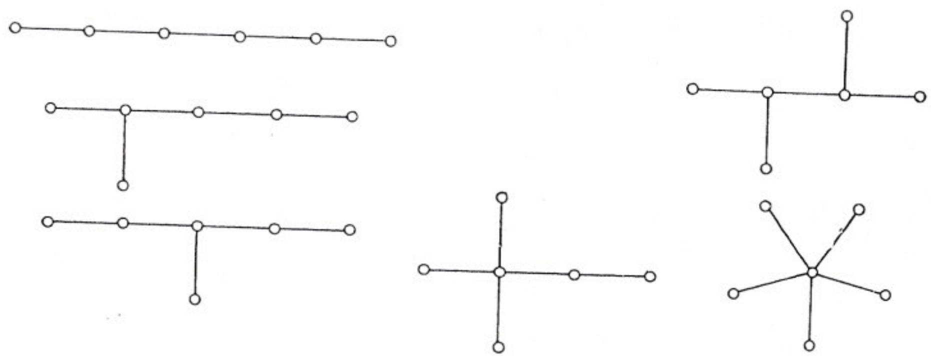
2. FÁK ÉS LIGETEK

Az 1. fejezet 20. feladatának állítását a következőképpen is megfogalmazhatjuk: Ahhoz, hogy n számú telefonközpont között hírközlés lehetséges legyen, legalább $n-1$ számú közvetlen vonalat kell megépíteni. Ésszerű a kérdés: Mi jellemzi a minimális számú közvetlen vonallal hírközlésre alkalmas módon felépített hálózatokat? Gráfokra átfogalmazva: Mi jellemzi a minimális számú élt tartalmazó n-pontú összefüggő gráfokat? A fent említett feladat megoldása kapcsán azt már megállapítottuk, hogy az n-pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van.

Gyakorlatok

1. Rajzoljuk meg azokat az n-pontú összefüggő gráfokat, amelyeknek $n-1$ élük van, ha $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ és 7.

2. Rajzoljuk meg azokat az n-pontú összefüggő gráfokat, amelyek nem tartalmaznak kört, ha $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ és 7.



19. ábra

Az 1. gyakorlat az $n \geqq 4$ esetekben már több gráfot is eredményez. Az $n=6$ esetben pl. 6 gráf jön számításba; ezek láthatók a 19. ábrán. Útmutatásként keressük rendre azokat, amelyekben a leghosszabb út hossza 5, 4, 3, ill. 2.

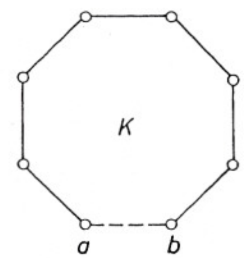
Figyeljük meg, hogy a 2. gyakorlat eredményeként is az 1. gyakorlatnak megfelelő gráfokat kapjuk. A körmentes összefüggő gráf olyannak tűnik, mint egy fa ágrendszere. Ezért egy gráfot *fagráfnak*, vagy röviden *fának* nevezünk, ha összefüggő, és nem tartalmaz kört.

Feladatok

3. Bizonyítsuk be, hogy ha összefüggő gráf bármely körének egy tetszőleges élét töröljük, ismét összefüggő gráfot kapunk.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-pontú gráfnak legalább n éle van, akkor van a gráfban kör.

A 3. feladat megoldásában feltehetjük, hogy a törölt él nem hurokél, hiszen hurokél törlése nem szünteti meg az összefüggőséget. Töröljük az összefüggő G gráf egy K körének $\{a, b\}$ élét (20. ábra). Ha G-ben az $\{a, b\}$ élen megyünk végig, a-ból b-be — vagy b-ből a-ba — jutunk; ezt pedig a törlés után is megtehetjük K megmaradt élein haladva. Tehát az $\{a, b\}$ él törlése után is eljuthatunk G bármely pontjából bármely másikba, nem törölt éleken haladva. Ha közben valamely kör éleit is bejárnók, azokat kihagyva, út élein haladunk, és ezzel megoldottuk a feladatot.



20. ábra

A 3. feladat alapján arra is következtethetünk, hogy az n-pontú és $n-1$-élű összefüggő gráfok körmentesek, ugyanis ha volna egy n-pontú és $n-1$-élű, kört tartalmazó összefüggő gráf, akkor annak egy körbe tartozó élét törölve, n-pontú és $n-2$-élű összefüggő gráfot kapnánk, ellentétben azzal, hogy egy n-pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van. Ennélfogva az 1. gyakorlat eredményeként adódó gráfok megfelelnek a 2. gyakorlat követelményeinek, mégpedig minden n-re. Tehát érvényes a következő állítás, amely egyúttal a minimális számú élt tartalmazó összefüggő gráfok jellemző tulajdonságát szolgáltatja:

5. *Az n-pontú és $n-1$-élű összefüggő gráfok fák.*

A 4. feladat állítását n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $n=1$-re nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n \geqq 1$-re minden n-pontú és legalább n-élű gráfban van kör. Belátjuk, hogy akkor minden $n+1$-pontú és legalább $n+1$-élű gráfban is van kör. Legyen G egy $n+1$-pontú gráf, amelynek legalább $n+1$ éle van. Alkalmazzuk az 1. fejezetben említett leghosszabb út módszerét. Ha G egy leghosszabb útjának valamelyik végpontja G-nek nem elsőfokú pontja, akkor máris adódik, hogy van G-ben kör. Ellenkező esetben töröljük G-nek egy elsőfokú pontját a hozzá illeszkedő egyetlen éllel együtt. Az így kapott gráfnak n pontja van és legalább n éle, tehát indukciós feltevésünk szerint tartalmaz kört; ezt viszont G is tartalmazza. Ezzel megoldottuk a feladatot.

Ha most tekintetbe vesszük, hogy minden n-pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van, akkor a 4. feladat alapján azt is mondhatjuk, hogy minden n-pontú körmentes összefüggő gráfnak pontosan $n-1$ éle van. Tehát a 2. gyakorlat eredményeként adódó gráfok — amelyek mind fagráfok — megfelelnek az 1. gyakorlat követelményeinek, mégpedig minden n-re. Ezzel a következő megállapításra jutottunk:

6. *Az n-pontú fagráf éleinek száma $n-1$.*

Megjegyezzük, hogy a 4. feladat állítása az 1. fejezet 23. feladatát is megoldja, ugyanis ha egy n-pontú gráf minden pontjának foka legalább 2, akkor a gráfnak legalább n éle van.

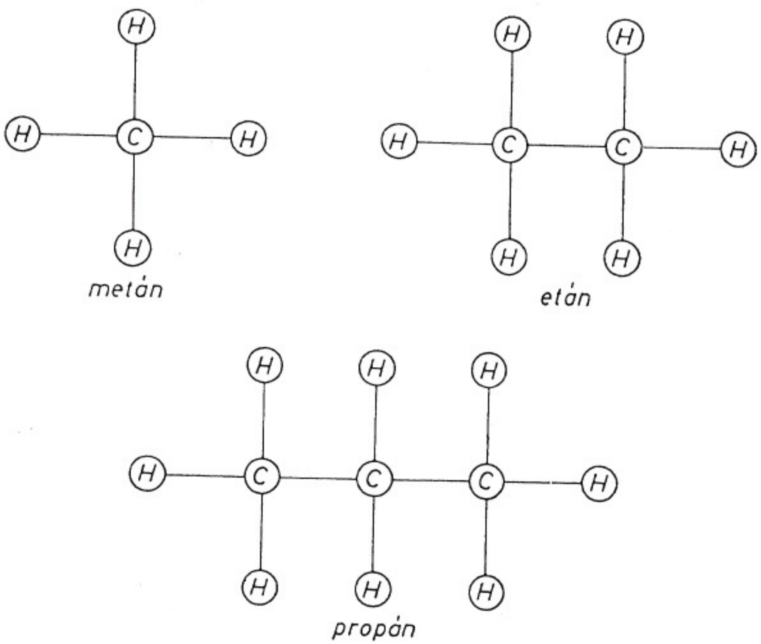
A paraffinmolekulák n számú szénatomból és $2n+2$ számú hidrogénatomból állnak; általános képletük:

$$C_nH_{2n+2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Molekuláris modelljeik összefüggő gráfokkal szemléltethetők. Ezekben a vegyértékeknek megfelelően a szénatomoknak megfelelő pontok 4-edfokúak, a hidrogénatomoknak megfelelők pedig elsőfokúak.

