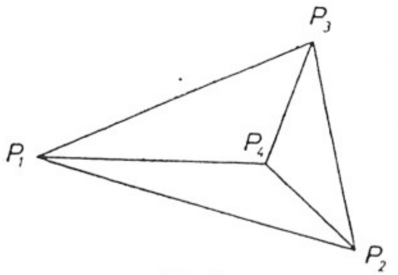
... három egy egyenesen elhelyezkedő. Feszítsünk köréjük fonalat. Az így létrejött idom vagy háromszög, vagy négyszög. Ha a $P_1 P_2 P_3$ háromszöghöz jutunk (170. ábra), akkor P_4 ennek belsejében van, hiszen három pont nem lehet egy egyenesen. A P_4-hez illeszkedő szakaszok háromszögünket három háromszögre vágják fel. Ezeknek P_4-nél elhelyezkedő három szöge együttesen 360°, és ezért közöttük tompaszög is van (sőt közülük legalább kettő tompa). Egy ilyen tompaszög a pontjainkból alakított tompaszögű háromszög szöge. Ha a fonal határolta idom négyszög, akkor ennek szögeiről elmondhatjuk, hogy nem lehet mindegyik hegyes, hiszen összegük 360°. A legnagyobb szög tehát derékszög vagy tompaszög, s ez egy, a pontjainkból alakított derékszögű vagy tompaszögű háromszög szöge.



170. ábra

A 47. feladat állítása szerint van a 48. feladatban szereplő négy pont között három olyan, amely derékszögű, tompaszögű vagy elfajuló háromszöget határoz meg. Ha egy ilyennek oldalaira: $a \leqq b \leqq c$, akkor a 45. és 46. feladat szerint

$$\frac{c}{a} \geqq \sqrt{2}.$$

Ebből $a\sqrt{2} \leqq c$. De $c \leqq 1$, és így $a\sqrt{2} \leqq 1$, tehát

$$a \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ezzel megoldottuk a 48. feladatot.

Rendeljük a 49. feladathoz az egyszerű G gráfot a következőképpen: Alkossa G ponthalmazát a síkon elhelyezkedő $3s$ számú pont, és legyen G két pontja szomszédos, ha a két pont távolsága $\frac{1}{\sqrt{2}}$-nél nagyobb. Azt kell bizonyítanunk, hogy G éleinek száma legfeljebb $3s^2$. Tegyük fel, hogy G-nek $3s^2$-nél több éle van. Ekkor a 43. állítás szerint (most $n = 3s$, $k = 3$ és $m = 0$) G tartalmaz teljes 4-gráfot. Ez annyit jelent, hogy a $3s$ számú pont között akad négy, amelyek közül bármely kettő távolsága nagyobb $\frac{1}{\sqrt{2}}$-nél. Ez azonban a 48. feladat állítása szerint lehetetlen.

Ezzel megoldottuk a 43. állítás geometriai alkalmazására vezető 49. feladatot. Az eredménynek érdekességet ad a következő megfigyelés: ha a $3s$ pont egy egységnyi oldalú szabályos háromszög három csúcsában helyezkedik el úgy, hogy egy-egy csúcsban közülük s pont esik egybe, akkor a pontpárokat összekötő szakaszok közül s^2 esik egy-egy háromszögoldalra; így e szakaszok száma $3s^2$, és mindegyikük

hossza 1. Tehát olyan elhelyezés létrehozható, hogy $3s^2$ szakasz az 1 hosszúságot is elérje, de a 49. feladat állítása szerint olyan már nem, hogy $3s^2+1$ szakasz elérje az 1-nél kisebb $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hosszúságot.

Gyakorlatok

50. Mutassuk meg, hogy minden pozitív *é* és *n* szám mellett a

$$\frac{2\acute{e}n}{2\acute{e}+n} \leqq \frac{\acute{e}+n}{3}$$

egyenlőtlenség pontosan akkor áll fenn, ha teljesül a következő

$$0 \leqq (\acute{e}-n)(2\acute{e}-n);$$

és ugyanakkor áll az egyenlőség az egyikben, amikor a másikban is.

51. Igazoljuk, hogy adott n és k mellett a 43. állításban szereplő extrém gráf komplementerének

$$\frac{(n-m)(n+m-k)}{2k}$$

számú éle van ($n = hk + m$, $0 \leqq m < k$).

52. Az n-pontú és $\acute{e}$-élű egyszerű G gráf teljes n-gráf, vagy minden komponense ugyanannyi pontú teljes gráf. Igazoljuk, hogy G-re

$$lp_{\min} = \frac{2\acute{e}n}{2\acute{e}+n}.$$

Az 50. gyakorlatban szereplő első egyenlőtlenség átalakításaival megkaphatjuk a másodikat:

$$6\acute{e}n \leqq 2\acute{e}^2 + 2\acute{e}n + \acute{e}n + n^2,$$

$$3\acute{e}n \leqq 2\acute{e}^2 + n^2,$$

$$0 \leqq 2\acute{e}^2 - 3\acute{e}n + n^2,$$

$$0 \leqq 2\acute{e}^2 - 2\acute{e}n - \acute{e}n + n^2,$$

$$0 \leqq 2\acute{e}(\acute{e}-n) - n(\acute{e}-n),$$

$$0 \leqq (\acute{e}-n)(2\acute{e}-n).$$

Az 51. gyakorlatban említett extrém gráf komplementere k számú komponensből áll, ezek közül m számú teljes $h+1$-gráf, $k-m$ számú pedig teljes h-gráf, és itt $h=\dfrac{n-m}{k}$. Ennélfogva a keresett élszám:

$$m\binom{h+1}{2}+(k-m)\binom{h}{2}=\frac{m(h+1)h}{2}+\frac{(k-m)h(h-1)}{2}=\frac{h}{2}(kh+2m-k)=$$

$$=\frac{n-m}{2k}(n-m+2m-k)=\frac{(n-m)(n+m-k)}{2k}.$$

Ha az 52. gyakorlatban megadott G gráf minden komponense h-pontú, akkor a komponensek száma $\dfrac{n}{h}$. Nyilván minden komponensre $fp_{\max}=1$, és így az 5.28 állítás miatt $lp_{\min}=h-1$, tehát G-re $lp_{\min}=\dfrac{n}{h}(h-1)$. Nyilván

$$é=\frac{n}{h}\binom{h}{2}=\frac{n}{h}\frac{h(h-1)}{h}=\frac{n(h-1)}{2}.$$

Ennélfogva

$$\frac{2én}{2é+n}=\frac{n^2(h-1)}{n(h-1)+n}=\frac{n}{h}(h-1)=lp_{\min}.$$

Most bebizonyítjuk az alábbi állítást, amely azt mutatja, hogy az n-pontú és $é$-élű egyszerű gráfok között a fenti G gráf $lp_{\min}$ értékét tekintve extrém gráf.

53. *Bármely n-pontú és $é$-élű egyszerű G gráfra*

$$lp_{\min}\leqq\frac{2én}{2é+n},$$

és itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha G teljes n-gráf, vagy G minden komponense ugyanannyi pontú teljes gráf.

A bizonyításhoz legyen G egy n-pontú egyszerű gráf, és G komplementere G^*. Jelöljük G éleinek számát $é$-vel, és legyen k az a szám, amelyre G^* tartalmaz teljes k-gráfot, de nem tartalmaz teljes $k+1$-gráfot. Ekkor a 43. állítás és az 51. gyakorlat szerint $0\leqq m<k$ mellett az $n=hk+m$ jelöléssel

$$é\geqq\frac{(n-m)(n+m-k)}{2k},$$

és itt $m=0$ mellett az egyenlőség pontosan akkor áll, ha G minden komponense teljes h-gráf.

Minthogy G^* tartalmaz teljes k-gráfot, de nem tartalmaz teljes $k+1$-gráfot, G-re $fp_{\max}=k$. Így a G-re alkalmazott $lp_{\min}=j$ jelöléssel 5.28 szerint $k=n-j$, és ezzel a fenti egyenlőtlenség:

$$é\geqq\frac{(n-m)(j+m)}{2(n-j)}.$$

Mármost $0\leqq m<n-j$ szerint $m\geqq0$ és $n-j-m>0$. Így $(n-m)(j+m)=$ $=nj+m(n-j-m)\geqq nj$, és itt az $(n-m)(j+m)=nj$ egyenlőség pontosan akkor áll, ha $m=0$. Ennélfogva

$$é\geqq\frac{nj}{2(n-j)}.$$

Ebből egyszerű átalakítással adódik a

$$j\leqq\frac{2én}{2é+n}$$

egyenlőtlenség, és a fentiek szerint ebben az egyenlőség pontosan akkor áll, ha G minden komponense teljes h-gráf. Ezzel bebizonyítottuk az 53. állítást.

Az 53. állítás felhasználásával bebizonyítjuk a következőt:

54. *Az n-pontú és $é$-élű egyszerű G gráfra*

$$lp_{\min}\leqq\frac{n+é}{3},$$

és itt az egyenlőség pontosan akkor áll, ha G bármely komponense teljes 2-gráf vagy teljes 3-gráf.

Bármely gráf pontjainak száma megegyezik a komponensenként vett pontszámok összegével, és ugyanez mondható az élek számáról és a lefogó pontok minimális számáról is. Ennélfogva az 54. állítás bizonyításában szorítkozhatunk összefüggő gráfra.

