G bármely egyetlen pontból álló részgráfjára teljesül ez a reá „üres" követelmény. Ha a választott részgráfban még nem szerepel G valamennyi éle, akkor ehhez hozzávehetők újabb élek úgy, hogy a bővített részgráfra is teljesüljön a tétel állítása. Bővítési eljárásunk bizonyos számú ismétlése után eljutunk egy tovább már nem bővíthető részgráfhoz, és ez maga G lesz.

Ezeket a lépéseket megtakaríthatjuk, ha mindjárt a már tovább nem bővíthető részgráfból, azaz G-nek egy olyan maximális számú élt tartalmazó G' részgráfjából indulunk ki, amelyre teljesül a tétel állítása.

A maximálisból indulás módszere, amelyet itt alkalmazunk, más esetekben is lehetővé teszi sorozatos bizonyítási lépések megtakarítását. Némely más esetben ehhez hasonlóan lehet hasznát venni **a minimálisból indulás módszerének**.

Visszatérve feladatunk megoldásához, bebizonyítjuk, hogy a fenti G' gráf csak maga G lehet. G' maximális tulajdonságából következik, hogy G minden olyan éle G'-be tartozik, amelynek végpontjai G'-be tartoznak. Tegyük fel, hogy G' nem azonos G-vel; tehát az előbbiek szerint van G-nek G'-be nem tartozó pontja. Ennélfogva az 1. fejezet 25. állítása szerint van G-nek G'-be nem tartozó olyan $e = \{a, b\}$ éle, hogy az a pont G'-be tartozik, b pedig nem. Minthogy G nem tartalmaz hidat, a 13. feladat szerint van G-ben olyan K kör, amelyben az e él szerepel (a 68. ábrán szemléltetünk; G'-t szaggatottan körvonalaztuk). Most induljunk el az e élen a-ból b felé, és haladjunk K élei mentén mindaddig, amíg G' egy c pontjába nem érünk. (Itt ismét az 1. fejezet végén kiemelt „először érintett pont" kap szerepet.) Ez bekövetkezik, ha előbb nem, a-ban.



68. ábra

Bővítsük a G' gráfot K bejárt éleivel és ezek végpontjaival; a kapott gráfot jelöljük G''-vel. Tudjuk, hogy G'-ből irányítással nyerhető egy $\vec{G}'$ gráf úgy, hogy annak bármely pontjából bármely másik irányított úttal elérhető. Irányítsuk K bejárt éleit a bejárást követő módon. A G''-ből ezzel és a G'-beli élek $\vec{G}'$-ben szereplő irányításával nyert irányított gráf legyen $\vec{G}''$. Belátjuk, hogy $\vec{G}''$ erősen összefüggő, azaz $\vec{G}''$ bármely d pontjából bármely f pontja irányított úttal

... tulajdonságából adódik. Ha d $\vec{G}'$-beli, f pedig nem, akkor d-ből az a pont $\vec{G}'$-beli irányított úttal érhető el, a-ból f pedig K éleinek felhasználásával, és ebből adódik, hogy d-ből f $\vec{G}''$-ben elérhető irányított úttal. Az a két eset, amelyben az f pont $\vec{G}'$-beli, d pedig nem, ill. d és f egyike sem $\vec{G}'$-beli, az előbbiekhez hasonló módon gondolható végig. Mármost az, hogy $\vec{G}'$-t a $\vec{G}''$ gráffá bővíthettük úgy, hogy $\vec{G}''$ is erősen összefüggő legyen, ellentmond G' maximális tulajdonságának, tehát az a feltevés, hogy G' nem azonos G-vel, helytelen. Ezzel bebizonyítottuk a 18. állítást.

A 15. feladat valójában az 5. feladat kiterjesztése irányított gráfokra; az 1. fejezet 23. feladatának első megoldásában használt gondolatával most is megoldásra juthatunk: Gráfunk valamely élén elindulva, haladjunk mindig az élek irányát követően. Ha egy pontba jutunk, onnan továbbmehetünk, hiszen minden pont annyi élnek kezdőpontja, ahánynak végpontja; csak a kiindulási pontban akadhatunk el. Mármost amikor először érünk már érintett pontba, akkor egyszersmind egy irányított kört is bejártunk. Töröljük a bejárt irányított kör éleit. A megmaradt gráfban ismét minden pont be-foka egyenlő a pont ki-fokával, tehát eljárásunkat megismételhetjük. A törölt körök együttvéve a kívánt tulajdonságúak.

A fenti gondolatot a 6. állítás bizonyításának útján tovább fűzve, az alábbi irányított gráfokra vonatkozó állítást nyerjük:

19. *Ha egy nem egyetlen izolált pontból álló irányított $\vec{G}$ gráf minden pontjának ki-foka egyenlő a pont be-fokával, és G összefüggő, akkor $\vec{G}$-nek van Euler-vonala; és fordítva, ha egy izolált pontot nem tartalmazó irányított $\vec{G}$ gráfnak van Euler-vonala, akkor a gráf minden pontjának ki-foka egyenlő a pont be-fokával, és G összefüggő.*

A 6. állítás választ ad arra, hogy milyen gráfok élei járhatók be egyrétűen a kiindulási pontba visszavezető bejárással. Azt is tudjuk, hogy összefüggő gráf élein haladva, a gráf minden élét be tudjuk járni a kiindulási pontba visszatérve, hiszen összefüggő gráfban bármely pontból bármely másik úttal elérhető. Azonban egyrétű bejárás általában nem biztosítható. Vajon el lehet-e érni, hogy összefüggő gráf éleit bejárva, egyetlen élen se menjünk végig kettőnél többször? Igen, ugyanis bebizonyítjuk az alábbi állítást:

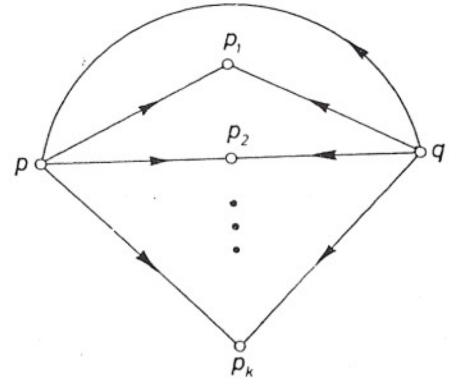
20. *Élt is tartalmazó összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy minden élen pontosan kétszer megyünk végig, és végül visszajutunk a kiindulási pontba. Ez úgy is elérhető, hogy minden élt mindkét irányban pontosan egyszer járunk be.*

Duplázzuk meg az összefüggő G gráf éleit. A G-ből így nyert G' gráf összefüggő, és minden pontjának foka páros, tehát G' Euler-gráf. G' Euler-vonala G kívánt bejárását is kijelöli. Ha a G gráfot tetszőlegesen irányítjuk, és minden irányított élt ellentétesen irányított éllel duplázunk meg, akkor a kapott irányított $\vec{G}'$ gráf kielégíti a 19. állítás első részének feltételeit, tehát van Euler-vonala. $\vec{G}'$-nek egy Euler-vonalát követő bejárása kijelöli G olyan bejárását, amelynek során minden élt mindkét irányban pontosan egyszer járunk be.

A 16. feladat állítása 1-pontú teljes gráfra „üres" volta miatt teljesül. Legyen tehát

$\vec{T}$ egy legalább 2-pontú irányított teljes gráf, és p e gráfnak olyan pontja, amelynek ki-foka maximális. Jelöljük a p kezdőpontú élek végpontjait így: $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Bebizonyítjuk, hogy p megfelel a feladat követelményeinek. Tegyük fel ugyanis, hogy p nem felel meg; azaz van $\vec{T}$-nek olyan q pontja, hogy a következő élek nem fordulnak elő a gráfban:

$$(p, q),\ (p_1, q),\ (p_2, q),\ \ldots,\ (p_k, q).$$



69. ábra

De T-ben bármely két különböző pont szomszédos, és így $\vec{T}$-ben szükségképpen szerepelnek a 69. ábrán is szemléltetett következő élek:

$$(q, p),\ (q, p_1),\ (q, p_2),\ \ldots,\ (q, p_k).$$

Tehát q legalább $k+1$ élnek kezdőpontja; ez azonban p maximális tulajdonsága miatt lehetetlen.

A 16. feladat állítását teljes indukcióval is bizonyítjuk. T_n-nel n-pontú teljes gráfot jelölünk. Az állítás bármely $\vec{T}_2$-re nyilván helyes. Tegyük fel, hogy igaz az állítás minden n-pontú irányított teljes gráfra; bebizonyítjuk, hogy akkor igaz bármely $\vec{T}_{n+1}$-re is. Töröljük egy $\vec{T}_{n+1}$ gráf egy tetszőleges q pontját a hozzá illeszkedő élekkel együtt. Az így nyert $\vec{T}_n$ gráfra indukciós feltevésünk értelmében igaz a feladat állítása. Legyen p a feladat követelményeit $\vec{T}_n$-ben kielégítő pont, és a p kezdőpontú élek $\vec{T}_n$-be tartozó végpontjai: $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Tehát ha r $\vec{T}_n$ tetszőleges pontja, akkor vagy a (p, r) vagy valamelyik (p_i, r) él szerepel $\vec{T}_n$-ben. Mármost ha p nem elégíti ki a feladat követelményeit $\vec{T}_{n+1}$-ben, akkor e gráfban nem léteznek a következő élek:

$$(p, q),\ (p_1, q),\ (p_2, q),\ \ldots,\ (p_k, q),$$

tehát szükségképpen léteznek a következők:

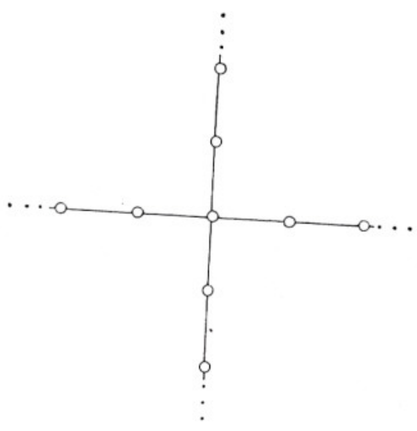
$$(q, p),\ (q, p_1),\ (q, p_2),\ \ldots,\ (q, p_k).$$

Ha figyelembe vesszük, hogy bármely $\vec{T}_n$-beli r pontra vagy a (p, r) él, vagy valamelyik (p_i, r) él is szerepel $\vec{T}_{n+1}$-ben, arra jutunk, hogy a $\vec{T}_{n+1}$ gráfban q megfelel a feladat követelményeinek.

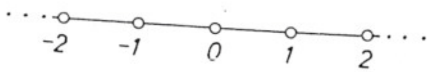
Megjegyzés a végtelen gráfokról

Síkon elhelyezkedő derékszögű koordináta-rendszer két tengelyét felfoghatjuk gráfnak úgy, hogy a tengelyeken az egész számokat jelölő pontokat tekintjük gráfpontoknak (70. ábra). E gráfnak végtelen sok pontja és végtelen sok éle van. (Gráf

… nem zártuk ki azt a lehetőséget, hogy egy gráfnak végtelen sok pontja vagy éle legyen.) Gráfunk összefüggő, az origónak megfeleltetett pont 4-ed-fokú, a többi pont foka pedig 2; tehát teljesülnek az Euler-vonal létezésének feltételei. Azonban a gráfnak nyilvánvalóan nincs Euler-vonala, hiszen ha egy gráfvonal egyszer átvezet az origón, nem vezethet oda ismét. (Természetesen a gráfvonal fogalmát itt ki kell terjeszteni úgy, hogy egyik vagy mindkét irányban végtelen is lehessen.)