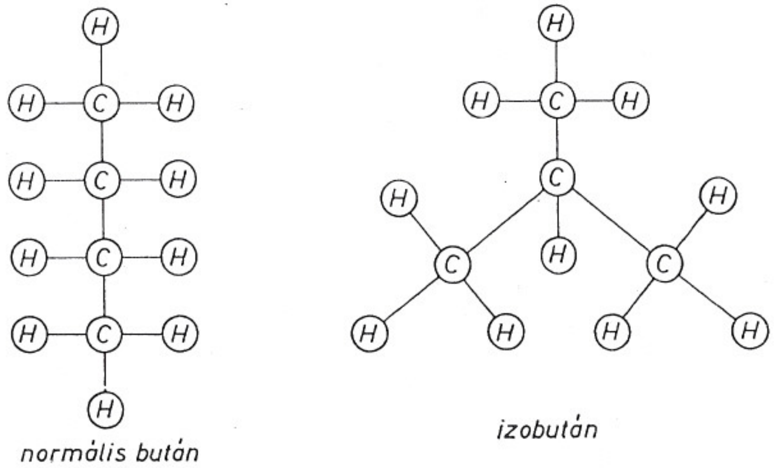
Gyakorlat

7. Szemléltessük gráfokkal paraffinok molekuláris modelljeit az $n=1, 2, 3$ és 4 esetekben.



21. ábra

Az $n=1, 2$ és 3 esetben csak egy-egy gráf adódik: rendre a metán, etán, ill. propán modelljei. Ezeket láthatjuk a 21. ábrán. A gráfpontokat jelző karikákba beírtuk a megfelelő elem vegyjelét. Az $n=4$ esetben két gráf adódik. A nekik megfelelő vegyületeket izomer vegyületeknek nevezik. Ennek megfelelően a 22. ábrán az $n=4$ esetet adó bután két izomerje látható. (Az $n>4$ esetek mindegyikének több izomer felel meg.)



22. ábra

Feladatok

8. Bizonyítsuk be, hogy a paraffinokról már általános képletük elárulja, hogy nyílt szénláncok, azaz molekuláris modelljeik fagráfok.

9. Bizonyítsuk be a következőt: Ha egy hurokélt nem tartalmazó gráf egyetlen pontból áll, vagy bármely két pontját pontosan egy út köti össze, akkor az fagráf, és fordítva, ha egy gráf fa, akkor nem tartalmaz hurokélt, és vagy egyetlen pontból áll, vagy bármely két pontját pontosan egy út köti össze.

10. A síkon (vagy a térben) bizonyos számú pont úgy helyezkedik el, hogy a pontpárok távolságai mind különbözők. Minden pontból a hozzá legközelebbi pontba egyenes szakaszt húzunk. Igazoljuk, hogy zárt poligon nem jött létre.

A 8. feladatban szereplő C_nH_{2n+2} paraffin molekuláris gráfmodelljének $3n+2$ pontja van; ebből n számú 4-edfokú és $2n+2$ számú elsőfokú. Minthogy a fokszámok összegének a fele az élek számát adja (1. fejezet 8. állítás), gráfunk éleinek száma:

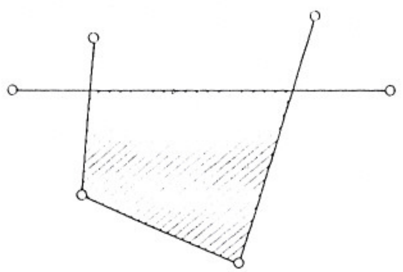
$$\frac{1}{2}(4n+2n+2) = 3n+1;$$

ez pedig 1-gyel kevesebb, mint a pontok száma. Minden molekula modellje szükségképpen összefüggő gráf, és így az 5. állítás szerint a paraffinok molekuláris modelljei fagráfok.

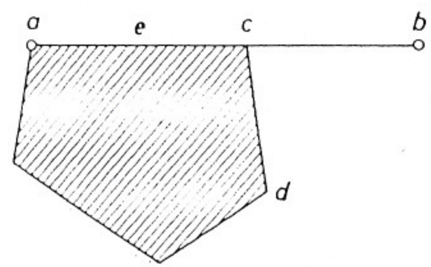
A 9. feladat megoldásához először tegyük fel, hogy a hurokélt nem tartalmazó, nem egyetlen pontból álló G gráf bármely két pontját pontosan egy út köti össze. Ekkor G mindenesetre összefüggő, és nincs egyetlen pontot tartalmazó köre. De G nem tartalmazhat más kört sem, mert különben egy olyant tetszőleges a és b pontjával két útra bonthatnánk, ez pedig azt adná, hogy G-ben a-ból b két különböző úttal is elérhető feltevésünkkel ellentétben.

Most tegyük fel, hogy a G gráf fa. Ekkor G nyilván nem tartalmaz hurokélt, hiszen a hurokél (egyetlen élt tartalmazó) kör, márpedig a fagráfok körmentesek. Minthogy G összefüggő, vagy egyetlen pontból áll, vagy bármelyik pontjából bármely másik G-ben úttal elérhető. Tegyük fel, hogy G-nek az a pontjából a b pontja a legalább egy-egy élben különböző L_1 és L_2 utakkal G-ben elérhető. Kövessük az L_1 és L_2 utak éleit az a pontból kiindulva. Ekkor el kell jutnunk olyan c pontba, amelyben L_1 és L_2 elágazik, azaz a soron következő egy-egy élük nem azonos. Az is lehet, hogy $c=a$. Jelöljük meg L_1 és L_2 éleit az először elért elágazási ponttól kezdve mindaddig, amíg L_1-nek és L_2-nek újabb közös pontjába nem jutunk. Ez legkésőbb b-ben bekövetkezik. A megjelölt élek G egy körét határozzák meg, és ez ellentmond G körmentességének. Ezzel megoldottuk a 9. feladatot.

A 10. feladatban adott pontokat tekintsük egy G gráf pontjainak, a meghúzott szakaszokat pedig G éleinek. E gráf minden köre egyben zárt poligon is, tehát ha a feladat állítása igaz, akkor G nem tartalmazhat kört. A feladat megoldásához azonban nem elegendő pusztán G körmentességét igazolnunk, ugyanis elképzelhető, hogy G-ben nincs kör és zárt poligon, mégis létrejött, mint pl. a 23. ábrán a vonalká-



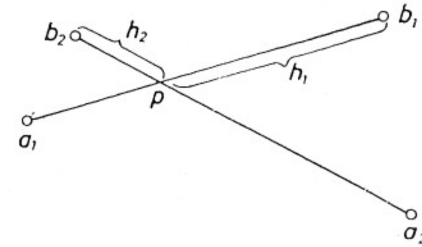
23. ábra



24. ábra

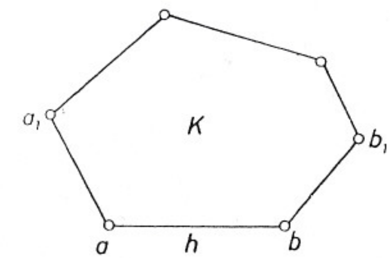
zott idomot határoló poligon. (Ezen persze nem teljesülnek a feladat feltételei.) Ha egy zárt poligon nem azonos G egy körével, akkor szükségképpen van olyan oldala, amely nem éle a gráfnak, azaz van G-nek olyan éle, amely a poligon valamelyik oldalának a meghosszabbítása révén adódik. Legyen a 24. ábrán látható $e = \{a, b\}$ él ilyen. Ekkor azonban a poligon c csúcsa nem lehet gráfpont, mert különben az ab szakaszt nem a kívánalmaknak megfelelően húztuk volna meg (ti. c

közelebb van a-hoz, mint b, és közelebb van b-hez, mint a). Ebből következik, hogy az ab szakasz és az, amelyikre a cd oldal esik, metszik egymást. Tehát ha egy zárt poligon nem azonos G egy körével, akkor a meghúzott szakaszok között van kettő, amelyek metszik egymást.



25. ábra

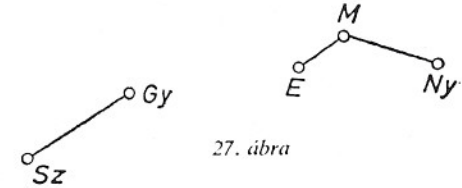
Most pedig megmutatjuk, hogy egymást metsző szakaszok nem jöhettek létre. Tegyük fel az ellenkezőt: az a_1 pontból a b_1-be és az a_2-ből a b_2-be húzott szakaszok a p pontban metszik egymást (25. ábra). Jelöljük h_1-gyel, ill. h_2-vel a p pont távolságát b_1-től, ill. b_2-től. Bizonyítjuk, hogy $h_1 < h_2$. Tegyük fel az ellenkezőt, tehát azt, hogy $h_2 \leqq h_1$. Ebből következik, hogy az a_1b_1 szakasz hossza legalább akkora, mint az a_1p és pb_2 szakaszok összhossza. Az utóbbi összeg azonban nagyobb, mint b_2 a_1-től vett távolsága, minthogy a két pontot összekötő vonalak között legrövidebb az egyenes szakasz. Így az adódik, hogy b_2 közelebb van a_1-hez, mint b_1, márpedig ez ellentmond annak, hogy a_1-ből b_1-be húztunk szakaszt. Tehát $h_1 < h_2$. De hiszen h_1 és h_2 szerepe közt nem látunk semmi különbséget. Fordítva is választhattuk volna az indexeiket; tehát okoskodásunk azt is eredményezi, hogy $h_2 < h_1$. Így ellentmondásra jutottunk. Ennélfogva a meghúzott szakaszok között egymást metszők nem lehetnek, tehát bármely létrejött zárt poligon egyben G egy köre is.