Jelöljünk tehát G-vel egy n-pontú és $é$-élű összefüggő egyszerű gráfot, és legyen G-re $lp_{\min}=j$. Ha $n=1$, akkor $j=0$. Tehát a továbbiakban szorítkozhatunk az $n\geqq2$ esetekre, amikor is — G összefüggő volta miatt — $é\geqq1$. Az 53. állítás szerint

$$j\leqq\frac{2én}{2é+n},$$

és itt az egyenlőség pontosan akkor áll, ha G teljes n-gráf. Az 50. gyakorlat állítása szerint a

$$\frac{2én}{2é+n}\leqq\frac{é+n}{3}$$

egyenlőtlenség egyenértékű a következővel:

$$0\leqq(é-n)(2é-n).$$

Ennélfogva ha $é\geqq n$, akkor az utóbbinak fennállása miatt az előbbi is fennáll, és így

$$j\leqq\frac{é+n}{3};$$

ebben egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\acute{e}=n$ és G teljes n-gráf. Ekkor azonban $\binom{n}{2}=n$, azaz $n(n-3)=0$, és ebből $n=3$ következik; vagyis G teljes 3-gráf.

Ha $\acute{e}<n$, akkor — minthogy G összefüggő — a 2. fejezet első bekezdése szerint $\acute{e}=n-1$, és így a 2.5-ből következik, hogy G fagráf. Ámde minden fa páros gráf (hiszen páratlan hosszúságú kört sem tartalmaz), és ezért

$$j \leqq \frac{n}{2}.$$

Minthogy $n \geqq 2$,

$$\frac{\acute{e}+n}{3}=\frac{2n-1}{3} \geqq \frac{n}{2} \geqq j,$$

és könnyen belátható, hogy itt az $\frac{\acute{e}+n}{3}=j$ egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $n=2$, vagyis G teljes 2-gráf.

Ezzel bebizonyítottuk az 54. állítást.

A továbbiakban a páros, ill. a páratlan hosszúságú köröket röviden *páros*, ill. *páratlan körök*nek is mondjuk.

A 38. állításban szereplő extrém gráfok az ötszögtől eltekintve mind páros gráfok, és így egyáltalán nem tartalmaznak páratlan kört. Azok az n-pontú egyszerű gráfok, amelyek nem tartalmaznak $2k+1$-nél ($k \geqq 2$ egész) rövidebb páratlan kört, háromszöget sem tartalmaznak. E gráfokban a legkisebb fokszám tehát szintén legfeljebb $\left[\frac{n}{2}\right]$. Ötszögre — amelyre $n=5$ — a legkisebb fokszám szintén $\left[\frac{n}{2}\right]$. E gráf azonban csak a $k=2$ esetben tartozik a fenti gráfok közé. Tehát kimondhatjuk a 38. állítás alábbi általánosítását:

55. *Ha a $2k+1$-nél ($k \geqq 2$ egész) kisebb hosszúságú páratlan kört nem tartalmazó n-pontú egyszerű gráfban a legkisebb fokszám φ_0, akkor*

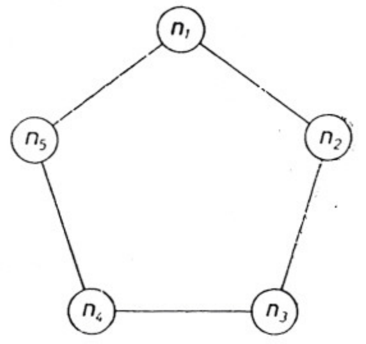
$$\varphi_0 \leqq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Extrém gráfok (amelyekre az egyenlőség áll) minden k-ra az $\left\langle\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n+1}{2}\right]\right\rangle$ gráfok és a $k=2$ esetben még az ötszög (167. és 168. ábra); más extrém gráf nincs.

Az $\left\langle\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n+1}{2}\right]\right\rangle$ gráfokra $fp_{\max}=\left[\frac{n+1}{2}\right]$, ötszögre pedig $fp_{\max}=2$. Tehát az 55. állításban szereplő extrém gráfok közül csupán a $k=2$ esethez tartozó ötszögre teljesül az $fp_{\max}<\frac{n}{2}$ egyenlőtlenség. Ha egy gráfra $fp_{\max}<\frac{n}{2}$, akkor — amint azt a fejezet elején megmutattuk — a gráf tartalmaz páratlan kört. A következőkben megvizsgáljuk, hogyan lehet egyszerű gráfok fokszámainak, ill. élszámainak elég

nagyra megválasztásával $fp_{\max}$ különböző korlátozásai, ill. rögzítései mellett elérni, hogy előforduljon a gráfban „rövid” páratlan kör; esetleg a legrövidebb: a háromszög. Felhasználjuk az alábbi fogalmakat.

Jelentsen $m \geqq 3$ mellett $((n_1, n_2, \ldots, n_m))$ olyan egyszerű gráfot, amelynek ponthalmazát a páronként közös pontot nem tartalmazó $B_1, B_2, \ldots, B_m$ ponthalmazok alkotják, ahol a B_i-be tartozó pontok száma n_i ($i=1, 2, \ldots, m$), gráfunknak minden B_i független ponthalmaza, minden B_i-beli pont szomszédos minden B_{i+1}-beli ponttal ($i=1, 2, \ldots, m-1$), és minden B_m-beli pont szomszédos minden B_1-belivel. E gráfokra az $\langle n_1, n_2, \ldots, n_m\rangle$ gráfokra utaló ábrákhoz hasonló szerkezetű ábrákkal utalunk. A 171. ábra $((n_1, n_2, n_3, n_4, n_5))$-re utal.



171. ábra

A *K kör ívén* olyan utat értünk, amelynek minden éle K-nak is éle. Az olyan utat, amelynek végpontjai K-beliek, de élei és belső pontjai nem, a *K kör húrjá*nak nevezzük. Az 1 hosszúságú húrt a kör *átlójá*nak is fogjuk nevezni.

Gyakorlatok

56. Hogyan határozható meg az $((n_1, n_2, \ldots, n_m))$ gráfok $fp_{\max}$ értéke?

57. Az f és d egész számokra: $f \geqq 2$ és $1 \leqq d \leqq \frac{f}{2}$. Mekkora $fp_{\max}$ az $\left(\left(\frac{f}{2}, \frac{f}{2}, \frac{f}{2}, \frac{f}{4}+\frac{d}{2}, \frac{f}{4}+\frac{d}{2}\right)\right)$ gráfra? Határozzuk meg e gráf legkisebb fokszámát. (Természetesen egész $\frac{f}{2}$ és $\frac{f}{4}+\frac{d}{2}$ értékekre szorítkozunk.)

Feladatok

58. Az n-pontú egyszerű G gráf nem tartalmaz háromszöget. Jelöljük G egy minimális hosszúságú páratlan körét K-val és K hosszát m-mel. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

a) Ha a K kör egy h hosszúságú húrjának két végpontja K-t a h_1 és h_2 hosszúságú ívekre bontja, akkor h nem lehet kisebb h_1-nél is és h_2-nél is.

b) G bármely p pontjához legfeljebb két olyan él illeszkedik, amelynek p-től különböző végpontja K-beli; és ha a K-beli p_1 és p_2 szomszédos p-vel, akkor K-nak a p_1 és p_2 végpontú két íve közül az egyik 2 hosszúságú (p is lehet K-beli).

c) Ha K pontjainak fokai: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$; a G-beli p_i ponthoz pedig ψ_i számú olyan él illeszkedik, amelynek p_i-től különböző végpontja K-beli $(i=1, 2, \dots, n)$, akkor

$$\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_m=\psi_1+\psi_2+\dots+\psi_n.$$

59. Maximálisan mekkora lehet a minimális fokszám azokban a háromszöget nem tartalmazó n-pontú egyszerű gráfokban, amelyekre $fp_{\max}$ előírt, éspedig $fp_{\max} = = f \geqq \frac{n}{2}$? Melyek a kérdéshez tartozó extrém gráfok?

60. Maximálisan hány éle lehet olyan n-pontú egyszerű gráfnak, amely nem tartalmaz háromszöget, és amelyre $fp_{\max}=f \geqq \frac{n}{2}$?

61. A háromszöget nem tartalmazó n-pontú egyszerű G gráfra $fp_{\max}=f$ és $n = 2f+1\,(f \geqq 2)$. Igazoljuk, hogy G éleinek száma legfeljebb f^2+1.

Jelöljünk G-vel egy, az 56. gyakorlatban megadott $((n_1, n_2, \dots, n_m))$ gráfot. Ha tetszőlegesen kijelöljük G B_i halmazainak egy-egy pontját, akkor G egy m hosszúságú K körének pontjait nyerjük. A K kör bármely $\left[\frac{m}{2}\right]$ számú független pontja K-nak egy maximális független ponthalmazát alkotja. Ha K egy maximális független F ponthalmazához hozzávesszük mindazon B_i halmazokat, amelyek tartalmaznak F-beli pontot, akkor G egy független ponthalmazát nyerjük. Könnyen belátható, hogy G-nek így kijelölt független ponthalmazai között szerepel G bármely maximális független ponthalmaza. Ezen a módon meghatározható a kérdéses $fp_{\max}$ érték.

Az 57. gyakorlat kérdésére az előbbiek alapján könnyen válaszolhatunk: $d \leqq \frac{f}{2}$ miatt

$$\frac{f}{4}+\frac{d}{2} \leqq \frac{f}{4}+\frac{f}{4}=\frac{f}{2},$$

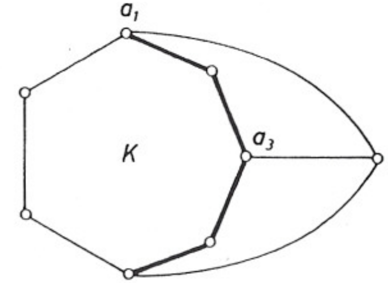
és így (minthogy itt $\left[\frac{m}{2}\right]=2$) $fp_{\max} = \frac{f}{2}+\frac{f}{2}=f$. Gráfunk B_i-beli pontjának fokát a B_i-vel „szomszédos" két B_j és B_l halmaz pontszámösszege adja. Ennélfogva a fenti egyenlőtlenség felhasználásával a keresett minimális φ_0 fokszámra:

$$\varphi_0=\frac{f}{2}+\frac{f}{4}+\frac{d}{2}=\frac{3f+2d}{4}.$$

Minthogy az 58. feladatban megadott K kör páratlan, az *a)*-ban szereplő h_1 és h_2 közül az egyik páratlan, a másik pedig páros. Ennélfogva a h hosszúságú húr vagy a h_1, vagy a h_2 hosszúságú ívvel együtt páratlan kört alkot. Ha tehát $h<h_1$ és $h<h_2$ volna, akkor K nem lehetne minimális hosszúságú.