70. ábra

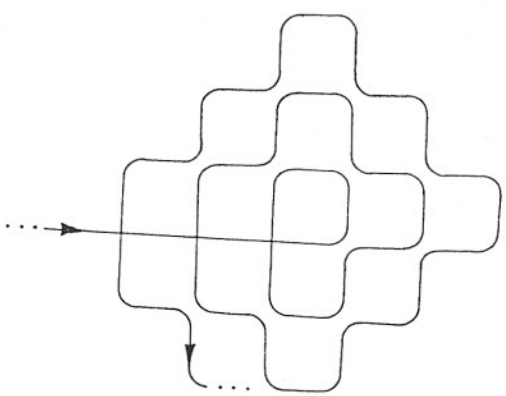


71. ábra

Ha egy gráfnak végtelen sok pontja vagy végtelen sok éle van, akkor a gráfot *végtelen gráf*nak nevezzük, különben *véges gráf*nak.

A 6. állítás első része tehát nem érvényes végtelen gráfokra. Természetesen a tárgyalt bizonyítás sem érvényes, hiszen feltételeztük, hogy az abban alkalmazott eljárás véges sok lépésben befejeződik, márpedig ez szükségképpen nem teljesül, ha végtelen gráfról van szó. A 70. ábra alapján az is látható, hogy ha egy végtelen gráfban minden pont foka legalább 2, nincs a gráfban szükségképpen kör, holott ilyen tulajdonságú véges gráfban van (1. fejezet 23. feladata). Ábránkban az origóhoz kapcsolódó egyik féltengelynek megfelelő rész olyan gráf, amelynek egyetlen páratlan fokú pontja van, ez pedig véges gráfban nem fordulhat elő (vö. az 1. fejezet 9. állításával). A 16. feladat állítása sem érvényes végtelen gráfokra. Ha ugyanis egy végtelen teljes gráf pontjai: $p_1, p_2, p_3, \ldots,$ és ebben minden élt úgy irányítunk, hogy a nagyobb indexű pont legyen a kezdőpont, akkor a kapott irányított gráfban minden pontból csak nála kisebb indexű, tehát csak véges számú pont érhető el egyáltalán irányított úttal.

Eddigi állításaink között találhatunk végtelen gráfokra is érvényeseket; ilyen pl. a 12. és 13. feladat állítása. A 70. ábrának csak az egyik koordinátatengely kijelölte részét tekintve (71. ábra), ennek élei a tengely irányát követő



72. ábra

módon „két irányban végtelen gráfvonallal" kimeríthetők:

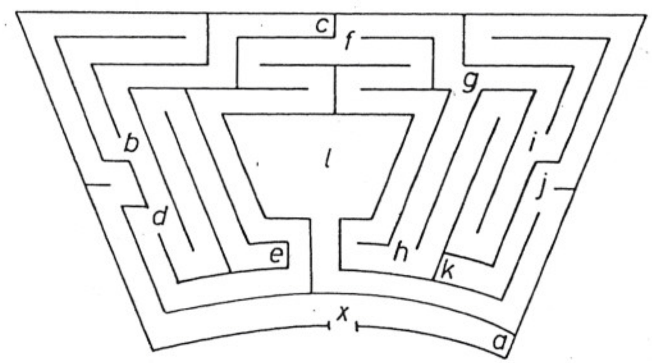
$$\ldots, \{-2, -1\}, \{-1, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \ldots .$$

Mondhatjuk, hogy a 71. ábra szemléltette végtelen gráfnak van Euler-vonala, mégpedig a fenti sorozat. Ebben az értelemben van Euler-vonala annak a végtelen gráfnak is, amelyet a síkon felvett koordináta-rendszerrel úgy adhatunk meg, hogy minden k egész számhoz meghúzzuk az $x=k$ és $y=k$ egyenest, majd az egész koordinátájú pontokat gráfpontoknak tekintjük (végtelen nagy kockás füzetlap). E gráf éleinek a 72. ábrán látható vonalat követő sorrendje a gráf egy Euler-vonalát adja.

Amint látjuk, végtelen gráfok tulajdonságainak vizsgálata külön megfontolásokat igényel; ez azonban e könyvnek nem tárgya. Ha egy gráfra nem mondtuk, hogy végtelen, akkor mindig véges gráfra gondoltunk, és ezentúl is így fogunk eljárni.

Labirintusban

Egy görög monda szerint Minósz krétai királynak volt egy szörnyszülött fia — félig bika, félig ember alakú szörnyeteg —, Minótaurosznak hívták. A király e szörny számára olyan útvesztő palotát — labirintust — építtetett, amelybe ha egyszer behatolt valaki, aligha talált ki. Miután Minósz legyőzte Athén városát, parancsára az athénieknek ifjakat és lányokat kellett küldeniük Krétába, ahol a Minótaurosznak áldozták fel őket. Thészeusz, athéni királyfi vállalkozott arra, hogy elmegy az áldozatul kiszemeltekkel, és megöli a Minótauroszt. Azonban félő volt, hogy ha vállalkozása sikerrel jár is, nem tudja megtalálni a labirintusból kivezető utat. Ariadné, Minósz lánya egy gombolyag fonalat adott Thészeusznak azzal, hogy erősítse annak egyik végét a labirintus bejáratához, és fonállal a kezében hatoljon be; a kijáratot a fonal nyomán majd megtalálja. Thészeusz megölte a szörnyet, a fonál nyomán kijutott az útvesztőből, és a szépséges Ariadnét magával vitte.