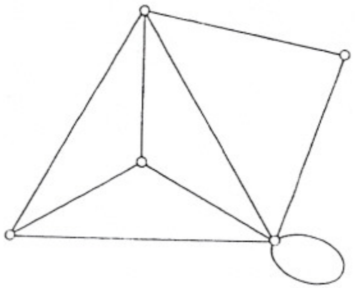
26. ábra

Most viszont azt mutatjuk meg, hogy G körmentes. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik G-ben egy K kör. A feladat feltétele szerint K élei mind különböző hosszúságúak, és így van közöttük egy leghosszabb; legyen ez a h hosszúságú $\{a, b\}$. Figyeljük a 26. ábrát. Az $\{a, a_1\}$ és $\{b, b_1\}$ élek mindegyike rövidebb h-nál. Az $\{a, b\}$ élt csak a-ból vagy b-ből kezdve rajzolhattuk meg, de a-hoz közelebb van a_1, mint b, és b-hez közelebb van b_1, mint a, tehát az $\{a, b\}$ élt meg sem rajzolhattuk; ennélfogva a K kör nem is jöhetett létre. Ezzel megoldottuk a 10. feladatot.

Az utóbbi feladat utasítását követően rajzolt gráfok körmentesek, de nem feltétlenül fagráfok, ugyanis előfordulhat közöttük nem összefüggő is. Pl. ha 5 pontot adunk meg, éspedig úgy, hogy az egyik Szombathelyen, a másik Győrött, a harmadik Egerben, a negyedik Miskolcon és az ötödik Nyíregyházán legyen, akkor a megfelelő gráfot a 27. ábrán láthatjuk.



27. ábra



28. ábra

Egy gráfot *liget*nek nevezünk, ha nem tartalmaz kört. Ugyanis nyilvánvaló, hogy egy liget komponensei fák (egy összefüggő liget persze egyetlen fa). A 10. feladat kapcsán rajzolt gráfok ligetek.

Gyakorlatok

11. Keressük a 28. ábra gráfjának egy olyan összefüggő részgráfját, amely a gráf minden pontját tartalmazza, de egyetlen körét sem.

12. Hány kör van a 28. ábrán látható gráfban?

Feladatok

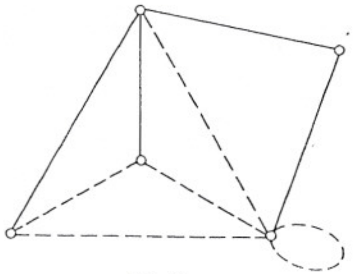
13. Bizonyítsuk be, hogy ha egy k számú komponensből álló gráf pontjainak száma n, akkor éleinek száma legalább $n-k$.

14. Bizonyítsuk be, hogy ha egy k számú komponensből álló gráf pontjainak száma n, és éleinek száma $é$, akkor van a gráfban $é-n+k$ számú kör.

15. Az előző feladat jelöléseit megtartva, bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfra $é-n+k=0$, akkor a gráf liget, és fordítva, ha egy gráf liget, akkor arra $é-n+k=0$.

A 11. gyakorlatot a 3. feladat alapján könnyen végrehajthatjuk: Töröljük a gráf valamely körének egy élét. Ha a megmaradt gráfban van kör, ismét töröljünk egy körbe tartozó élt, és így tovább. A 29. ábra egy végső helyzetet szemléltet; a törölt éleket szaggatottan berajzoltuk.

Az összefüggő G gráf F részgráfját G egy *favázá*nak nevezzük, ha F fagráf és G minden pontját tartalmazza. G-nek F-be nem tartozó éleit a G gráf F-re vonatkozó *kötőél*einek nevezzük.



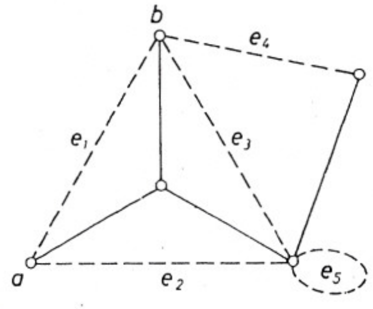
29. ábra

A 11. gyakorlat eredményeként a 28. ábrán látható gráf egy favázát kapjuk. A 29. ábrán szaggatott vonalakkal rajzolt élek a gráf kijelölt favázára vonatkozó kötőélei. A végrehajtási utasítás alapján a következő, általános érvényű megállapítást is kimondhatjuk:

16. *Minden összefüggő gráfnak van faváza.*

Nyilvánvaló, hogy fagráfnak csak egyetlen faváza van, ti. saját maga. Ha viszont egy összefüggő gráfban van kör, akkor annak több faváza is lehet. Pl. a 30. ábrán a 28-on látható G gráfnak a 29-en kijelölt favázától különböző F favázát jelöltük ki. (A két faváz G-nek nem ugyanazon éleiből áll, ezért mondjuk, hogy különbözők, bár izomorfak. Könnyen találhatók G-nek nem izomorf favázai is.) G-nek F-re

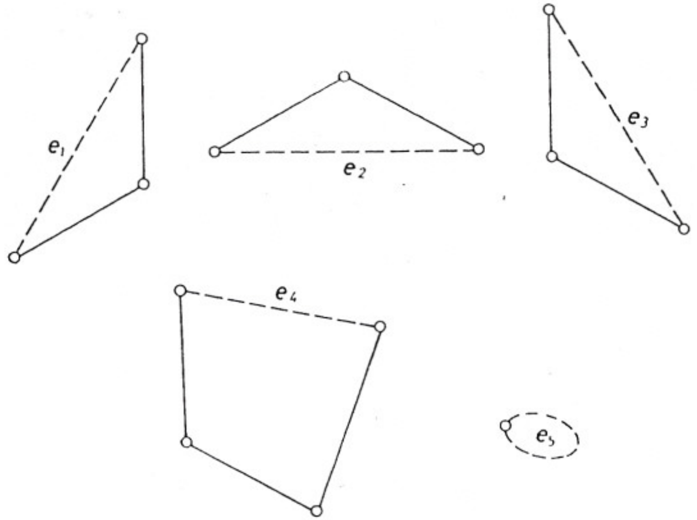
vonatkozó kötőélei: e_1, e_2, e_3, e_4 és e_5. Az e_1 kötőél a és b végpontja — mint G minden pontja — F-nek is pontja. A 9. feladat szerint az a és b pontot pontosan egy, csupa F-beli élből álló út köti össze. Ha csatoljuk ehhez az e_1 kötőélt, kört kapunk. Hurokél természetesen mindig kötőél, és önmaga kört alkot. Az elmondottak általános érvényét az alábbi állítás fejezi ki:



30. ábra

17. *Ha F az összefüggő G gráfnak egy faváza, és az e él G-nek egy F-re vonatkozó kötőéle, akkor G-nek pontosan egy olyan köre van, amely az e élt tartalmazza, de G más F-re vonatkozó kötőélét nem.*

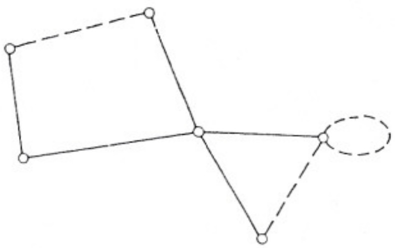
Az olyan köröket, amelyek mindegyikében pontosan egy F-be nem tartozó él van, a G gráf F-re vonatkozó *alapkör*einek, összességüket a G gráf F-re vonatkozó *alapkörrendszeré*nek nevezzük. Az alap szó helyett *bázis* is használatos. A 30. ábra F-re vonatkozó báziskörrendszerének köreit a 31. ábrán szétválasztva is megrajzoltuk. Van azonban a gráfban más kör is. Ezeket könnyen fellelhetjük, ha a 9. feladat állítását is felhasználva, az alábbi kérdésre keressük a választ: Hány olyan kör



31. ábra

van, amelyben a kötőélek száma pontosan 2, 3, … ? A következő indexű kötőélpárok F-beli élekkel egy-egy kört alkotnak: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4) és (3, 4); hasonlóan a következő hármasok: (1, 2, 3) és (1, 2, 4). Ha ezekhez hozzávesszük az 5 alapkört, válaszolhatunk a 12. gyakorlat kérdésére: A 28. ábrán 13 kör van.