Minthogy G egyszerű gráf, az *a)* állítás szerint 1 hosszúságú húrja nem lehet K-nak.

A *b)* állítás indirekt bizonyításához tegyük fel, hogy a_1, a_2 és a_3 K-nak három olyan pontja, amely szomszédos a G-beli p ponttal. Az előbbiek szerint p nem lehet K-beli. (A 172. ábrán szemléltetünk.) Az a_i pontok K-t három ívre bontják. Minthogy, G nem tartalmaz háromszöget, mindhárom ív hossza legalább 2. Ámde K páratlan, és így a három ív között van legalább 3 hosszúságú is. Az a_i pontok közül tehát kettő (mondjuk a_1 és a_2) K-t legalább 3 hosszúságú ívekre bontja (ezek élei az ábrán vastagok, ill. vékonyak). De $\{a_1, p\}$ és $\{p, a_2\}$ K 2 hosszúságú húrjának élei; ez viszont *a)* szerint lehetetlen.



172. ábra

A *b)* állítás második része *a)*-ból és abból, hogy G nem tartalmaz háromszöget, adódik.

A *c)* állítás bizonyításához töröljük G-ből azokat az éleket, amelyek nem illeszkednek K-beli ponthoz. Jelöljük a G-ből így nyert G_0 gráf éleinek számát $é$-vel; ez *b)* szerint legfeljebb $m+2(n-m)$. Vegyük figyelembe, hogy 1 hosszúságú húrja nem lehet K-nak. A $\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_m$ összeg m-mel több $é$-nél, hiszen ebben K éleit kétszer kell számításba vennünk, G_0 többi élét pedig egyszer. A K-ba nem tartozó G_0-beli pontok G_0 független ponthalmazát alkotják. Ennélfogva az előbbi érveléshez hasonlóan adódik, hogy a $\psi_1+\psi_2+\dots+\psi_n$ összeg ugyancsak $é+m$, tehát legfeljebb $m+2(n-m)+m = 2n$.

A további feladatok megoldásához bővítsük az 55. állításban szereplő feltételeket az $fp_{\max}<\frac{n}{2}$ egyenlőtlenséggel. Bebizonyítjuk, hogy ekkor érvényes az alábbi állítás:

62. *Ha a $2k+1$-nél ($k \geqq 2$ egész) kisebb hosszúságú páratlan kört nem tartalmazó n-pontú ($n \geqq 2k+1$) egyszerű G gráfra $fp_{\max}<\frac{n}{2}$ és a legkisebb G-beli fokszám φ_0, akkor*

$$\varphi_0 \leqq \frac{2n}{2k+1}.$$

Adott n és k mellett extrém gráfok (amelyekre az egyenlőség áll) azok az $((n_1, n_2, \dots, n_{2k+1}))$ gráfok, amelyekre $n_1=n_2=\dots=n_{2k+1}=\frac{n}{2k+1}$; más extrém gráf nincs.

Tegyük fel, hogy adott n és k mellett G teljesíti állításunk feltételeit. Minthogy $fp_{\max}<\frac{n}{2}$, G a fejezet elején átgondoltak szerint tartalmaz páratlan kört. Jelöljük G egy minimális hosszúságú páratlan körét K-val, K hosszát $2m+1$-gyel — ekkor

$m \geqq k$ —, és K egyrétű bejárását követő sorrendben K pontjait így: $a_1, a_2, \ldots, a_{2m+1}$. Minthogy φ_0 a legkisebb G-beli fokszám,

$$\varphi(a_i) \geqq \varphi_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2m+1).$$

Tehát K pontjainak fokösszege legalább

$$(2m+1)\varphi_0.$$

Jelöljük ψ_i-vel a G-beli p_i ponthoz illeszkedő olyan élek számát, amelyeknek p_i-től különböző végpontjai K-beliek. Felhasználva a fentieket és az 58. feladat *c)* és *b)* állítását, a következőt írhatjuk:

$$(2m+1)\varphi_0 \leqq \varphi(a_1)+\varphi(a_2)+\cdots+\varphi(a_{2m+1}) = \psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_n \leqq 2n.$$

Ebből

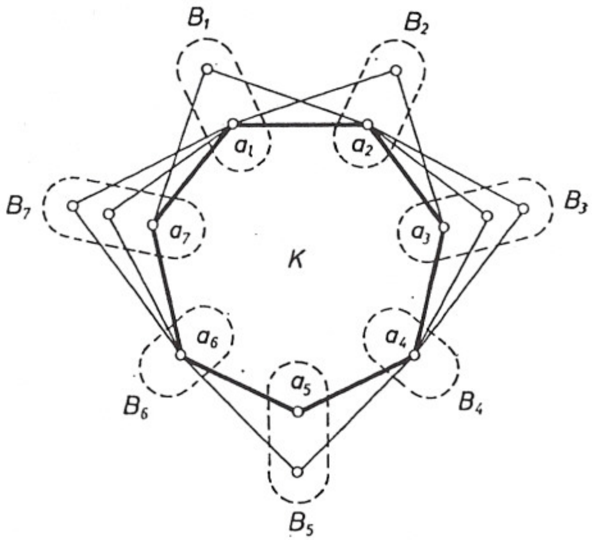
$$\varphi_0 \leqq \frac{2n}{2m+1} \leqq \frac{2n}{2k+1}.$$

Ebben

$$\varphi_0 = \frac{2n}{2k+1}$$

csak akkor áll, ha $m=k$, K minden pontjára $\varphi(a_i) = \frac{2n}{2k+1}$, és minden G-beli pont pontosan két K-beli ponttal szomszédos. K-nak két ilyen pont közötti egyik íve 58. *b)* szerint 2 hosszúságú.

Tegyük fel most, hogy a fenti egyenlőség fennáll. Ekkor G pontjai egyértelműen $B_1, B_2, \ldots, B_{2k+1}$ halmazokba sorolhatók be a következőképpen: A 0 indexet $2k+1$-gyel, a $2k+2$ indexet pedig 1-gyel azonosítva, a p pont B_i-be tartozik, ha p két K-beli szomszédja a_{i-1} és a_{i+1}. Ilyen besorolást szemléltetünk (nem extrém gráfon) a 173. ábrán $n=14$ és $k=3$ mellett, K élei vastagok. Ebből kiolvashatók a következők: G-nek minden B_i halmaz független ponthalmaza, mert G nem tartalmaz háromszöget. Ha K pontjai közül a_i-t kicseréljük B_i bármely pontjával, ismét egy $2k+1$ hosszúságú G-beli kör pontjait nyerjük. E kör szintén játszhatja K szerepét a fenti felosztásban. Ebből következik, hogy bármely B_i-beli pont szomszédos bármely B_{i-1}-beli és B_{i+1}-beli ponttal, mással viszont nem; továbbá, hogy minden



173. ábra

pont foka $\frac{2n}{2k+1}$. Ha tehát x_i-vel jelöljük B_i pontjainak számát, akkor $x_{i-1}+x_{i+1}$ a B_i-beli pontok fokával egyenlő, tehát a következő egyenlőségeket nyerjük:

$$x_i + x_j = \frac{2n}{2k+1}, \quad \text{ha} \quad |i-j| = 2.$$

Ha pl. az

$$x_1 + x_3 = \frac{2n}{2k+1}$$

és

$$x_3 + x_5 = \frac{2n}{2k+1}$$

egyenleteket kivonjuk egymásból, akkor azt kapjuk, hogy

$$x_1 = x_5.$$

A közös ismeretleneket tartalmazó egyenletpárok kivonása révén hasonló módon azt nyerjük, hogy

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{2k+1},$$

és így — minthogy kettőjük összege $\frac{2n}{2k+1}$ — mindegyikük $\frac{n}{2k+1}$-gyel egyenlő. G tehát $n_i = \frac{n}{2k+1}$ mellett $((n_1, n_2, \ldots, n_{2k+1}))$ gráf. Mármost könnyen belátható, hogy G-re

$$fp_{\max} = k\frac{n}{2k+1} < k \cdot \frac{n}{2k} = \frac{n}{2}.$$

Ezzel bebizonyítottuk a 62. állítást.