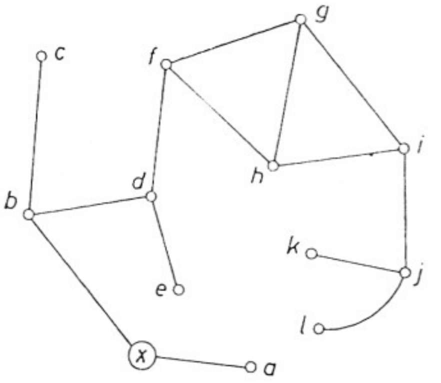


73. ábra

Minósz labirintusáról csak régi pénzek mesélnek, de Orániai Vilmos angol király 1690-ben építtetett labirintusa ma is megvan. Ennek alaprajzát láthatjuk a 73. ábrán.

A labirintus zegzugos folyosórendszer. Ha a zsákutcákat alkotó folyosók végeit

... pontokat gráfpontokkal, a folyosószakaszokat pedig gráfélekkel szemléltetjük, akkor a labirintus bejárását a nyert gráf éleinek bejárása révén írhatjuk le (bár a labirintusban bolyongó nem ismeri ezt a gráfot). A gráfot lehetőleg egyszerűen rajzolva, a labirintus is áttekinthetőbb lesz. Pl. a 74. ábra a 73. ábrán látható labirintusnak megfelelő gráf. Ebben az x ponttól eltekintve nem találunk másodfokú pontot. Az egyszerűsítés érdekében mindig megtehetjük, hogy ha a bejárásban „érdektelen” másodfokú ponthoz két él illeszkedik, azokat egynek tekintjük, vagyis az elágazási helyek közül csakis a legalább háromfelé elágazókat szemléltetjük gráfponttal.



74. ábra

A fenti görög monda alapján az a feladat, hogy valamely gráf minden élét legalább egyszer bejárjuk úgy, hogy a gráf egy — a labirintus bejáratának megfelelő — pontjából indulva, mindig éleken haladjunk, és végül visszajussunk a kezdőpontba. Ehhez alkalmas bejárási utasítást kell adnunk, nehogy pl. bizonyos körökön bolyongva, bejárásunk eredménytelen legyen. (Thészeusznak még a fonállal a kezében is követnie kellett valamilyen bejárási tervet, hogy mindenképpen megtalálja a Minótauroszt, és kijusson a labirintusból.) A sikeres bejáráshoz szükséges, hogy a szóban forgó gráf összefüggő legyen. Ha viszont a gráf összefüggő, akkor a fent követelt bejárás nyilván lehetséges, a 20. állítás szerint még azzal a megszorítással is, hogy a gráf minden élén pontosan kétszer menjünk végig. Megfelelő bejárási utasítást a „megduplázott” gráf egy Euler-vonala szolgáltat, ezt pedig meg tudjuk tervezni. Csakhogy nem ismerjük a gráfot, mint ahogyan Thészeusz sem ismerte Minósz labirintusát. Olyan utasításra van szükség, amely mindig csak a „pillanatnyi” folytatást írja elő, és követése mégis a kívánt bejárásra vezet. Az alábbiakban két ilyen utasítást ismertetünk.

1. bejárási utasítás, amely akkor követhető, ha bármely pontba érkezve meg tudjuk állapítani, hogy az ehhez illeszkedő élek közül melyiket jártuk már be, és ha bármely pillanatban az addig bejárt utat ellenkező irányban is be tudjuk járni (Ariadné fonala mindezeket lehetővé teszi): A kijelölt pontból elindulva haladjunk mindaddig, amíg be nem járt élen haladhatunk tovább. Ha elakadunk, menjünk vissza a megtett útvonalon addig, amíg be nem járt él végpontjába nem jutunk. Most induljunk tovább még be nem járt élen, és haladjunk az utasítás elején megszabott módon. (Az olvasó a 74. ábrán könnyen követheti ezt az utasítást.)

Bebizonyítjuk, hogy ha az utasítást követve az összefüggő G gráf x pontjából indulunk, G minden élét bejárjuk, és x-ben akadunk el.

Bolyongásunk során van olyan pillanat, amikor éppen utolsó alkalommal lépünk még be nem járt élre. Utasításunk szerint ennek bejárása után a bejárt útvonalon ellenkező irányban x-ig kell mennünk, ott viszont el is akadunk. Nem lehet, hogy G-nek valamely élét nem jártuk be. Mert másképp az 1. fejezet 26. állítása szerint olyan be nem járt éle is volna, amelynek egyik végpontja G bejárt részéhez tartoznék; azonban utasításunk szerint az ilyen élt be kellett járnunk.

Az 1. bejárási utasítást követve előfordulhat, hogy egy élt sokszor is be kell járni, de kétszer mindenképpen. Ha a 20. állításra gondolunk, e megoldás nem tűnik gazdaságosnak. A következő utasítás alapján minden élt pontosan kétszer járunk be, mégpedig mindkét irányban egyszer.

2. bejárási utasítás, amely akkor követhető, ha bármely p pontba érkezve meg tudjuk állapítani, hogy a p-hez illeszkedő élek közül előzőleg melyeket jártunk be p-ből kezdődően, és melyiken érkeztünk először p-be, azaz melyik volt p „belépőéle” (a p-nek megfelelő folyosótorkolatokat pl. különböző bevésésekkel jelölheti meg a bolyongó): A kijelölt pontból indulva, ha egy élen p-be érkezünk, olyan élen menjünk tovább, amelyen p-ből kezdődően még nem mentünk, és ez csak akkor legyen p belépőéle, ha a p-hez illeszkedő többi élt p-ből kezdődően bejártuk már.