A 6. állítás szerint az n-pontú és $é$-élű összefüggő G gráf bármely favázában pontosan $n-1$ él van, és így bármely favázára vonatkozó kötőélek száma $\acute{e}-(n-1) = \acute{e}-n+1$. Tehát a 17. állítás alapján mondhatjuk, hogy G bármely báziskörrendszere $\acute{e}-n+1$ számú körből áll. Egyúttal a 13. és 14. feladatra is választ kaptunk abban a speciális esetben, amelyben a szóban forgó gráf összefüggő, azaz $k=1$.



32. ábra

Általában nem mondhatjuk, hogy G köreinek száma nagyobb, mint $\acute{e}-n+1$. A 32. ábrán látható gráfnak mind a 3 köre alapkör a kijelölt favázára vonatkozóan. Minthogy ekkor $\acute{e}-n+1 = 3$, gráfunk körei mind alapkörök.

Össze nem függő G gráf minden komponenséből egy-egy favázat választva, ligetet kapunk; ezt G egy *ligetvázának* nevezzük. Jelöljük G pontjainak számát n-nel, komponenseinek számát k-val, komponenseinek favázait F_i-vel ($i=1, 2, \dots, k$) és az ezekből álló ligetváz éleinek számát $\acute{e}$-vel; jelöljük továbbá F_i pontjainak számát n_i-vel és éleinek számát $\acute{e}_i$-vel. Ekkor

$$n_1+n_2+\dots+n_k = n,$$

$$\acute{e}_1+\acute{e}_2+\dots+\acute{e}_k = \acute{e},$$

és a 6. állítás alapján

$$\acute{e}_1 = n_1-1,$$

$$\acute{e}_2 = n_2-1,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$\acute{e}_k = n_k-1.$$

E k számú egyenlőség bal, ill. jobb oldalait összeadva, és az előző két összefüggést felhasználva, a következőt kapjuk:

$$\acute{e} = n-k.$$

A G gráf $\varrho(G)$-vel jelölt *rangján* az $n-k$ számot értjük. E szám megadja G bármely ligetvázának élszámát. Ezzel megoldottuk a 13. feladatot is. A gráf kötőélein és alapkörein a komponensként vett kötőéleket, ill. alapköröket értjük. Ezek száma egyaránt $\acute{e}-n+k$, és ebből a 14. feladat megoldása is adódik.

A 15. feladat megoldásához először tegyük fel, hogy a szóban forgó gráfra $\acute{e}-n+k = 0$. Ekkor a gráfnak nincs kötőéle, tehát liget. Fordítva, ha a gráf k számú komponensből álló liget, akkor saját magának ligetváza, és így kötőéleinek száma 0, azaz $\acute{e}-n+k = 0$.

A 14. és 15. feladat indokolja az alábbi elnevezést: A G gráf $\mu(G)$-vel jelölt *ciklomatikus számán* (körmérő számán) vagy *nullitásán* az $\acute{e}-n+k$ számot értjük. Az utóbbiakat összefoglalva:

18. *A G gráf rangja: $\varrho(G) = n-k$; ez megadja G bármely ligetvázának élszámát. A G gráf nullitása: $\mu(G) = \acute{e}-n+k$; ez megadja G bármely ligetvázára vonatkozó kötőéleinek számát és egyúttal bármely báziskörrendszerében levő köreinek számát.*

Most a gráfelmélet két tipikus alkalmazását mutatjuk be. Az egyikben bizonyos tervezési feladat gazdaságos módját fogjuk felkutatni, a másikban pedig elektromos hálózatok számítási eljárásának egyszerűsítését mutatjuk meg. A két probléma tárgyalása alátámasztja a faváz és a báziskörrendszer fogalmának jelentőségét.

Körmentes hálózat gazdaságos építése

Ha falvaknak egy rendszerét vízvezeték-hálózatba akarjuk bekapcsolni, akkor meg kell építenünk egy, a falvakat összekapcsoló vezetékrendszert. Az építési tervet nyilván úgy kell elkészíteni, hogy megvalósítása gazdaságos és a célnak megfelelő legyen. Tervünk elkészítéséhez térképvázlat kínálkozik. Felveszünk egy papírlapon a falvaknak megfelelően pontokat. Ha egy, a falvakat összekapcsoló vezetékrendszernek megfelelő vonalrendszert rajzolunk, gráfot kapunk. Azonnal látjuk, hogy olyan gráfot kell terveznünk, amelynek pontjai a falvaknak megfelelően adottak, egy-egy éle pedig két falut összekötő vezetékszakasznak megfelelő vonal. A víznek a megépített vezetékrendszeren át minden faluba el kell jutnia. Ez annyit jelent, hogy a megtervezendő gráfunknak összefüggőnek kell lennie. A gazdaságosság megköveteli, hogy fölöslegesen ne építsünk vezetéket. Ez gráfunk körmentességét követeli, hiszen ha egy összefüggő gráf egy körének egy élét töröljük, akkor a 3. feladat szerint még mindig összefüggő marad, és tartalmazza a gráf összes pontját, tehát a törölt élnek megfelelő vezeték építése fölösleges. Ennélfogva az építési tervrajzot jelentő gráfnak fagráfnak kell lennie, mégpedig a „legolcsóbb fagráf"-nak, amit precízen a következőképpen fogalmazhatunk meg:

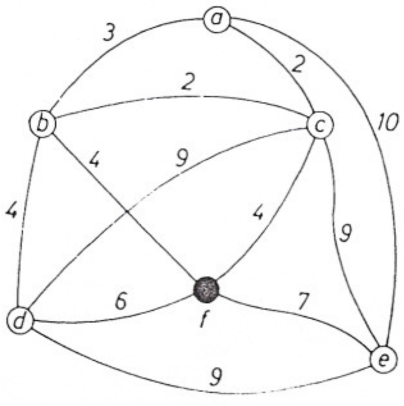
Vegyünk fel egy gráfot, amelynek pontjai a falvakat, és élei a falupárok között szóba jöhető vezetékeket jelölik (feltesszük, hogy csak véges sok jöhet szóba). Számítsuk ki a falupárokat összekötő vezetékek építési költségeit, és írjuk rá a megfelelő élekre. Az e él $\varkappa(e)$ *költségén* az e-re írt számot értjük. Két falunak megfelelő pontot nyilván csak egy éllel kötünk össze, mégpedig a legolcsóbb vezetéknek megfelelően, de ezt feladatunk megoldásához nem szükséges kikötnünk.

A G gráf egy G' *részgráfjának* $\varkappa(G')$ *építési költségén* a G' éleire írt számok összegét értjük. A feladatunk tehát G egy minimális építési költségű favázának meghatározása; azaz G olyan F *gazdaságos favázát* keressük, hogy ha G favázai $F, F_1, F_2, \dots,$ akkor minden lehetséges i-re

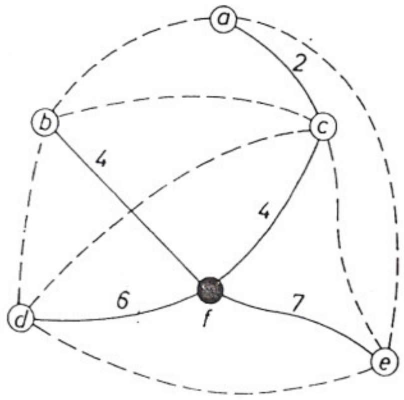
$$\varkappa(F) \leqq \varkappa(F_i).$$

Ha az F éleinek megfelelő vezetékeket építjük meg, akkor feladatunkat a lehető leggazdaságosabban oldottuk meg.

A 33. ábrán látható gráf egy építést megelőző térképvázlat. A befeketített f pont forrást jelöl; ebből az a, b, c, d és e pontokkal jelölt falvakat vízzel kell ellátni. Vezetékek a gráf élei mentén építhetők. A falupárokat összekötő szakaszokra ráírtuk a megfelelő vezetékek építési költségeit (az egység mondjuk 1 millió forintot

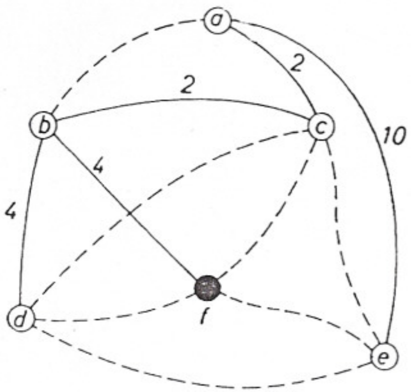


33. ábra

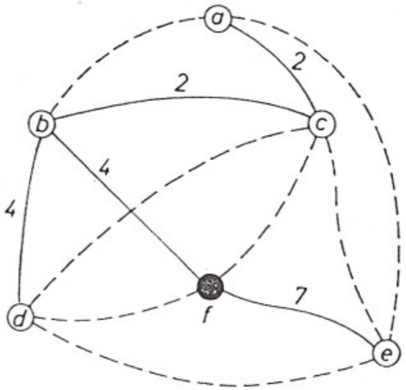


34. ábra

jelent). Készítsünk a térképvázlat alapján olyan építési tervet, amelynek megvalósítása gazdaságos. Ha pl. úgy építünk, hogy f-ből b, c, d és e közvetlenül kapjon vizet, akkor már csak a-hoz kell vezetéket építeni, és ezt legolcsóbban c-ből indulva tehetjük. A megfelelő építési terv a 34. ábrán látható; az építendő vezetékek gráfunk egy favázát jelölik ki, a nem építendőket szaggatottan rajzoltuk. A faváz építési költsége 23. E faváz esetleg gazdaságosnak tűnik, hiszen óvakodtunk nagy (10 és 9)



35. ábra



36. ábra

költségű vezetéképítést tervezni. Ám a 35. ábrán látható építési terv olcsóbban kivitelezhető — építési költsége 22 —, holott ennek alapján a legdrágább vezetéket is meg kell építeni. További próbálgatással még kisebb építési költségű favázat is

találhatunk. Pl. a 36. ábrán látható faváz építési költsége mindössze 19. Valamennyi faváz építési költségének kiszámítása révén megállapíthatnánk, hogy a 36. ábrán kijelölt faváz már gazdaságos. De ez az eljárás általában hosszadalmas.