Jelöljünk most G-vel olyan gráfot, amelyre teljesülnek az 59. feladatban említett tulajdonságok, és legyen a legkisebb G-beli fokszám φ_0. Jelöljük G egy maximális független ponthalmazát F-fel és az F-be nem tartozó G-beli pontok halmazát L-lel. Ekkor F pontjainak száma f és minden F-beli p pontra

$$\varphi(p) \leqq n-f.$$

Így

$$\varphi_0 \leqq n-f.$$

Itt az egyenlőség csak akkor állhat, ha G minden p pontjára

$$\varphi(p) \geqq n-f,$$

amikor is minden F-beli pont szomszédos minden L-beli ponttal, és így — minthogy G nem tartalmaz háromszöget — L is független ponthalmaza G-nek. Így ekkor f maximális tulajdonsága miatt $n-f \leqq f$-nek kell fennállnia, ez azonban következik

G-nek abból a tulajdonságából, hogy $f \geqq \frac{n}{2}$. Az F-beli pontok $n-f$ foka tehát ekkor legfeljebb az L-beli pontok f fokával egyenlő, és így itt

$$\varphi_0 \leqq n-f.$$

Ennélfogva az 59. feladat megoldásaként a következő állítást nyerjük:

63. *Ha a háromszöget nem tartalmazó n-pontú egyszerű G gráfra* $fp_{\max} = f \geqq \frac{n}{2}$ *és a legkisebb G-beli fokszám* φ_0, *akkor*

$$\varphi_0 \leqq n-f.$$

Extrém gráfok (amelyekre az egyenlőség áll) az $\langle f, n-f\rangle$ *gráfok; más extrém gráf nincs.*

Ha $fp_{\max}$ értékét $\frac{n}{2}$-nél kisebbre rögzítjük, akkor a megfelelő probléma lényegesen nehezebb, és csak „$\frac{n}{2}$-hez közeli" f-ekre megoldott; pl. akkor, ha $n = 2f+d$ és $1 \leqq d \leqq \frac{f}{2}$. Ebben az esetben f eltérése $\frac{n}{2}$-től $\frac{n}{10}$-nél kevesebb, hiszen az egyenlőtlenségből, ha d helyébe a vele egyenlő $n-2f$-et írjuk, $\frac{2n}{5} \leqq f < \frac{n}{2}$ adódik, és $\frac{n}{2} - \frac{2n}{5} = \frac{n}{10}$. Ekkor érvényes az alábbi állítás:

64. *Ha* $n = 2f+d$ *és* $1 \leqq d \leqq \frac{f}{2}$ *mellett a háromszöget nem tartalmazó n-pontú egyszerű G gráfra* $fp_{\max} = f$ *és a legkisebb G-beli fokszám* φ_0, *akkor*

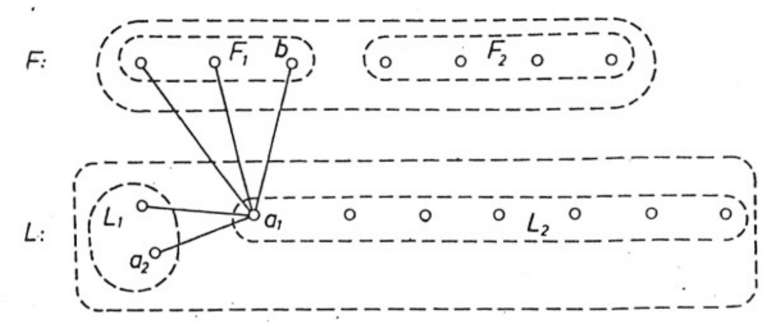
$$\varphi_0 \leqq \frac{3f+2d}{4}.$$

Extrém gráfok (amelyekre az egyenlőség áll) az $\left\langle\left(\frac{f}{2}, \frac{f}{2}, \frac{f}{2}, \frac{f}{4}+\frac{d}{2}, \frac{f}{4}+\frac{d}{2}\right)\right\rangle$ *gráfok; más extrém gráf nincs.*

Az 57. gyakorlat végrehajtásával könnyen belátható, hogy a φ_0-ra adott korlát érvényessége esetén a megadott gráfok valóban e problémához tartozó extrém gráfok. Azt, hogy más extrém gráf nincs, nem bizonyítjuk; e hiányt az olvasó némi fáradsággal pótolhatja.

A 64. állításban a φ_0-ra vonatkozó egyenlőtlenség igazolásához jelöljük G egy maximális független ponthalmazát F-fel, az F-be nem tartozó G-beli pontok halmazát pedig L-lel. Ekkor F, ill. L pontjainak száma f, ill. $f+d$. Minthogy $f+d > f$, a G gráf L feszítette részgráfja tartalmaz élt; legyen ilyen $\{a_1, a_2\}$. Nem lehet a_1-nek és a_2-nek közös szomszédja, mert G nem tartalmaz háromszöget. Így e két pont egyikére — mondjuk a_1-re — igaz, hogy F-beli szomszédjainak száma legfeljebb $\frac{f}{2}$.

Jelöljük F_1-gyel, ill. L_1-gyel az a_1-gyel szomszédos F-beli, ill. L-beli pontok halmazát és F_2-vel, ill. L_2-vel az F_1-be, ill. L_1-be nem tartozó F-beli, ill. L-beli pontok halmazát (174. ábra). F maximális tulajdonsága miatt F_1 tartalmaz egy b pontot.



174. ábra

Jelöljük F_1, ill. L_1 pontjainak számát f_1-gyel, ill. l_1-gyel. Ekkor $f_1 \leqq \frac{f}{2}$, L_2 pontjainak száma $f+d-l_1$ és

$$\varphi(a_1) = l_1+f_1.$$

Minden G-beli p pontra

$$\varphi(p) \geqq \varphi_0,$$

és így b és a_1 fokösszege legalább $2\varphi_0$. Minthogy F független és G nem tartalmaz háromszöget, az F_1-beli pontoknak a szomszédjai mind L_2-beliek. Tehát minden F_1-beli q pontra

$$\varphi(q) \leqq f+d-l_1.$$

Az elmondottak alapján írhatjuk, hogy

$$2\varphi_0 \leqq \varphi(b)+\varphi(a_1) \leqq f+d-l_1+l_1+f_1 = f+d+f_1 \leqq f+d+\frac{f}{2} = \frac{3f+2d}{2}.$$

Ebből pedig adódik, hogy

$$\varphi_0 \leqq \frac{3f+2d}{4}.$$

A 60. feladatban szereplő gráfok nem tartalmaznak háromszöget. Ennélfogva a 35. feladat szerint a keresett maximális élszámra:

$$é \leqq (n-f)f.$$

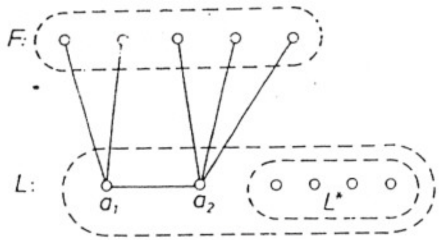
A 35. feladathoz tartozó extrém gráfokat az $\langle n-f, f\rangle$ gráfok alkották. Ezek mindegyikében szerepel egy $n-f$ pontból álló független ponthalmaz, tehát f maximális tulajdonsága miatt fenn kell állnia az $n-f \leqq f$ egyenlőtlenségnek. Ez azonban következik az $f \geqq \frac{n}{2}$ feltételből. Minthogy e gráfok egyáltalán nem tartalmaznak páratlan kört, egyúttal a következő állítást is nyertük:

65. *Ha a $2k+1$-nél ($k \geqq 2$ egész) kisebb hosszúságú páratlan kört nem tartalmazó n-pontú és $é$-élű egyszerű gráfra $fp_{\max} = f \geqq \frac{n}{2}$, akkor*

$$é \leqq (n-f)f.$$

Extrém gráfok (amelyekre az egyenlőség áll) az $\langle n-f, f\rangle$ gráfok; más extrém gráf nincs.

Ha ezt a problémát úgy módosítjuk, hogy $f < \frac{n}{2}$ legyen, a megoldás itt is lényegesen nehezebb és csak részben megoldott. A 61. feladat ilyen módosított esetre vonatkozóan kíván megoldást, mégpedig arra, amelyben $k=2$ és $f = \frac{n-1}{2}$. Feladatunk megoldásához jelöljük a szóban forgó G gráf egy maximális független ponthalmazát F-fel és az F-be nem tartozó G-beli pontok halmazát L-lel. Ekkor F, ill. L pontjainak száma f, ill. $f+1$. Minthogy $f+1 > f$, a G gráf L feszítette részgráfja tartalmaz élt; legyen ilyen $\{a_1, a_2\}$. Nem lehet a_1-nek és a_2-nek közös szomszédja, mert G nem tartalmaz háromszöget. Tehát a_1-nek és a_2-nek együttvéve legfeljebb f szomszédja van F-ben. Jelöljük L^*-gal az a_1-től és a_2-től különböző L-beli pontok halmazát (175. ábra). Ekkor L^* pontjainak száma $f-1$. A 17. állítás szerint G minden pontjának foka legfeljebb f, és így L^* pontjaihoz G-nek legfeljebb $(f-1)f$ számú éle illeszkedik. Mármost G valamennyi élét legalább egyszer számításba vesszük, ha tekintjük a 175. ábra szemléltette legfeljebb $f+1$ számú élt, valamint az L^* pontjaihoz illeszkedő éleket. Ennélfogva



175. ábra

$$é \leqq f+1+(f-1)f = f^2+1.$$

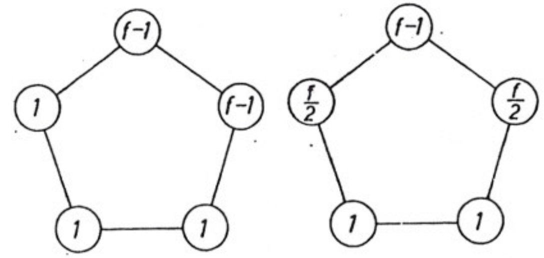
Eredményünket az extrém gráfokat is tartalmazó alábbi állításban fogalmazzuk meg. Annak bizonyítását, hogy az említendő gráfok valóban extrémek, és más extrém gráf nincs, az olvasóra hagyjuk.

66. *Ha $n = 2f+1$ ($f \geqq 2$) mellett a háromszöget nem tartalmazó n-pontú és $é$-élű egyszerű gráfra $fp_{\max} = f$, akkor*

$$é \leqq f^2+1.$$

Extrém gráfok (amelyekre az egyenlőség áll) azok az $\langle\langle n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\rangle\rangle$ gráfok, amelyekre $1 \leqq n_1 \leqq \frac{f}{2}$, $n_2 = f-1$, $n_3 = f-n_1$, $n_4 = n_5 = 1$; más extrém gráf nincs.