Példaként járjuk be a 74. ábrát x-ből indulva. Minthogy többszörös él nincs, a bejárást a pontok érintési sorrendet követő sorozatával is megadhatjuk. Egy, a 2. utasítást követő bejárás: $x, b, c, b, d, f, g, i, j, l, j, k, j, i, h, g, h, i, g, f, h, f, d, e, d, b, x, a, x$.

Most megmutatjuk, hogy ha az összefüggő G gráf x pontjából indulunk, a 2. utasítást követve, G minden élét mindkét irányban pontosan egyszer járjuk be, és x-ben akadunk el.

Jelöljük G_0-lal a G-ből minden élének megduplázásával nyert gráfot. Ezt irányítsuk úgy, hogy a G bármely élének megfelelő két él ellentétes irányítást kapjon. Az így nyert $\vec{G}_0$ gráfra a következő bejárási utasítást rójuk ki: Az x pontból indulva, haladjunk mindig még be nem járt élen, irányítást követve. Ha egy p pontba érkezünk, olyan élen menjünk tovább, amelyen még nem mentünk, és ez csak akkor legyen annak a „belépőélnek” a párja, amelyen először érkeztünk p-be, ha más lehetőségünk már nincs.

Könnyen belátható, hogy G-re vonatkozó állításunk igazolására elegendő a következőt bizonyítani: A $\vec{G}_0$-ra vonatkozó utasítást követve, csak x-ben akadhatunk el, és minden élt pontosan egyszer járunk be. (Hiszen $\vec{G}_0$ két olyan élének bejárása, amelyek G egy e élének megduplázásából eredtek, megfeleltethető e mindkét irányban történő egyszeri bejárásának.)

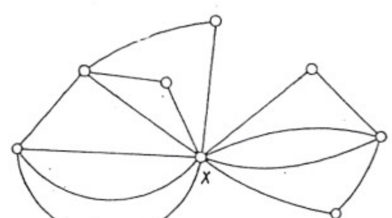
Nyilvánvaló, hogy $\vec{G}_0$-ban minden pont ki-foka megegyezik a pont be-fokával. Ennélfogva az utasítást követve, bolyongásunk csak x-ben akadhat el. Még azt kell belátni, hogy ha elakadtunk, a bolyongásunknak megfelelő V gráfvonal éppen $\vec{G}_0$ egy Euler-vonala.

…jük le a fenti bolyongásban előforduló pontokat abban a sorrendben, ahogyan azokat érintettük:

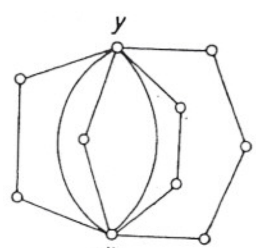
$$x = p_1, p_2, p_3, \ldots, p_1,$$

és tegyük fel, hogy van $\vec{G}_0$-nak olyan éle, amely nem szerepel V-ben. Ekkor a 8. állítást $\vec{G}_0$-ra és ennek V éleit tartalmazó részgráfjára alkalmazva azt kapjuk, hogy van $\vec{G}_0$-nak V-ben nem szereplő olyan éle, amely a fenti pontsorozat valamelyik tagjához illeszkedik. Jelöljük p_n-nel a fenti sorozatban az első ilyen pontot. Abból, hogy $\vec{G}_0$-ban $\varphi_{ki}(p_n) = \varphi_{be}(p_n)$, és p_n ugyanannyi V-beli élnek kezdőpontja, mint végpontja, és van p_n-hez illeszkedő V-be nem tartozó él, következik, hogy olyan V-ben nem szereplő él is van, amelynek p_n végpontja, és olyan is van, amelynek p_n kezdőpontja. Az utóbbi azt jelenti, hogy p_n-ben nem akadhattunk el, azaz $p_n \neq p_1$. Minthogy p_n a fenti sorozatban előbb még nem fordulhatott elő, p_n belépőéle a V-ben szereplő (p_{n-1}, p_n). De szerepel V-ben ennek (p_n, p_{n-1}) párja is, mert különben a p_n-et megelőző p_{n-1}-hez illeszkednék V-ben nem szereplő $\vec{G}_0$-beli él, ez pedig lehetetlen. Viszont így is ellentmondásra jutunk, hiszen így van p_n kezdőpontú be nem járt él, ennélfogva utasításunk szerint p_n belépőélének párját nem járhattuk be. Ezzel bebizonyítottuk állításunkat.

Kiállítások tárgyait is szokás folyosórendszerben elhelyezni. Azonban az ehhez létrehozott folyosólabirintusnak nem célja, hogy a látogató útvesztője legyen. Kívánatos úgy létrehozni, hogy ha a látogató belép, ne kényszerüljön kétszer bejárni egyik folyosót sem, és mégis megtekinthessen minden látnivalót. Vagyis kiállításhoz akkor tervezünk ésszerűen „labirintust", ha a megfelelő gráf Euler-gráf. Azonban a látogatónak ebben az esetben is követnie kell valamely Euler-vonalat, ha fölösleges utat nem akar tenni. A belépőt ilyen tervvel persze el lehetne látni, de a labirintus tervezése akkor lenne igazán célszerű, ha a látogató — pusztán arra ügyelve, hogy már bejárt folyosón ne haladjon még egyszer — automatikusan megtekinthetne minden kiállítási tárgyat.



75. ábra



76. ábra

Izolált pontot nem tartalmazó Euler-gráfot az *x pontjából tetszőlegesen bejárható*-nak nevezünk, ha x-ből indulva, és mindig még be nem járt élén haladva, szükségképpen valamely Euler-vonalat követünk. Ilyen gráf mint építési terv alapján célszerű „kiállítási labirintust" létesíteni. Természetesen minden kör bármely pontjából tetszőlegesen bejárható. Ellenőrizhetjük (később bizonyítjuk is), hogy a 75. ábrán látható gráf x-ből (de más pontjából nem), a 76. ábrán látható gráf pedig x-ből is és y-ból is (de más pontjából nem) tetszőlegesen bejárható.