Célszerű tehát aránylag könnyen véghezvihető, gazdaságos faváz kijelölésére vezető tervezési módszert alkalmazni. Most ilyen módszereket ismertetünk.

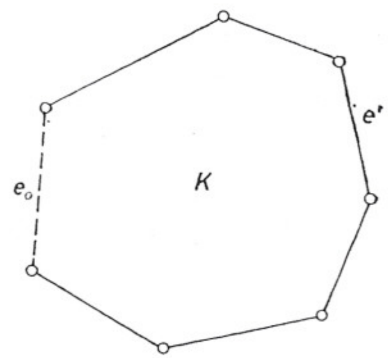
1. módszer

Az összefüggő G gráf egy gazdaságos favázát keressük. Töröljünk G-nek körökben szereplő élei közül egy legnagyobb költségűt. Az így kapott G_1 gráf G-nek részgráfja; továbbá a 3. feladat szerint G_1 összefüggő és G minden pontját tartalmazza. Ezután töröljünk a G_1 köreiben szereplő élek közül egy legnagyobb költségűt s í. t. Ha törlési utasításunk már nem hajtható végre, az utoljára kapott F gráfnak már nincs köre, és F a G gráfnak részgráfja. A 3. feladat lépésenkénti alkalmazásából azonban az is adódik, hogy F összefüggő, és G minden pontját tartalmazza. Az F gráf tehát G-nek egy faváza. Bebizonyítjuk, hogy F a G gráfnak gazdaságos faváza.

Legyen F_0 a G gráf gazdaságos favázai közül egy olyan, amelynek maximális sok F-beli éle van. Bebizonyítjuk, hogy ez a gazdaságos faváz csak maga az F lehet; tehát F valóban gazdaságos faváz. Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy F_0 nem azonos F-fel. F és F_0 ugyanannak a G gráfnak faváza, tehát élszámuk megegyezik, és minthogy F és F_0 nem azonos, mindegyiknek van a másikba nem tartozó éle. Jelöljünk e_0-lal F_0-nak F-be nem tartozó élei közül egy minimális költségűt, és hasonlóképpen jelöljünk e-vel F-nek F_0-ba nem tartozó élei közül egy minimális költségűt. Vajon melyikük kisebb költségű? Bebizonyítjuk, hogy

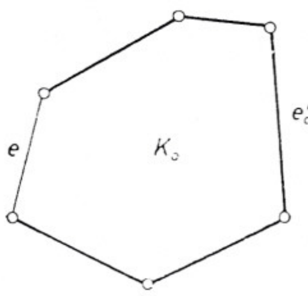
$$\varkappa(e_0) \geqq \varkappa(e).$$

Minthogy e_0 G-nek F-re vonatkozó kötőéle, a 17. állítás szerint létezik G-nek e_0-t tartalmazó olyan K köre, amelynek élei e_0 kivételével mind F-beliek. K élei közül e_0 költsége maximális, hiszen F előállításakor K élei közül csak e_0-t töröltük; ezt viszont csak akkor tehettük, ha e_0 költségénél nagyobb költségű él nem szerepelt K élei között. Minthogy F_0 fagráf, van K-nak olyan e' éle, amely nem éle F_0-nak (37. ábra). Az előbbiek szerint $\varkappa(e_0) \geqq \varkappa(e')$. De az e él minimumtulajdonsága miatt $\varkappa(e') \geqq \varkappa(e)$ is áll, és ezzel $\varkappa(e_0) \geqq \varkappa(e)$ bizonyított.



37. ábra

Másrészt vegyük fontolóra a következőket: Az e él G-nek F_0-ra vonatkozó kötőéle. Ennélfogva a 17. állítás szerint létezik G-nek az e élt tartalmazó olyan K_0 köre, amely tartalmazza az e élt, de a többi éle mind F_0-beli. Minthogy F fagráf, van K_0-nak olyan e_0' éle, amely nem éle F-nek (38. ábra). Most vegyük F_0-hoz az e élt, és töröljük F_0-ból az e_0' élt. Az F_0-ból így nyert F_1 gráf a 3. feladat szerint összefüggő, és G minden pontját tartalmazza. F_1 körmentes, hiszen F_0 az volt, az e él hozzávételével csak a K_0 kör jött létre, de azt e_0' törlésével megszüntettük. Tehát F_1 a G gráfnak faváza, éspedig egy éllel több élt tartalmaz F-ből, mint F_0, hiszen az F_0-hoz hozzávett e él F-beli, az elhagyott e_0' viszont nem. Minthogy F_0 G-nek a lehető legtöbb F-beli élt tartalmazó gazdaságos faváza, F_1 nem lehet gazdaságos faváz. Ebből következik, hogy $\varkappa(e) > \varkappa(e_0')$. De e_0 minimumtulajdonsága miatt $\varkappa(e_0') \geqq \varkappa(e_0)$ is áll, és így adódik, hogy



38. ábra

$$\varkappa(e) > \varkappa(e_0),$$

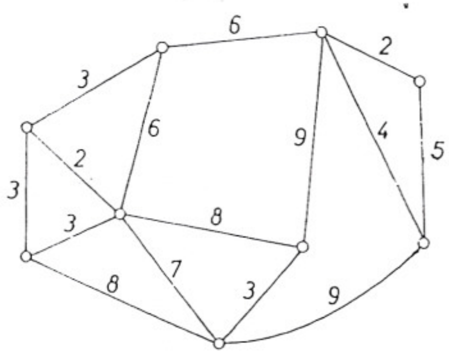
ez pedig ellentmond a fentebb bizonyított egyenlőtlenségnek.

Tehát F azonos G egy gazdaságos favázával: F_0-lal.

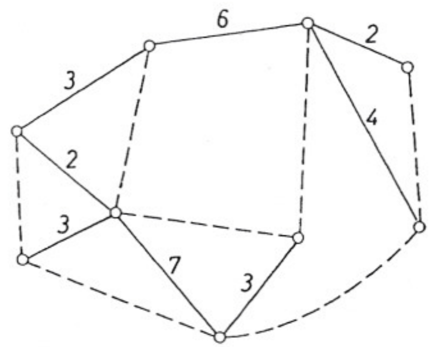
Alkalmazzuk módszerünket a 33. ábrán látható gráfra. Tapasztalni fogjuk, hogy gazdaságos favázainak építési költsége 19.

2. módszer

Jelöljük ki az összefüggő G gráf egy legkisebb költségű élét. Minden további élt a lehető legkisebb költségűek közül jelölünk ki, arra ügyelve, hogy G egyetlen körének se legyen valamennyi éle kijelölt.



39. ábra



40. ábra

Az előbbi okoskodáshoz hasonló módon be lehet látni, hogy ha utasításunknak megfelelően már nem jelölhető ki él, akkor G egy gazdaságos favázának éleit jelöltük ki.

Alkalmazzuk a 2. módszert a 39. ábrán látható gráfra. Egy megoldást a 40. ábrán találunk; építési költsége 30.