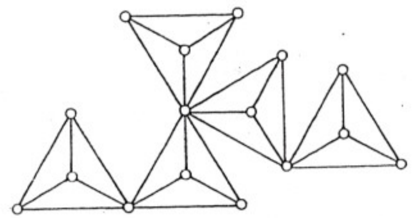
A 176. ábra olyan extrém gráfokra utal, amelyekre $n_1 = 1$, ill. $\frac{f}{2}$.



176. ábra

Feladatok

67. A $G_1, G_2, \ldots$ gráfokat a következőképpen állíthatjuk elő: G_1 teljes k-gráf ($k \geqq 2$). A G_2 gráfot úgy nyerjük, hogy G_1 egy pontját és a G_1-gyel közös pontot nem tartalmazó teljes k-gráf egy pontját egyetlen ponttá forrasztjuk össze. A G_3 gráfot úgy nyerjük, hogy G_2 egy pontját és a G_2-vel közös pontot nem tartalmazó teljes k-gráf egy pontját egyetlen ponttá forrasztjuk össze, s í. t. (A 177. ábrán G_5 látható $k=4$ esetén). Igazoljuk, hogy az n-pontú G_m éleinek száma $\frac{(n-1)k}{2}$ és G_m nem tartalmaz k-nál hosszabb kört.


177. ábra

68. Bizonyítsuk be, hogy ha egy legalább 5-pontú összefüggő egyszerű gráf minden pontjának foka legalább 2, akkor van a gráfban 4 hosszúságú út.

69. Bizonyítsuk be, hogy bármely 8-pontú és 12-nél több élű egyszerű gráf tartalmaz 4 hosszúságú utat.

A 67. feladatban szereplő n-pontú G_m gráfra

$$n = k+(m-1)(k-1).$$

Ebből

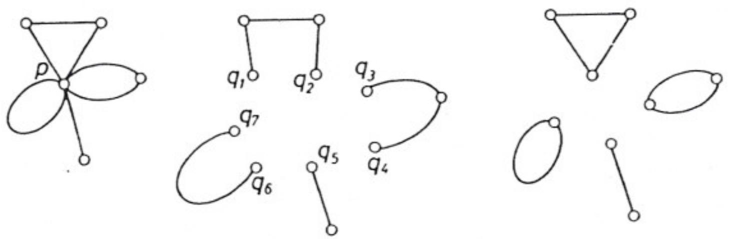
$$m = \frac{n-1}{k-1};$$

és így G_m éleinek száma

$$\frac{n-1}{k-1}\binom{k}{2} = \frac{(n-1)k}{2}.$$

Könnyen belátható, hogy a 67. feladatban megadott gráfokban éppen a forrasztási helyek az elvágó pontok. E pontok „szétvágásán” azt értjük, hogy visszaállítjuk az összeforrasztások előtti helyzetet; így G_m-ből olyan gráfot nyerünk, amely m számú komponensből áll, és minden komponense teljes k-gráf.

A G_m gráfok jól megkülönböztethető „tagokból" álltak össze. Általában is vizsgálhatjuk a gráfok tagokra bontását. Ennek előkészítésére jelöljük a G gráf p pontjának fokát m-mel ($m > 0$). A p pont megszüntetésével hozzuk létre a $q_1, q_2, \ldots, q_m$

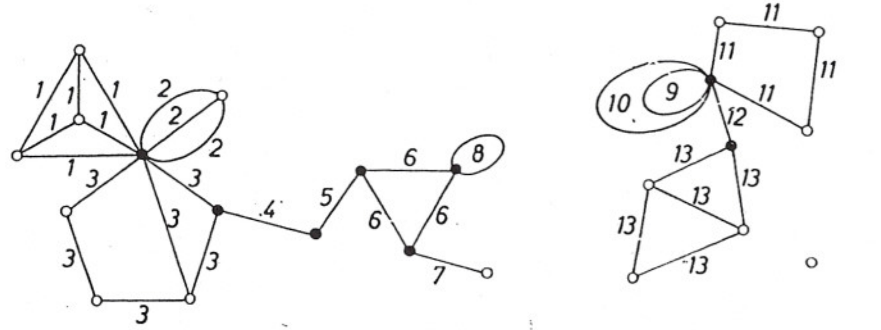


178. ábra

pontokat úgy, hogy a p-hez illeszkedő élvégekhez végpontként egy-egy q_i pontot illesztünk; majd az így létrejött gráf ugyanazon komponensébe tartozó q_i pontjait forrasszuk össze egyetlen ponttá. A G-ből így létrejött gráfra azt mondjuk, hogy G-ből a *p pont szétvágása* révén jött létre. A 178. ábra p szétvágását lépésekben szemlélteti. Világos, hogy a p pont szétvágása révén G pontosan akkor módosul, ha p az őt tartalmazó komponensnek elvágó pontja.

Most hozzuk létre a G gráfból a G_1 gráfot olyan p_1 pontjának szétvágása révén, amely G valamely komponensének elvágó pontja. Ezután hozzuk létre G_1-ből a G_2 gráfot G_1 olyan p_2 pontjának szétvágása révén, amely G_1 valamely komponensének elvágó pontja s í. t. mindaddig, amíg eljárásunk még módosíthatja a soron levő gráfot. Jelöljük a végül kapott gráfot G_k-val és G_k komponenseit így: $K_1, K_2, \ldots, K_m$. Minden K_i összefüggő, és egyiknek sincs elvágó pontja. Most jelöljük meg G-ben azokat az éleket, amelyek K_i-be kerültek, továbbá jelöljük meg a megjelölt élek végpontjait; és legyen T_i G-nek a megjelölt élek és pontok alkotta részgráfja ($i = 1, 2, \ldots, m$). Ha K_i egyetlen izolált pontból áll, akkor legyen T_i ezzel azonos. A $T_1, T_2, \ldots, T_m$ gráfokat G *tag*jainak nevezzük. Minden tag összefüggő, és egyiknek sincs elvágó pontja. Be lehet látni, hogy bármilyen sorrendben is választottuk a szétvágandó pontokat, mindig ugyanazokra a K_i gráfokra, és így ugyanazokra a tagokra jutunk. Világos, hogy G bármely éle pontosan egy K_i-be, és így pontosan egy tagba tartozik. Ha a G gráf valamely K körének egy p pontját vágtuk szét, akkor szétvágása után K élei egyetlen út éleit alkották, és így ennek végpontjait a pont szétvágása révén nyert gráfban ismét eggyéforrasztottuk. Ebből következik, hogy ha K a G gráfnak köre, akkor K valamennyi éle G ugyanazon tagjához tartozik. Minthogy egy p pont szétvágása révén G pontosan akkor módosul, ha p az őt tartalmazó komponensnek elvágó pontja, minden elvágó pont legalább két tagban szerepel,

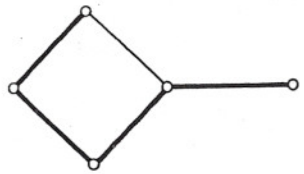
és minden más pont csak egyben. Példaként kijelöltük a 179. ábra tagjait, úgy, hogy egy taghoz tartozó éleket azonos számmal láttunk el. E gráfnak 14 tagja van (az izolált pont egyetlen tag!). Az elvágó pontokat befeketítettük. A 67. feladatban megadott G_m gráf m számú tagból áll, minden tag teljes k-gráf.



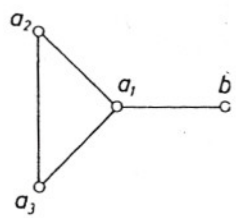
179. ábra

A gráf tagjainak fogalma szerepet fog kapni a 72. állításhoz tartozó extrém gráfokban.

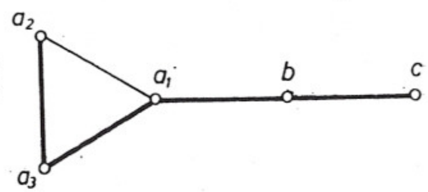
A 68. feladat megoldásához felhasználhatjuk, hogy a szóban forgó G gráf az 1.23 feladat állítása szerint tartalmaz kört. Ha van legalább 5 hosszúságú köre, akkor ez biztosít 4 hosszúságú utat is. Ha G leghosszabb köre négyszög, akkor az 1.25 állítás szerint G tartalmazza a 180. ábrát, amelyben vastagítás jelez egy 4 hosszúságú utat. Ha végre G leghosszabb köre háromszög, akkor hasonló módon látható, hogy



180. ábra



181. ábra



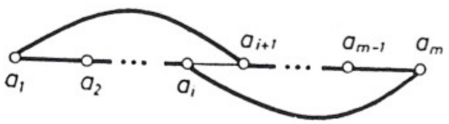
182. ábra

G tartalmazza a 181. ábrán látható gráfot. Minthogy b foka legalább 2, van b-nek egy a_1-től különböző c szomszédja. De c különbözik a_2-től és a_3-tól is, másképp négyszöget is tartalmazna G. Tehát gráfunk tartalmazza a 182. ábrán látható gráfot, amelyben vastagítás jelez egy 4 hosszúságú utat.

Be fogjuk bizonyítani a 68. feladat alábbi általánosítását:

70. *Ha egy legalább $2k+1$-pontú ($k \geqq 1$) összefüggő egyszerű gráf minden pontjának foka legalább k, akkor van a gráfban $2k$ hosszúságú út.*

Jelöljük L-lel az állításunk feltételeit kielégítő G gráfnak egy maximális hosszúságú útját, és legyenek L pontjai L bejárását követő sorrendben: $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Azt kell bizonyítanunk, hogy $m \geqq 2k+1$. Tegyük fel, hogy $m \leqq 2k$. Minthogy L maximális, a_1 és a_m szomszédjai csak a felsorolt pontok között lehetnek. Megmutatjuk, hogy van olyan i, hogy a_i szomszédja a_m-nek, a_{i+1} pedig a_1-nek. Ezáltal adódik m hosszúságú kör (a 183. ábrán vastag élek jelzik); és — minthogy G összefüggő — az 1.25 állítás szerint van e kör valamely pontjának a felsorolt pontoktól különböző szomszédja. Ekkor azonban $m+1$ hosszúságú út is adódik; ez viszont ellentmond L maximális tulajdonságának.