A továbbiakban felkutatjuk a valamely pontjukból tetszőlegesen bejárható gráfok szerkezetét.

Feladatok

21. A G_1 Euler-gráf az x pontjából tetszőlegesen bejárható G gráfnak x-et tartalmazó valódi részgráfja. Töröljük G-ből G_1 éleit és a törlés után létrejött izolált pontokat. A megmaradt gráfot jelöljük G_2-vel. Igazoljuk, hogy mind G_1, mind G_2 x-ből tetszőlegesen bejárható.

22. Bizonyítsuk be, hogy ha a G Euler-gráf az x pontjából tetszőlegesen bejárható, akkor x a G gráf minden körének pontja, és fordítva, ha a G Euler-gráf x pontja G minden körének pontja, akkor G x-ből tetszőlegesen bejárható.

A 21. feladatban szereplő G_1 gráfnak van Euler-vonala; legyen E egy ilyen. G x-ből tetszőlegesen bejárható; tegyük ezt úgy, hogy előbb G_1 éleit járjuk be E-t követve. Ebből következik, hogy G_2 x-ből tetszőlegesen bejárható. Így G_2 mindenesetre x-et tartalmazó Euler-gráf, és ha ez kapja G_1 szerepét, akkor G_2 szerepét G_1 veszi át. Tehát G_1 is x-ből tetszőlegesen bejárható.

A 22. feladat első részének megoldásához tegyük fel, hogy K G-nek x-et nem tartalmazó köre. Töröljük G-ből K éleit. A kapott gráf minden pontjának foka páros, tehát ennek x-et, és így a hozzá illeszkedő éleket is tartalmazó G_1 komponense Euler-gráf. Jelöljük G_2-vel azt a gráfot, amelyet G_1-ből K hozzávételével nyerünk. G_2 minden pontjának foka páros, továbbá e gráf összefüggő is, mert az összefüggő G gráfban K bármelyik pontja x-ből úttal elérhető, és egy ilyen útnak van olyan része, amelynek x és K valamely pontja végpontja, de belső pontjai nem tartoznak K-ba, márpedig G_1 minden ilyen utat tartalmaz. Tehát G_2 Euler-gráf, és így a 21. feladat állítása szerint x-ből tetszőlegesen bejárható. Ez azonban lehetetlen, hiszen ha egy x-ből induló bejárásban előbb G_1 éleit járjuk be egy Euler-vonala mentén, K éleire már nem juthatunk, mert K x-et nem tartalmazza.

A 22. feladat második részének megoldásához tegyük fel, hogy a G Euler-gráf x pontját a gráf minden köre tartalmazza, és G x-ből nem tetszőlegesen bejárható. Ekkor, x-ből kezdve G éleinek bejárását, megeshet, hogy úgy akadunk el x-ben, hogy a bejárt gráfvonalban, amely G valamennyi x-hez illeszkedő élét tartalmazza, nem szerepel G minden éle. Töröljük G-ből egy ilyen gráfvonalában szereplő éleit. A megmaradt gráf minden pontjának foka páros, tehát e gráf az 5. feladat állítása

...tartalmaz kört, ennek azonban x nem pontja, feltevésünkkel ellentétben. Ezzel megoldottuk a 22. feladatot.

A 22. feladat állítását így is fogalmazhatjuk: Egy G gráf pontosan akkor tetszőlegesen bejárható valamely x pontjából, ha G Euler-gráf, és az x-hez illeszkedő élek törlése révén G-ből ligetet nyerünk. Tehát a 75. ábrán látható gráf x-ből, a 76. ábrán látható pedig mind x-ből, mind y-ból tetszőlegesen bejárható, más pontokból azonban nem.

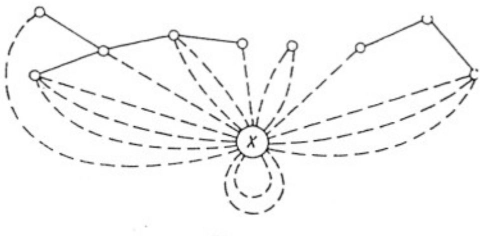
A 22. feladat átfogalmazott állításának megfordításához vegyünk fel egy tetszőleges L ligetet, L-en kívül egy x pontot, és vezessünk x-ből L minden páratlan fokú pontjához páratlan számú új élt, L minden páros fokú pontjához pedig páros számú új élt. Izolált ponthoz vezessünk legalább két élt x-ből, más páros fokú ponthoz azonban nem szükséges élt vezetnünk. Végül x-hez még hurokéleket is illeszthetünk. Az így létrejött G gráf összefüggő, és minden pontjának foka páros, hiszen minden gráfban páros sok páratlan fokú pont van (1. fejezet 9.), márpedig L pontjai páros fokúak lesznek, és így x foka is szükségképpen páros lesz. Tehát G Euler-gráf, és így a 22. feladat átfogalmazott állítása szerint x-ből tetszőlegesen bejárható. Ennélfogva érvényes az adott pontból tetszőlegesen bejárható gráfok szerkezetét jellemző alábbi állítás:

x-ből tetszőlegesen bejárható gráf

23. *Ha egy L ligeten kívül felvett x pontból L minden páratlan fokú pontjához páratlan számú új élt, L minden páros fokú pontjához pedig páros számú új élt vezetünk — izolált ponthoz mindenképpen vezetve élt x-ből, más páros fokú ponthoz azonban nem szükségképpen —, továbbá, x-hez esetleg hurokéleket is illesztünk, akkor x-ből tetszőlegesen bejárható Euler-gráfot nyerünk. Minden x-ből tetszőlegesen bejárható gráf előállítható ezen a módon.*

Egy x-ből tetszőlegesen bejárható gráf ennek alapján végrehajtott szerkesztését illusztrálja a 77. ábra. L élei a nem szaggatottan rajzolt élek.