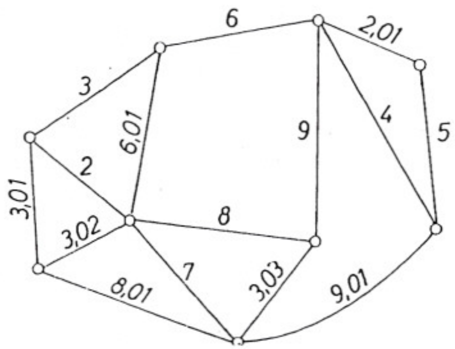
3. módszer

A most közlendő eljárás csak akkor vezet feltétlenül gazdaságos faváz kijelölésére, ha az élek költségei mind különbözők. Ez a gyakorlatban majdnem mindig teljesül, de ha mégsem, akkor a következőképpen járunk el:

Az élek költségei a gyakorlatban mindig egész számoknak vehetők (pl. forintegységekben számolunk). Ha egy élköltség többször is előfordul, akkor előfordulásait egyikük kivételével úgy módosítjuk, hogy az egyikhez hozzáadjuk az egységnek egy hányadát, legyen ez q, a másikhoz $2q$-t, a harmadikhoz $3q$-t s. í. t., és ehhez q-t úgy választjuk meg, hogy a módosítások összege az egységnél kisebb legyen. Ha k számú élköltség fordul elő többször, és egy élköltség maximálisan m-szer szerepel, akkor ehhez q-t elegendő az alábbi összefüggést kielégítően választanunk:

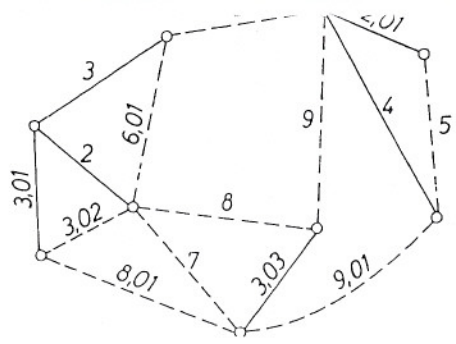
$$k\big(q+2q+\ldots+(m-1)q\big) < 1.$$

Pl. a 39. ábrában a 2, 3, 6, 8 és 9 élköltségek ismétlődnek, tehát $k=5$, és 3 fordul elő legtöbbször, 4-szer, tehát $m=4$; ennélfogva q megfelelő, ha kisebb, mint $\frac{1}{30}$. Egyszerűség kedvéért legyen $q=0{,}01$. Ennek megfelelően módosított élköltségeket vettünk a 41. ábrán.



41. ábra

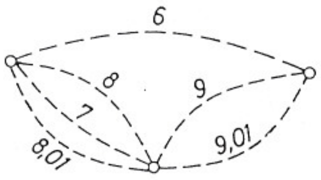
Általában is az így módosított gráfban már nincsenek azonos élköltségek; feladatunkat erre a gráfra oldjuk meg. A megoldás megoldása lesz az eredeti feladatnak is, ugyanis belátjuk, hogy a módosított gráf minden gazdaságos faváza az eredetiben is gazdaságos: Ha a gráfnak G' részgráfja, akkor G' eredeti gráfbeli építési költsége a módosított gráfban vett építési költségének az egész része lesz, hiszen a módosítások összege 1-nél kisebb. Mármost ha F a módosított gráf egy gazdaságos faváza, akkor a gráf minden F_i favázára a módosított értékekkel számolva, $\varkappa(F) \leqq \varkappa(F_i)$ áll fenn. Ezek az egyenlőtlenségek nyilván akkor is fennállnak, ha mindkét oldal helyett



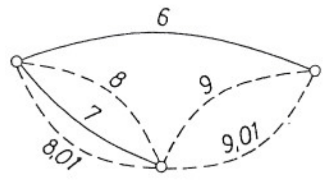
42. ábra

azok egész részét vesszük, ami viszont azt jelenti, hogy F az eredeti gráfnak is gazdaságos faváza.

Ezek után legyen a költségeket felmérő térképvázlat az összefüggő G gráf, és legyenek G éleinek költségei mind különbözők. Építsük minden faluból (gráfpontból) kiindulva a legolcsóbb vezetéket. Lehetséges, hogy ekkor ugyanazt a vezetéket mindkét végéből kiindulva építjük; pl. a legolcsóbbat biztosan. Az viszont nem fordulhat elő, hogy G egy körét kijelölő valamennyi vezetéket felépítjük, ugyanis a 10. feladatban szereplő gráf körmentességét igazoló okoskodás akkor is helyes, ha a pontpárokat összekötő vonalak nem egyenes szakaszok, és ha két pont távolságát az összekötő vonal költségével pótoljuk. (Ellenőrizze az olvasó.) Tehát az utasításunk szerint megépített



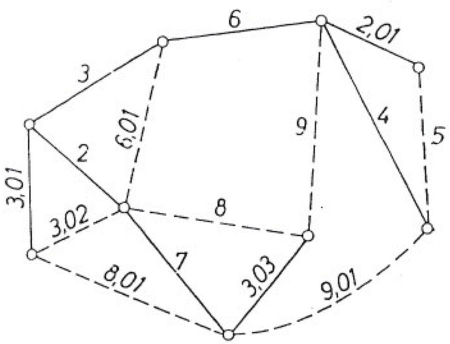
43. ábra



44. ábra

vezetékek G egy körmentes G_1 részgráfját jelölik ki. De G_1 nem szükségképpen összefüggő, mint pl. a 41. ábrához tartozó G_1 sem, amelynek élei a 42. ábrán a nem szaggatottan rajzolt vonalak. Most forrasszuk össze G-nek G_1 azonos komponenseibe eső pontjait egyetlen ponttá, és töröljük a létrejött hurokéleket. Jelöljük H_1-gyel a G-ből így létrehozott gráfot (43. ábra).

Ismételjük meg H_1-re a G-re kiírott építési utasítást, és H_1 újólag megépített éleit (44. ábra) csatoljuk G_1-hez. A G_1-ből így nyert gráfot jelöljük G_2-vel (45. ábra). Eljárásunkat — G_1 helyett G_2-t véve — megismételjük, és az ismétlést mindaddig folytatjuk, amíg összefüggő gráfot nem kapunk. (Példánkban G_2 már összefüggő.) Be lehet látni, hogy végül G egy gazdaságos favázára jutunk. A bizonyítás hosszadalmas, ezért mellőzzük.



45. ábra

Példánkban a gazdaságos faváz G_2; ennek építési költsége 30,05. A módosításokat leszámítva 30-at kapunk, megegyezésben az eredeti gráf 40. ábrán kijelölt gazdaságos favázának építési költségével.

A 3. módszer esetleg több lépésből áll, mint az előzőek, viszont az egyes lépések végrehajtása akkor is kevesebb körültekintést kíván; pl. egy építendő vezeték kijelöléséhez elegendő egyszerre csak egyetlen ponthoz illeszkedő élek költségeit összehasonlítani.

Általában, hogyha az élek költségei nem mind különbözők, akkor gazdaságos faváz kijelölése nem szükségképpen egyértelmű, viszont ha az élek költségei mind különbözők, akkor a gazdaságos faváz egyértelműsége nyilvánvaló.

A gazdaságos faváz keresésének problémáját a következő módon általánosíthatjuk: Rendeljünk egy összefüggő G gráf minden éléhez egy-egy számot (akár negatívokat is). G egy G' *részgráf*ja *értékén* a G' éleihez rendelt számok összegét értjük. Keressük G egy minimális értékű favázát.

min. értékű faváz

Előfordulhat pl. olyan probléma is, amelyben G egy maximális értékű favázát keressük. Jelentsenek pl. G pontjai városokat, élei pedig országutakat. Az országutakon a városok között végbemenő szállítást akarunk lebonyolítani. Erre a célra ki akarunk jelölni lehetőleg kevés, számunkra megfelelő országutat, biztosítva, hogy a kijelölt országutakon bármely városból bármely másikba lehessen szállítani. Osztályozzuk az országutakat: a számunkra megfelelőbb (pl. jobb minőségű vagy kevésbé emelkedő stb.) nagyobb osztályzatot kap. Az osztályzatokat rendeljük a megfelelő élekhez. Ekkor G egy maximális értékű favázát kell keresnünk.

A gazdaságos faváz keresésének módszerei maximális értékű faváz keresésére is alkalmasak. Ha ugyanis az élekhez rendelt számok helyébe a -1-szereseiket írjuk, az ezek mellett nyert minden minimális értékű faváz az eredeti számok mellett maximális értékű faváz lesz.

Elektromos hálózatok számítása

Elektromos hálózat drótdarabokból, égőkből, ellenállásokból, tekercsekből, kondenzátorokból, generátorokból álló alkatrészek összekapcsolásából jön létre. Minden alkatrész két ponton — a végeiben — csatlakozik a többihez. A csatlakozási pontokat csomópontoknak nevezik. Egyszerűség kedvéért most csak ohmikus ellenállású alkatrészekből és telepekből álló hálózatokra szorítkozunk. A kapcsolási rajzot gráffal szemléltetjük: az élek az alkatrészeket, a pontok pedig a hálózat csomópontjait jelentik. Telepnek megfelelő élt a 46. ábrán látható szokásos módon jelölünk. Egy él szemléltette alkatrész adatait a rövidség kedvéért helyenként az él adatai gyanánt fogjuk említeni.