183. ábra

Ha nem volna említett tulajdonságú index, akkor a_1 nem lehetne szomszédos a_m-nek a_j szomszédját követő a_{j+1}-gyel. Így — minthogy a_m-nek legalább k szomszédja L-beli — a_1 nem lehetne szomszédos L pontjai közül legalább k-val, saját magát is beleértve, $k+1$-gyel; tehát a_1-nek legfeljebb $2k-(k+1) = k-1$ szomszédja lehetne L-beli, ellentmondásban azzal, hogy a_1-nek a legalább k szomszédja mind L-beli.

A 69. feladat megoldásához jelöljünk G-vel egy 8-pontú és 12-nél több élű egyszerű gráfot, és tegyük fel, hogy nincs G-ben 4 hosszúságú út. Ha G minden pontja legfeljebb 3-adfokú volna, akkor éleinek száma legfeljebb $\frac{8 \cdot 3}{2} = 12$ volna. Tehát van G-ben egy legalább 4-edfokú pont, vagyis van G-nek egy legalább 5-pontú komponense. Ha egy ilyen komponensben minden pont foka legalább 2 volna, a 70. állítás szerint volna G-ben 4 hosszúságú út. Tehát van G-nek egy elsőfokú p_1 pontja. Töröljük p_1-et a hozzá illeszkedő éllel együtt. A kapott G_1 gráf 7-pontú, 11-nél több élű, és szintén nem tartalmaz 4 hosszúságú utat. Az előbbiekhez hasonló okoskodással kapjuk, hogy kell lenni G_1-ben is egy 4-edfokú és ebből következően egy elsőfokú p_2 pontnak. A p_2 törlésével nyert G_2 gráfban is kimutatható egy elsőfokú p_3 pont. Ennek törlésével az 5-pontú és 9-nél több élű G_3 gráfot nyerjük. Ámde G_3 nem lehet teljes gráf, mert akkor volna benne 4 hosszúságú út; ennélfogva éleinek száma legfeljebb 9, és ez ellentmondás.

Megjegyezzük, hogy van olyan 8-pontú és 12-élű egyszerű gráf, amelyben nincs 4 hosszúságú út: a két teljes 4-gráf komponensből álló gráf.

Most bebizonyítjuk a 69. feladat alábbi általánosítását:

71. *Ha egy n-pontú egyszerű gráf nem tartalmaz k-nál* ($k \geqq 1$) *hosszabb utat, akkor éleinek é számára*

$$é \leqq \frac{n \cdot k}{2}.$$

Extrém gráfok (amelyekre az egyenlőség áll) rögzített k mellett azok, amelyeknek minden komponense teljes $k+1$-gráf; más extrém gráf nincs.

Állításunkat rögzített k mellett n-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n \leqq k+1$, azaz $n-1 \leqq k$ ($k \geqq 1$), akkor a szóban forgó gráfok nem tartalmazhatnak k-nál hosszabb utat, és e gráfoknak legfeljebb annyi élük lehet, mint a teljes n-gráfnak; vagyis

$$é \leqq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leqq \frac{nk}{2}.$$

Itt $é = \frac{nk}{2}$ pontosan akkor áll, ha gráfunk teljes $k+1$-gráf.

Most tegyük fel, hogy n és k rögzített, $k \geqq 1$, $n > k+1$ és hogy e k mellett állításunk igaz minden n-nél kisebb pontszámú egyszerű gráfra. Bebizonyítjuk, hogy ekkor igaz az állításunk minden n-pontú egyszerű gráfra is. Jelöljünk G-vel egy k-nál hosszabb utat nem tartalmazó n-pontú és $é$-élű egyszerű gráfot.

Először vizsgáljuk azt az esetet, amelyben G nem összefüggő. Jelöljük G komponenseit így: $G_1, G_2, \ldots$, és legyen G_i pontjainak száma n_i minden szóba jövő i-re. Nyilvánvaló, hogy egyetlen G_i sem tartalmaz k-nál hosszabb utat. Indukciós feltevésünk szerint igaz a 71. állítás minden G_i-re. Így

$$é \leqq \frac{n_1 k}{2} + \frac{n_2 k}{2} + \ldots = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots)k}{2} = \frac{nk}{2},$$

és itt az $é = \frac{nk}{2}$ egyenlőség pontosan akkor áll, ha valamennyi G_i teljes $k+1$-gráf.

Most tegyük fel, hogy G összefüggő. Meg fogjuk mutatni, hogy van G-nek olyan p pontja, amelyre

$$\varphi(p) \leqq \frac{k}{2}.$$

Ezzel állításunk így adódik: Jelöljük p-nek és a p-hez illeszkedő éleknek törlése révén G-ből nyert gráfot G'-vel. E gráf $n-1$-pontú, és nem tartalmaz k-nál hosszabb utat. G' nem tartalmazhat teljes $k+1$-gráfot sem, mert különben volna benne olyan k hosszúságú út, amely az 1.25 állítás felhasználásával bővíthető volna $k+1$ hosszúságú G-beli úttá. Ennélfogva indukciós feltevésünk szerint G' éleinek $é_0$ számára

$$é_0 < \frac{(n-1)k}{2},$$

és így

$$é = \varphi(p) + é_0 < \frac{k}{2} + \frac{(n-1)k}{2} = \frac{nk}{2}.$$

Már csak azt kell bizonyítanunk, hogy van G-nek $\frac{k}{2}$-nél nem nagyobb fokú pontja. Tegyük fel, hogy ez az állításunk nem igaz. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy k páros, ill. páratlan. Mind a $k = 2m$, mind a $k = 2m+1$ esetben G minden p pontjára fennáll:

$$\varphi(p) \geqq m+1.$$

Ha $k=2m$, akkor $n > k+1$ miatt $n \geqq 2m+2$. Ha $n \geqq 2m+3$ is áll, akkor G a 70. állítás szerint tartalmaz legalább $2m+2 = k+2$ hosszúságú utat, ha pedig $n = 2m+2$, akkor a 4.14 állítás szerint van G-nek Hamilton-köre, és így van G-ben $2m+1 = k+1$ hosszúságú út is.

Ha $k = 2m+1$, akkor $n > k+1$ miatt $n \geqq 2m+3$, és így G a 70. állítás szerint tartalmaz $2m+2 = k+1$ hosszúságú utat.

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, tehát valóban van G-nek $\frac{k}{2}$-nél nem nagyobb fokú pontja. Ezzel a 71. állítás bizonyítását befejeztük.

A 71. állítás bizonyításához hasonlóan, de kissé több megfontolással be lehet bizonyítani, hogy ha egy adott pontszámú egyszerű gráfnak „elég sok" éle van, akkor van benne „elég hosszú" kör is. Ezt mondja ki pontosabban az alábbi állítás, amelyet nem bizonyítunk:

72. *Ha egy n-pontú egyszerű gráf nem tartalmaz k-nál* ($k \geqq 2$) *hosszabb kört, akkor éleinek é számára*

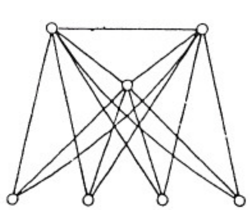
$$é \leqq \frac{(n-1)k}{2}.$$

Extrém gráfok (amelyekre egyenlőség áll) azok az összefüggő gráfok, amelyeknek minden tagja teljes k-gráf.

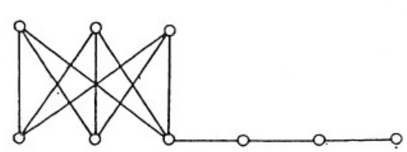
Ha a közös élt nem tartalmazó K_1 és K_2 egy G gráfnak körei, akkor azt mondjuk, hogy K_1 és K_2 a G gráfban *élfüggetlen körök*. Ha K_1 és K_2 nem tartalmaz közös pontot — ekkor persze közös élt sem tartalmazhatnak —, akkor azt mondjuk, hogy K_1 és K_2 a G gráfban *pontfüggetlen körök*.

Gyakorlatok

73. Számítsuk ki az alább megadott n-pontú ($n \geqq 3$) egyszerű G gráf éleinek számát: A G gráf tartalmaz egy H háromszöget. A H-ba nem tartozó G-beli pontok halmazát P-vel jelölve: P a G gráfnak független ponthalmaza, és P minden pontja szomszédos H minden pontjával. E gráfot így jelöljük: $\langle ③, n-3\rangle$. A 184. ábrán $\langle ③, 4\rangle$ látható.



184. ábra



185. ábra

74. Hány éle van annak az n-pontú ($n \geqq 6$) egyszerű gráfnak, amely vagy maga a $\langle 3,3\rangle$ gráf, vagy pedig $\langle 3,3\rangle$-ból úgy nyerhető, hogy annak egyik pontját összeforrasztjuk egy vele közös pontot nem tartalmazó út egyik végpontjával egyetlen ponttá? A 185. ábra így előállítható 9-pontú gráf.

Feladatok

75. Vannak-e élfüggetlen vagy pontfüggetlen körök a 73. gyakorlatban megadott $\langle ③, n-3\rangle$ gráfban?

76. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszöget nem tartalmazó n-pontú ($n \geqq 5$) egyszerű G gráfban nincs két pontfüggetlen kör, akkor G éleinek $é$ számára

$$é \leqq 3n-9.$$

77. Mutassuk meg, hogy a 150. ábrán látható gráf minden köre legalább 5 hosszúságú.

78. Bizonyítsuk be, hogy ha egy legfeljebb 9-pontú gráf minden pontjának foka legalább 3, akkor van a gráfban 4-nél nem hosszabb kör.