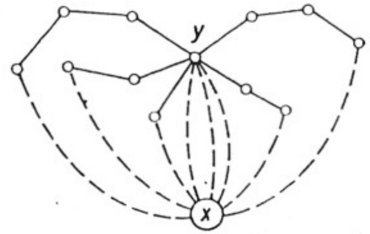
Most kutassuk fel azoknak a gráfoknak a szerkezetét, amelyek két pontjukból is tetszőlegesen bejárhatók. Tehát tegyük fel, hogy a G gráf mind az x, mind az y pontjából tetszőlegesen bejárható. Ha G-ből töröljük x-et a hozzá illeszkedő élekkel együtt, a fentiek szerint egy L ligetet kapunk. Tegyük fel, hogy L nem összefüggő. Ekkor van L-nek y-t nem tartalmazó L_1 komponense. L_1 legalább két x-hez illeszkedő G-beli él végpontját tartalmazza, mert L_1 vagy egyetlen izolált pont, amikor is ez G-ben legalább két x-hez illeszkedő él végpontja; vagy van elsőfokú pontja (1. fejezet 23.), és akkor van legalább még egy páratlan fokú pontja is (1. fejezet 9.), amikor is mindkettő végpontja G-ben x-hez illeszkedő éleknek, kettőjüket pedig út köti össze L_1-ben. Így mindenképpen található G-ben csak x-et és L_1 pontjait tartalmazó



77. ábra

kör, amely ennélfogva y-t nem tartalmazza, ez pedig a 22. feladat állítása szerint lehetetlen, hiszen G y-ból tetszőlegesen bejárható. Tehát L fagráf. A 22. feladat állítása szerint G-ben x-hez nem illeszkedhet hurokél, és nem lehet L-nek egyetlen y-tól különböző pontja sem egynél több x-hez illeszkedő élnek végpontja, és így G-ben L egyetlen y-tól különböző páros fokú pontja sem szomszédos x-szel.

Vizsgáljuk L-nek egy legalább 3-adfokú z pontját, feltéve, hogy ilyen létezik. Induljunk el z-ből, és haladjunk L élei mentén mindig még be nem járt élen tovább. Ekkor, minthogy L-ben nincs kör, már érintett pontba nem juthatunk, tehát szükségképpen L egy elsőfokú pontjában akadunk el; közben L egy z végpontú útját jártuk be. Most induljunk el ismét z-ből L egy még be nem járt élén, és haladjunk úgy, mint előbb. Ismét nem juthatunk már érintett pontba, még az előbbi út bejárása során érintettbe sem. Így megint L egy z végpontú útját járjuk be. E bejárást folytassuk, amíg csak lehet. A 23. állítás szerint a bejárt utak z-től különböző végpontjai G-ben szükségképpen szomszédosak x-szel. Mármost ha $z \neq y$, akkor kiválasztható két bejárt út, amelyek y-t nem tartalmazzák. Két ilyen úthoz z-től különböző végpontjukban egy-egy x-hez illeszkedő G-beli élt csatolva, olyan kört nyerünk, amely y-t nem tartalmazza, ez pedig a 22. állítás szerint lehetetlen.



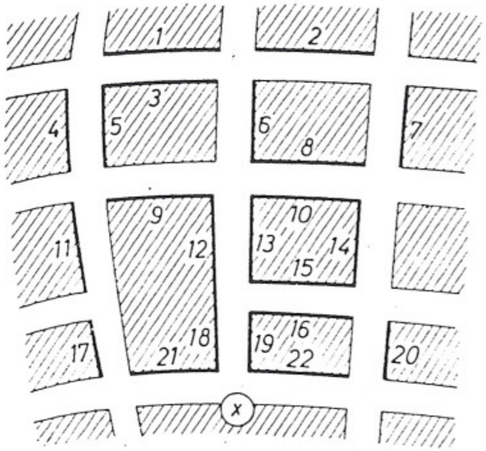
78. ábra

Tehát arra jutottunk, hogy L-ben csak y foka lehet 2-nél nagyobb, és L olyan utakból tevődik össze, amelyeknek egyik végpontja y, azonban bármely kettőnek sincs más közös pontja. (A 78. ábrán követhetjük a bizonyítást; az ábrán L élei a nem szaggatottan rajzoltak.) Ezen utak y-tól különböző végpontjai G-ben szomszédosak x-szel, de csak egy-egy él révén. Ezeken kívül — a korábbiakat figyelembe véve — L-nek csak az y pontja lehet G-ben szomszédos x-szel. Tehát G csupa olyan útból tevődik össze, amelyek mindegyikének x és y a két végpontja, ezen utak közül azonban bármely kettőnek sincs más közös pontja (l. a 78. és a 76. ábrát). Minthogy G Euler-gráf, ezen utak száma páros. Ebben az esetben viszont G valóban bejárható mind x-ből, mind y-ból a 23. állítás szerint. Összefoglalva, a két pontból is tetszőlegesen bejárható gráfok szerkezetét megvilágító állítás az alábbi:

24. *Ha páros számú utat úgy kapcsolunk össze, hogy mindegyiknek egyik végpontja x, a másik pedig y legyen, de bármely kettőnek se legyen más közös pontja, akkor mind x-ből, mind y-ból tetszőlegesen bejárható gráfot nyerünk. Minden x-ből is és y-ból is tetszőlegesen bejárható gráf előállítható ezen a módon.*