46. ábra

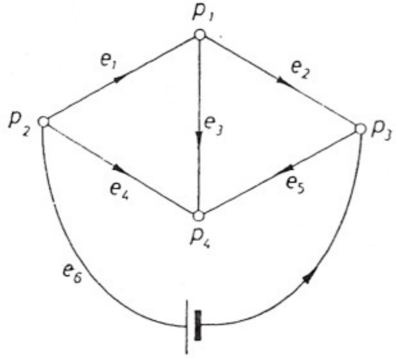
Kérdés: Hogyan lehet meghatározni az egyes alkatrészekben folyó áramok erősségeit és irányait, ha ismerjük az alkatrészek ellenállásait és a telepek feszültségeit: a telepek ún. elektromotoros erőit?

Az áramok irányainak meghatározását előjel-meghatározásokra lehet visszavezetni. Gondoljuk meg ugyanis, hogy ha egy árammérőt végeinek felcserélésével két módon is ugyanarra a helyre iktatunk hálózatunkba, a mérő skáláján mutatott értékek egymás -1-szeresei lesznek. Ennek megfelelően tetszőlegesen jelölünk ki a hálózatot szemléltető gráf minden élén egy-egy irányt, mintegy koordinátatengelynek tekintve minden egyes élt, amelynek irányításához viszonyítva jellemezhetjük az élben mutatkozó áramerősségek és elektromotoros erők előjeleit: pozitívnak akkor tekintve ezeket, ha irányuk megegyezik az élen rögzített iránnyal; máskor negatívnak.

Ezek után a feltett kérdésre a Kirchhoff-féle törvények alapján felírt egyenletrendszer megoldásával válaszolhatunk.

Kirchhoff csomóponti törvénye szerint bármely csomópontra érvényes, hogy a befolyó áramok összege egyenlő a kifolyó áramok összegével.

Kirchhoff huroktörvénye a hálózat köreire vonatkozik. Lássuk el ezeket tetszés szerint egy-egy befutási iránnyal. Mindegyikükhöz képezzünk két összeget: az egyiknek tagjait úgy kapjuk, hogy a szóban forgó kör minden egyes élének ellenállását megszorozzuk az élben folyó áram erősségével, és ha az élen rögzített irány a kör befutási irányával ellenkező, még -1-gyel is; a másik összeg tagjai a kör egyes éleihez tartozó elektromotoros erők lesznek, ugyancsak -1-gyel szorozva akkor, ha a szóban forgó él irányítása a kör befutási irányával ellenkező. Mármost Kirchhoff huroktörvénye szerint e két összeg — amelyeket a hálózat egy-egy köréhez képeztünk — mindig egyenlő egymással.



47. ábra

Megjegyezzük, hogy ha az áram erőssége időtől függően változó — pl. változó áramú vagy feszültségű generátor táplálja a hálózatot —, akkor a fenti törvények bármely időpillanatban érvényesek.

Tekintsük példaként a 47. ábrán szemléltetett hálózatot. Az e_6 éllel ábrázolt telep elektromotoros ereje E volt; az e_k élnek megfelelő alkatrész ellenállása R_k ohm, az alkatrészben folyó ismeretlen áram erőssége pedig I_k amper ($k=1, 2, \ldots, 6$). Ha Kirchhoff csomóponti törvényét a p_1 pontra alkalmazzuk, akkor a következőt kapjuk:

$$I_1 = I_2 + I_3;$$

ezt 0-ra redukálva pedig a következőt:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

A 0-ra redukált alak bal oldalát rögtön úgy írhatjuk fel, hogy a szóban forgó csomópontba befolyó áramok erősségeit és az innen kifolyó áramok erősségeinek -1-szereseit összeadjuk. A Kirchhoff csomóponti törvénye alapján nyert négy egyenlet (a megfelelő pontok indexeivel sorszámozva) a következő:

(1) $$I_1 - I_2 - I_3 = 0,$$

(2) $$-I_1 - I_4 - I_6 = 0,$$

(3) $$I_2 - I_5 + I_6 = 0,$$

(4) $$I_3 + I_4 + I_5 = 0.$$

E négy egyenlet azonban nem független egymástól, mert pl. az első három egyenlet (pontosabban: oldalaik) összegezésével a következőt kapjuk:

$$-I_3 - I_4 - I_5 = 0;$$

ez pedig a (4)-gyel egyenértékű, vagyis (4) az első három egyenlet következménye. Ugyanígy látható be, hogy a négy egyenlet közül bármelyik a többiek következménye. Tehát a hat ismeretlen kiszámításához még legalább három egyenletre van szükségünk. Kirchhoff huroktörvénye alapján annyi további egyenletet nyerhetünk, ahány kört tartalmaz a 47. ábrán látható gráf. Vizsgálatunk hét kört eredményez; ezeket láthatjuk a 48. ábrán. A körök mellé rajzolt nyilak a felvett bejárási irányokat jelzik.

Tehát a hét egyenlet:

① $$-R_1 I_1 - R_3 I_3 + R_4 I_4 = 0,$$

② $$-R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_5 I_5 = 0,$$

③ $$-R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_4 I_4 - R_5 I_5 = 0,$$

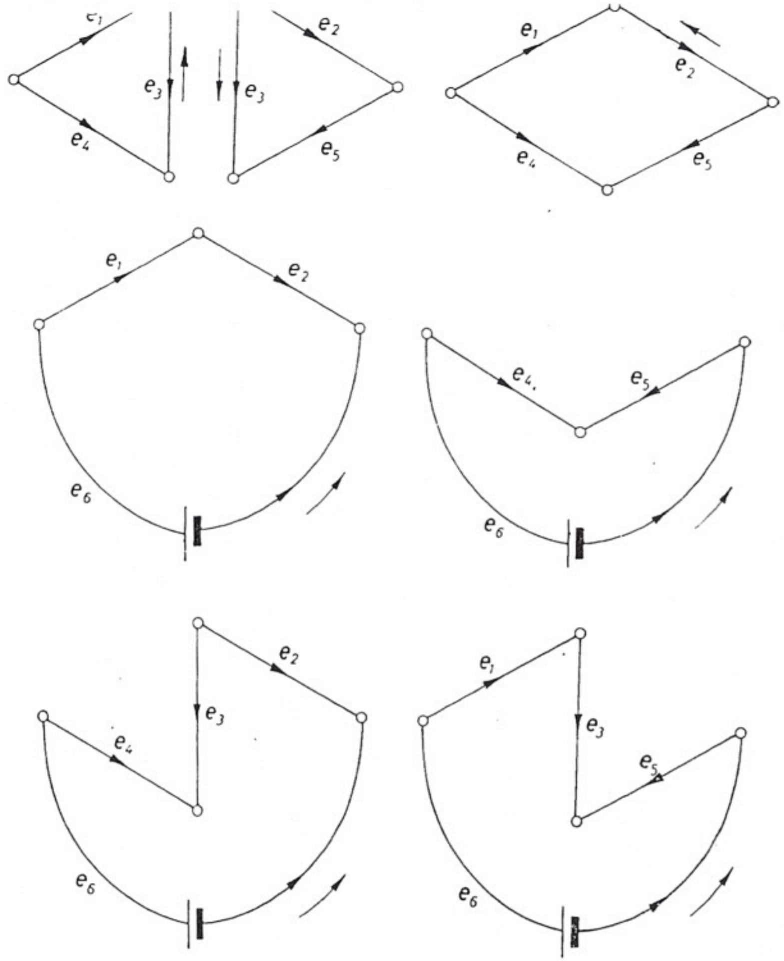
④ $$-R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_6 I_6 = E,$$

⑤ $$-R_4 I_4 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = E,$$

⑥ $$-R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4 + R_6 I_6 = E,$$

⑦ $$-R_1 I_1 - R_3 I_3 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = E.$$

Most viszont a fentiekből adódó három egyenlettel együtt tíz egyenlet áll rendelkezésünkre, és így okkal várhatjuk, hogy az utóbbi hét egyenlet sem független egymástól. Gondos vizsgálattal meggyőződhetünk arról, hogy az utóbbi hét egyenlet közül több módon is kiválaszthatunk hármat, amelyek függetlenek egymástól, és amelyeknek a többi négy mindegyike következménye — de ez nem akármelyik három egyenletre teljesül. Példaként azt mutatjuk meg, hogy az ①, ④, ⑦ egyenleteknek a többiek következményei, továbbá, hogy az ①, ②, ③ egyenleteknek ⑤ nem következménye.



48. ábra

Ha ④-ből kivonjuk ⑦-et, akkor ②-t kapjuk; szimbolikusan:

$$④ - ⑦ = ②.$$

Tehát ④ és ⑦ minden közös megoldása kielégíti a ② egyenletet is: ④-nek és ⑦-nek ② következménye. Ellenőrizhetjük, hogy fennállnak az alábbi szimbolikusan felírt összefüggések is:

$$① + ④ - ⑦ = ③,$$

$$⑦ - ① = ⑤,$$

$$④ - ① = ⑥.$$

Ezzel beláttuk, hogy az ①, ④, ⑦ egyenleteknek a többiek következményei.