79. Vannak-e élfüggetlen vagy pontfüggetlen körök a 74. gyakorlatban megadott gráfokban?

A 73. gyakorlatban szereplő n-pontú gráf éleinek száma $3+(n-3)3 = 3n-6$.

A 74. gyakorlatban szereplő n-pontú gráf éleinek száma $9+n-6 = n+3$.

A 75. feladat megoldásához először is megállapíthatjuk, hogy a szóban forgó G gráfban van két élfüggetlen kör, ha $n=5$, és így van akkor is, ha $n \geqq 5$. Azonban belátjuk, hogy pontfüggetlen körök n bármely értéke mellett sincsenek G-ben. Minthogy a 73. gyakorlatban említett P halmaz G-nek független ponthalmaza, és G egyszerű, bármely G-beli kör legalább két H-beli pontot tartalmaz. Ebből következik állításunk.

Ha a 76. feladatban megadott n-pontú G gráf nem tartalmaz kört, akkor a 2.4 feladat szerint éleinek száma legfeljebb $n-1$, és $n-1 < 3n-9$, ha $n>4$. Tehát feltehetjük, hogy G tartalmaz kört. Jelöljük G egy minimális hosszúságú körét K-val, K hosszát m-mel és G-nek K-ba nem tartozó pontjai feszítette részgráfját G_0-val. Mindenesetre $m \geqq 4$.

A K körnek nem lehet átlója, azaz 1 hosszúságú L húrja, mert ha volna, akkor L végpontjai K-t két ívre bontanák, bármelyikük hossza legalább 2 volna, és így egyiküket L-lel pótolva, K-ból rövidebb kört is nyerhetnénk.

Minthogy nincs G-ben két pontfüggetlen kör, G_0 nem tartalmazhat kört. Ennélfogva a 2.4 feladat szerint G_0 éleinek száma legfeljebb $n-m-1$.

A fentiekhez hasonló módon adódik, hogy $m \geqq 5$ mellett nem lehet K-nak 2 hosszúságú húrja sem; ugyanis ha volna, akkor azzal K-nak egy legalább 3 hosszúságú ívét pótolhatnánk, és így ellentmondásba jutnánk K minimális tulajdonságával. Ebből következik, hogy az $m \geqq 5$ esetben egyetlen G_0-beli pontnak sem lehet két K-beli szomszédja. Ha $m = 4$, akkor pedig bármely G_0-beli pont legfeljebb két K-beli ponttal szomszédos, mert ellenkező esetben G-nek háromszöget kellene tartalmaznia. A G gráf élei K éleiből, G_0 éleiből és azokból az élekből adódnak, amelyeknek egyik végpontja G_0-beli, a másik pedig K-beli. Tehát G éleinek száma legfeljebb

$$m + (n-m-1) + 2(n-m) = 3n - 2m - 1 \leqq 3n - 9.$$

Ezzel megoldottuk a 76. feladatot, amelyhez megjegyezzük, hogy valójában csak az $n \geqq 8$ esetek érdekesek, hiszen háromszöget nem tartalmazó gráf különben úgysem tartalmazhat két pontfüggetlen kört.

A 76. feladat alapján azt is mondhatjuk, hogy ha az n-pontú ($n \geqq 5$) és $3n-9$-nél több élű egyszerű G gráf nem tartalmaz pontfüggetlen köröket, akkor tartalmaz háromszöget. Vajon maximálisan hány éle lehet pontfüggetlen köröket nem tartalmazó n-pontú egyszerű gráfnak? Megmutatjuk, hogy legfeljebb $3n-6$, pontosabban bebizonyítjuk az alábbi állítást:

80. *Ha az n-pontú* ($n \geqq 6$) *egyszerű gráfban nincs két pontfüggetlen kör, akkor éleinek é számára*

$$é \leqq 3n - 6.$$

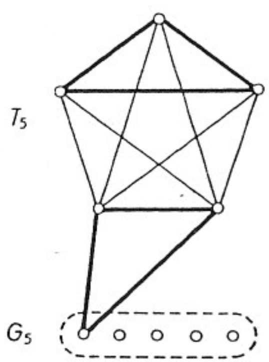
Extrém gráfok (amelyekre az egyenlőség áll) a $\langle ③, n-3 \rangle$ *gráfok; más extrém gráf nincs.*

A 73. gyakorlat végrehajtása és a 75. feladatra adott válasz szerint az itt megadott gráfok valóban $é \leqq 3n-6$-hoz tartozó extrém gráfok.

A 80. állítás bizonyításához tegyük fel, hogy az n-pontú G gráfban nincs két pontfüggetlen kör. A 76. feladat imént bizonyított állítása alapján arra az esetre szoríthatunk, amikor G tartalmazza a T_3-mal jelölt teljes 3-gráfot.

Jelöljük G-nek a T_3-ba nem tartozó pontjai feszítette részgráfját G_3-mal. Minthogy nincs G-ben két pontfüggetlen kör, G_3 nem tartalmaz kört, és így éleinek száma a 2.4 feladat szerint legfeljebb $n-3-1 = n-4$. Ha G nem tartalmaz teljes 4-gráfot, akkor G_3 bármely pontjának legfeljebb két T_3-beli szomszédja lehet. Ekkor tehát G éleinek száma legfeljebb

$$3 + (n-4) + 2(n-3) = 3n - 7.$$



186. ábra

Tegyük fel most, hogy G tartalmazza a T_5-tel jelölt teljes 5-gráfot. Jelöljük G-nek a T_5-be nem tartozó pontjai feszítette részgráfját G_5-tel. Nyilvánvaló, hogy G_5 nem tartalmaz kört, és így éleinek száma legfeljebb $n-5-1 = n-6$. G_5 bármely pontjának legfeljebb egy T_5-beli

szomszédja lehet, mert különben volna G-ben két pontfüggetlen kör: a 186. ábrán a vastag élűek. Ennélfogva G éleinek száma legfeljebb

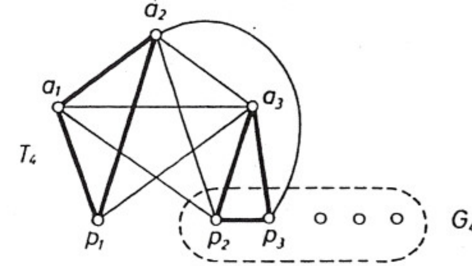
$$10 + (n-6) + (n-5) = 2n - 1,$$

és $2n-1 \leqq 3n-7$, ha $n \geqq 6$.

Tehát feltehetjük, hogy G tartalmazza a T_4-gyel jelölt teljes 4-gráfot és nem tartalmaz teljes 5-gráfot. Jelöljük G-nek a T_4-be nem tartozó pontjai feszítette részgráfját G_4-gyel. G_4 nem tartalmaz kört, és így éleinek száma legfeljebb $n-4-1 = n-5$. Ha G_4 bármely pontja legfeljebb két T_4-beli ponttal szomszédos, akkor G éleinek száma legfeljebb

$$6 + (n-5) + 2(n-4) = 3n - 7.$$

Egyetlen G_4-beli pont sem lehet szomszédos T_4 minden pontjával, hiszen G nem tartalmaz teljes 5-gráfot. Már csak azt az esetet kell vizsgálnunk, amikor van G_4-nek olyan p_2 pontja, amely szomszédos T_4-nek az a_1-gyel, a_2-vel és a_3-mal jelölt három pontjával, de nem szomszédos a p_1-gyel jelölt pontjával. Ha van G_4-nek olyan p_3 pontja, amely az eddig megjelölt 5 pont közül 3-mal is szomszédos, akkor p_3-nak csak a_1, a_2 és a_3 lehet szomszédja, de p_1 és p_2 nem, mert különben volna G-ben két pontfüggetlen kör (az egyik esetben a 187. ábra vastag élű köreivel szemléltetünk, a többi esetben hasonló módon járhatunk el). Ha van G_4-ben olyan p_4 pont, amely az eddig megjelölt 6 pont közül hárommal is szomszédos, akkor az eddigiekhez hasonló módon adódik, hogy p_4-nek is csak a_1, a_2 és a_3 lehet e 3 szomszédja. Ha eljárásunkat folytatva G_4 pontjait végül kimerítjük, akkor azt kapjuk, hogy G egy $\langle ③, n-3 \rangle$ gráf. Tegyük fel, hogy eljárásunk folytán az utoljára megjelölt pont p_k, és van még G_4-nek meg nem jelölt pontja. Jelöljük G-nek e meg nem jelölt pontok feszítette részgráfját G'-vel. E gráfnak bármely pontja tehát legfeljebb két megjelölt ponttal lehet szomszédos. Az $n-k-3$-pontú G' nem tartalmaz kört, és így éleinek száma legfeljebb $n-k-4$. A G gráfnak megjelölt pontjai feszítette részgráfja egy $\langle ③, k \rangle$ gráf, amelynek $3+3k$ éle van. Ennélfogva G éleinek száma legfeljebb

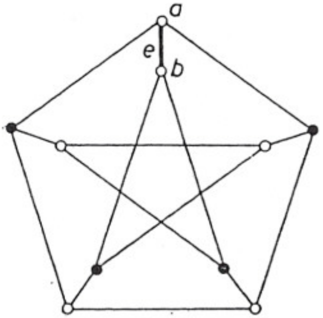


187. ábra

$$(3+3k) + (n-k-4) + 2(n-k-3) = 3n - 7.$$

Ezzel bebizonyítottuk a 80. állítást.