*

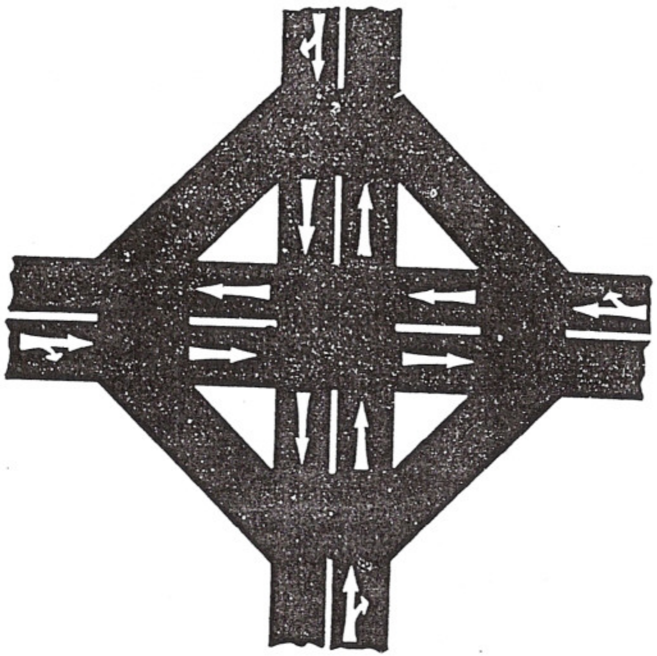
25. A 79. ábra egy városrészt szemléltet. Végig akarjuk nézni az egyes utcák vastagított vonallal megjelölt kirakatsorait, azokhoz csatlakozó járdákon haladva. Az x pontból indulunk, és oda kell visszatérnünk. Útkereszteződésekben átkelési időt nem számítva, készítsünk minimális időt igénylő bejárási tervet.



79. ábra

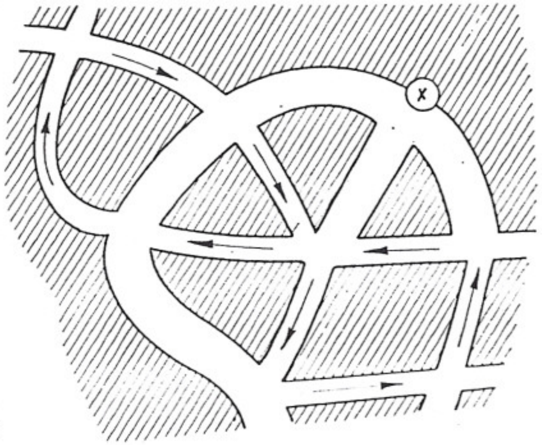
26. A 80. ábra a budapesti November 7. tér (Oktogon) kissé egyszerűsített térképe. Az egymásra merőleges utak kereszteződését magában foglaló nyolcszögben csak az óramutató járásával ellentétes irányban szabad közlekedni, azonban e nyolcszögről minden kereszteződésben szabad jobbra is és balra is lekanyarodni. Rajzoljuk meg a város úthálózatához tartozó forgalmi gráf e teret szemléltető részletét.

27. A 81. ábrán látható városrész utcahálózatát egyetlen öntözőkocsinak kell végiglocsolnia. A kocsinak az x pontból kell indulnia, és oda kell visszatérnie. A nyíllal jelölt utcákon a nyíl irányában egyirányú forgalom van. Egyirányú utcán elegendő egyszer végighaladni, kétirányú utcának azonban mindkét oldalát be kell járni. Útkereszteződésekben kanyarodási korlátok nincsenek. Készítsünk gazdaságos bejárási tervet a kocsi számára.

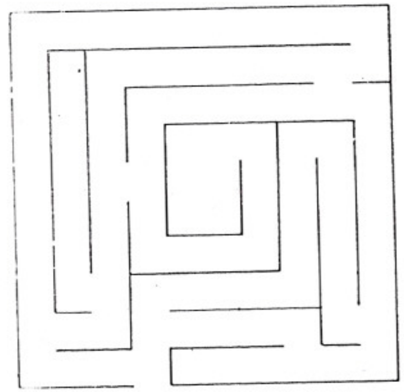


80. ábra

28. Írjunk elő egyirányú forgalmat a 81. ábrán látható városrész kétirányú utcáin is úgy, hogy a közlekedési feltétel teljesüljön.



81. ábra



82. ábra

29. Járjuk be a 82. ábrán látható labirintust valamelyik bejárási utasítás alapján.

Feladatok

30. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráf páratlan fokú pontjainak száma $2k$ ($k \geqq 1$), akkor kijelölhető a gráfban k számú nyitott gráfvonal úgy, hogy a gráf minden éle ezen gráfvonalak közül pontosan egyben szerepeljen.

31. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden él teljes hosszában egyszínű legyen, és minden ponthoz két piros és két kék élvég illeszkedjen.

32. Oldjuk meg a 3. feladatot általánosan, azaz válasszunk ki egy dominókészletből annyi lapocskát, hogy azokon a 0, 1, 2, ..., n számokból alkotott valamennyi különböző pár előforduljon, de más pár ne. (Dominókészletünk legyen elképzelt annyiban, hogy n tetszőleges nagy egész szám is lehessen.) Hány lapocskát választottunk ki? Milyen n esetén helyezhetők el a kiválasztott lapocskák egyetlen szabályos körláncba?

33. Egy irányított gráf minden p pontjára fennáll a következő:

$$\varphi_{ki}(p) = \varphi_{be}(p).$$

Jelöljük A-val a gráf tetszőlegesen kiválasztott pontjainak halmazát. Bizonyítsuk be, hogy azoknak az éleknek a száma, amelyeknek kezdőpontja A-ba tartozik, de vég-