A ③ egyenlet ①-nek és ②-nek következménye, mert

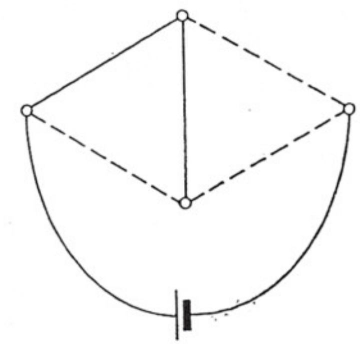
$$① + ② = ③.$$

Tehát azt kell megmutatnunk, hogy ⑤ ①-nek és ②-nek általában nem következménye. Megtehetjük, hogy hálózatunkban minden alkatrész ellenállását és a telep elektromotoros erejét egységnyinek választjuk. Ekkor ①-nek és ②-nek közös megoldása

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_6 = 1, \qquad I_4 = 2 \quad \text{és} \quad I_5 = 0 \text{ is},$$

ez viszont ⑤-nek nem megoldása.

Vajon mi az oka annak, hogy az előbbi három egyenletnek a többiek következményei; az utóbbi háromnak pedig nem? A 49. ábrán kijelöltük gráfunk egy favázát. Láthatjuk, hogy az ①, ④, ⑦ egyenleteket szolgáltató körök éppen az e favázra vonatkozó báziskörrendszert alkotják. Az ①, ②, ③ egyenleteket szolgáltató K_1, K_2, K_3 körök nem alkotnak báziskörrendszert. Tudjuk ugyanis, hogy báziskörök mindegyike pontosan egy kötőélt tartalmaz (17. állítás). Tehát ha volna egy faváz, amelyre vonatkozóan K_1, K_2 és K_3 bázikör volna, akkor K_3-nak pontosan egyetlen éle volna kötőél. Minthogy e három kör együttvéve K_3 élein kívül csak az e_3 élt tartalmazza, hárman együttvéve legfeljebb két kötőélt tartalmaznának. Teljes általánosságban a következőt mondhatjuk:



49. ábra

19. *Ha ohmikus ellenállású alkatrészekből és telepekből álló hálózatnak n számú csomópontja van, akkor tetszőlegesen választott $n-1$ számú csomóponti egyenlet bármely báziskörrendszer alapján felírt hurokegyenletekkel együtt olyan egyenletrendszert szolgáltat, amelyből az ellenállások értékei és a telepek elektromotoros erői ismeretében az alkatrészekben folyó áramok erősségei és irányai meghatározhatók.*

Ha az n számú csomópontban csatlakozó $é$ számú alkatrészből álló hálózatot az összefüggő G gráf szemlélteti, akkor $n-1$ éppen G rangja, és a báziskörök száma G nullitása, tehát a 18. állítás szerint az ismeretlen áramok kiszámíthatók a

$$\varrho(G) + \mu(G) = é$$

számú egyenletből. Minthogy az ismeretlenek száma is $é$, ennyi egyenletre általában szükség is van.

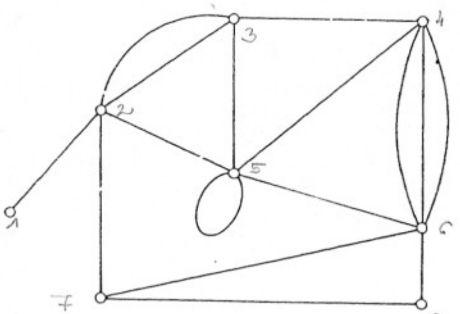
A 19. állítás bizonyítása hosszadalmasabb és komolyabb matematikai eszközök használatát igényli, ezért e könyv tervezett folytatásában részletezzük.

*

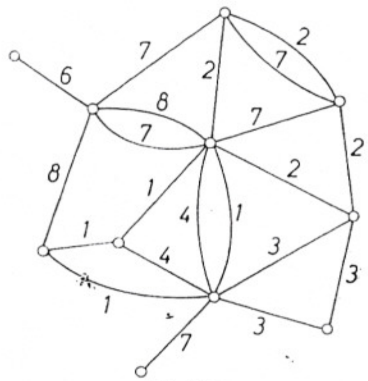
20. Rajzoljunk olyan fagráfokat, amelyekben minden pont foka legfeljebb 3. Mennyi az első- és harmadfokú pontok számának különbsége a rajzolt gráfokban?

21. Jelöljük ki az 50. ábrán látható gráfnak 5 olyan részgráfját, amelyek egyike sem faváza a gráfnak, és rendre rendelkeznek a következő két-két tulajdonsággal:

1. Összefüggő és körmentes. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2. Összefüggő és 8-pontú.
3. Összefüggő és 7-élű.
4. 8-pontú és körmentes.
5. 8-pontú és 7-élű.



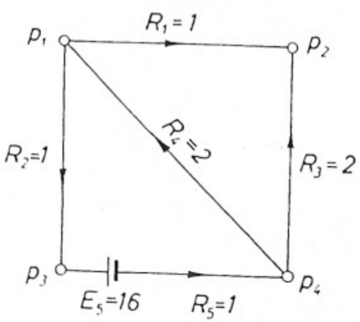
50. ábra



51. ábra

22. Keressük az 51. ábrának egy minimális és egy maximális értékű favázát.

23. Az 52. ábrán vázolt elektromos hálózat alkatrészeinek ellenállásai ohmokban értendők, a telep elektromotoros ereje pedig voltban. Számítsuk ki az egyes alkatrészekben folyó áramok erősségeit és irányait.



52. ábra

Feladatok

24. Bizonyítsuk be, hogy ha egy vegyület molekuláris modellje fagráf, akkor minden molekula legalább két 1 vegyértékű atomot tartalmaz.

25. Jelöljük egy fagráf elsőfokú pontjainak számát f_1-gyel, a 2-nél nagyobb fokú pontjainak számát pedig c-vel. Bizonyítsuk be, hogy ha a fagráfnak van legalább két pontja, akkor

$$f_1 \geqq c+2.$$

Jellemezzük azokat a fagráfokat, amelyekre

$$f_1 = c+2.$$

26. A 2. fejezetben megállapítottuk, hogy egy n-pontú összefüggő G gráf bármely faváza rendelkezik az alábbi négy tulajdonsággal:

1. Összefüggő,
2. körmentes,
3. pontjainak száma n,
4. éleinek száma $n-1$.

Igazoljuk, hogy ha G egy részgráfja e négy tulajdonság közül bármely hárommal rendelkezik, akkor a negyedikkel is, azaz a részgráf faváza G-nek. Van-e a fenti négy tulajdonság között kettő, amely együtt G részgráfját mint G favázát határozza meg?

27. Bizonyítsuk be, hogy az n-pontú és n-élű összefüggő gráfban egyetlen kör van.

28. Bizonyítsuk be, hogy bármely 4-nél több pontot tartalmazó egyszerű gráfban vagy a komplementerében van kör.

29. Bizonyítsuk be, hogy összefüggő gráf minden körmentes részgráfja a gráf favázává bővíthető.

30. Egy fagráf összefüggő G_1 és G_2 részgráfjának van közös éle. Jelöljük G_3-mal azt a gráfot, amelynek élei G_1 és G_2 közös élei, pontjai pedig a közös élek végpontjai. Igazoljuk, hogy G_3 összefüggő gráf.

31. A G' gráf a k komponensből álló n-pontú és $é$-élű G gráf egy részgráfja. Bizonyítsuk be, hogy ha G' a G gráf minden köréből tartalmaz élt, akkor éleinek száma legalább $é-n+k$.

32. Az összefüggő G gráf éleihez rendelt számok közül c a legkisebb. Igazoljuk, hogy ha van G-ben olyan kör, amelynek s számú éle van és ezek mindegyikéhez a c számot rendeltük, akkor G-nek van legalább s különböző minimális értékű faváza.

33. A síkon (vagy a térben) bizonyos számú pont úgy helyezkedik el, hogy a pontpárok távolságai mind különbözők. Minden pontból a tőle legtávolabbi pontba egyenes szakaszt húzunk. Jelöljük G-vel azt a gráfot, amelynek pontjai az adott pontok, élei pedig a meghúzott szakaszok. Igazoljuk, hogy G nem tartalmaz kört.

34. Bizonyos városokat összekapcsoló körmentes csőhálózatot akarunk építtetni. A munkát több vállalat is elvégezné. Módunkban áll tervünket több építővállalat együttes igénybevételével is megvalósítani, de két várost összekötő csővezetéket teljes hosszában csak egyetlen vállalat építhet. Ezért valamennyi ilyen csővezeték építési költségét feltüntető tervrajz benyújtását kívánjuk minden pályázó vállalattól. Készítsük el a benyújtott tervrajzok alapján a legolcsóbb munkáltató-tervet.

35. Igazoljuk, hogy a Kirchhoff-féle csomóponti egyenletek bármelyike következménye a többinek.