A 77. feladatban felidézett gráf minden pontjának foka 3. Először belátjuk, hogy nincs gráfunkban olyan háromszög vagy négyszög, amely tartalmazza a 188. ábrán vastagon rajzolt $e = \{a, b\}$ élt. Az a-hoz és b-hez illeszkedő egy-egy, e-től különböző élnek nincs közös végpontja. Ebből következik, hogy nincs gráfunkban e-t tartalmazó háromszög. Az a-hoz és b-hez illeszkedő, e-től különböző négy élnek a-tól és b-től különböző végpontjai gráfunknak független ponthalmazát alkotják: a 188. ábrán e pontokat befeketítettük. Ebből következik, hogy nincs gráfunkban e-t tartalmazó négyszög sem. Most e-nek rendre gráfunk éleit választva, beláthatjuk, hogy mindig 4 befeketített pont adódik, és e 4 pont mindig független ponthalmazt alkot. Ebből pedig következik, hogy gráfunkban minden kör hossza legalább 5. Ámde a gráfnak szimmetriája folytán elegendő lesz még két esetet megvizsgálnunk: amelyben e az ábránk peremét alkotó K ötszög egy éle, ill. amelyben e a K-ba nem tartozó pontokat tartalmazó „belső" ötszög egy éle.



188. ábra

A 78. feladat megoldásához tegyük fel, hogy a legfeljebb 9-pontú G gráf minden pontjának foka legalább 3. Jelöljük G egy minimális hosszúságú körét K-val. Tegyük fel, hogy K hossza legalább 5. A K körnek nem lehet 3-nál kisebb hosszúságú húrja (l. a 76. feladat megoldásában alkalmazott okoskodást), és így — minthogy minden pont foka legalább 3 — K minden pontjának van legalább egy K-ba nem tartozó szomszédja. De az előbbiek szerint K bármely két pontjának nem lehet K-ba nem tartozó közös szomszédja sem. Ennélfogva kell lenni legalább 5, K-ba nem tartozó pontnak, holott legfeljebb 4 van. Tehát az a feltevésünk, hogy K hossza legalább 5, nem helytálló.

Érdekes, hogy 10-pontú gráfra nem terjeszthető ki a 78. feladat állítása, amint azt a 77. feladat állítása mutatja.

A 79. feladat megoldásához jelöljünk G-vel egy, a 74. gyakorlatban megadott gráfot. Nyilvánvaló, hogy G minden köre részgráfja a G-beli $\langle 3,3\rangle$ gráfnak. Minthogy G egyszerű, $\langle 3,3\rangle$ pedig páros gráf, G bármely körének hossza legalább 4. Ennélfogva bármely két G-beli körnek van közös pontja (sőt legalább kettő van). Mármost ha K_1 és K_2 G-beli élfüggetlen körök lennének, akkor ezek közös pontja a G-beli $\langle 3,3\rangle$ részgráfban legalább 4-edfokú volna. Ilyen pont azonban a $\langle 3,3\rangle$ gráfban nincs. Tehát élfüggetlen körök sincsenek G-ben.

Most megmutatjuk, hogy a 74. gyakorlatban megadott gráfok az élfüggetlen köröket nem tartalmazók között maximálisan sok élt tartalmaznak (extrém gráfok), vagyis bebizonyítjuk a következő állítást:

81. *Minden n-pontú és legalább $n+4$-élű gráfban van két élfüggetlen kör.*

Állításunkat n-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n=1$, igaz az állítás. Legyen $n>1$ rögzített, és tegyük fel, hogy igaz a 81. állítás minden $n-1$-pontú gráfra; megmutatjuk, hogy ekkor igaz minden n-pontú gráfra is.

Jelöljünk G-vel egy n-pontú és legalább $n+4$-élű gráfot. A 2.4 feladat állítása szerint G tartalmaz kört. Ha van legfeljebb 4 hosszúságú G-beli kör, akkor ennek

éleit törölve, a megmaradt n-pontú G_0 gráfnak legalább n éle van, és így a 2.4 szerint G_0 is tartalmaz kört. Mármost G_0-nak egy köre és az, amelynek éleit töröltük, G-ben élfüggetlenek.

Most tegyük fel, hogy G minden köre legalább 5 hosszúságú. Ekkor G mindenesetre egyszerű gráf. Ha van G-nek legfeljebb elsőfokú pontja, akkor egy ilyen pontnak a törlésével G-ből nyert G_1 gráf $n-1$-pontú és legalább $n+3$-élű. Ennélfogva indukciós feltevésünk értelmében van G_1-ben két élfüggetlen kör; tehát van G-ben is. Ha van G-nek másodfokú p pontja, akkor van p-nek két különböző q_1, ill. q_2 szomszédja. Minthogy nincs G-ben 5-nél rövidebb kör, q_1 és q_2 nem szomszédosak. Töröljük a p pontot, és így a p-hez illeszkedő két élt is, majd hozzuk létre a $\{q_1, q_2\}$ élt. A G-ből így nyert G_2 gráf $n-1$-pontú és legalább $n+3$-élű, ennélfogva indukciós feltevésünk szerint van G_2-ben két élfüggetlen kör; és a $\{q_1, q_2\}$ élt a $\{q_1, p\}$ és $\{p, q_2\}$ élekkel pótolva azt kapjuk, hogy G-ben is van két élfüggetlen kör.

Ha G minden pontjának foka legalább 3, akkor — amennyiben G-nek $n+4$-nél több éle van — a pontok meghagyása mellett töröljünk G-ből annyi élt, hogy a megmaradt n-pontú G_3 gráfnak pontosan $n+4$ éle legyen. Most vagy van G_3-nak 3-nál kisebb fokú pontja, és akkor ismét a fenti okoskodásunkat alkalmazzuk, vagy G_3 minden pontjának foka legalább 3. Ekkor azonban G_3 éleinek száma legalább $\frac{3n}{2}$, azaz

$$n+4 \geqq \frac{3n}{2}.$$

Ebből viszont következik, hogy $n \leqq 8$. Ámde ekkor a 78. feladat állítása szerint G_3 — és így G is — tartalmaz 4-nél nem hosszabb kört, ellentétben azzal, hogy G minden köre legalább 5 hosszúságú.

Ezzel bebizonyítottuk a 81. állítást.

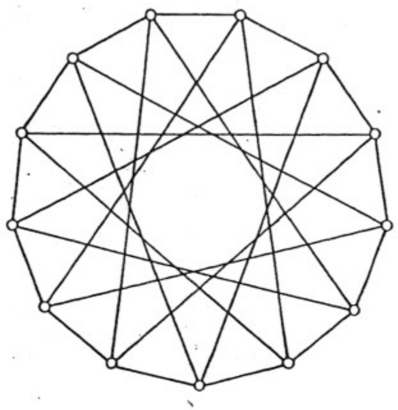
*

Gyakorlatok

82. Mutassuk meg, hogy van olyan 6-pontú egyszerű G gráf, hogy G is és komplementere is pontosan egy háromszöget tartalmaz.

83. Igazoljuk, hogy a 189. ábra nem tartalmaz háromszöget.

84. Jelöljünk ki a síkon 8 pontot úgy, hogy közülük bármely 3 ne essék egy egyenesre. A pontpárokat összekötő szakaszok közül minimálisan hányat kell meghúznunk, hogy biztosan létrejöjjön olyan háromszög, amelynek csúcsai a


189. ábra

kijelölt pontok közül valók? Minimálisan hány szakaszt kell meghúznunk, hogy létrejöjjön mindkét átlóját tartalmazó olyan négyszög, amelynek csúcsai a kijelölt pontok közül valók? Jelöljünk ki most 8 pont helyett 9-et hasonló módon, és válaszoljunk ebben az esetben is a fenti két kérdésre.

85. Igazoljuk, hogy az n-pontú és $é$-élű egyszerű gráfra

$$fp_{\max} \geqq \frac{n^2}{2é+n}.$$

Mikor áll itt az egyenlőség?

86. Az f és d egész számokra: $f \geqq 3$ és $1 \leqq d \leqq \frac{f}{3}$. Visszaemlékezve a 171. ábra jelképezte gráfokra, számítsuk ki az $\left(\!\left(\frac{f}{3}, \frac{f+d}{4}, \frac{f}{3}, \frac{f+d}{4}, \frac{f}{3}, \frac{f+d}{4}, \frac{f+d}{4}\right)\!\right)$ és az $\left(\!\left(\frac{f}{3}, \frac{f}{3}, \frac{f}{3}, \frac{f}{3}, \frac{f}{3}, \frac{f}{6}+\frac{d}{2}, \frac{f}{6}+\frac{d}{2}\right)\!\right)$ gráfok $fp_{\max}$ értékét. Határozzuk meg e gráfok legkisebb fokszámát. Mutassuk meg, hogy gráfjaink nem tartalmaznak sem háromszöget, sem ötszöget.

87. Számítsuk ki az n-pontú

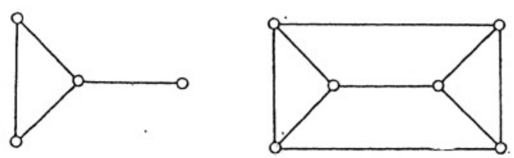
$$\left(\!\left(1, 1, 1, \frac{n-3}{2}, \frac{n-3}{2}\right)\!\right) \quad \text{és az} \quad \left(\!\left(1, 1, \frac{n-1}{4}, \frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{4}\right)\!\right)$$

gráfok éleinek számát és $fp_{\max}$ értékét. Mutassuk meg, hogy e gráfok nem tartalmaznak háromszöget.

88. Melyek azok a kört nem tartalmazó n-pontú és maximálisan sok élű gráfok, amelyek nem tartalmaznak 2-nél hosszabb utat?

89. Melyek a legtöbb élt tartalmazó 4-pontú egyszerű gráfok, amelyekben nincs átlót tartalmazó négyszög?

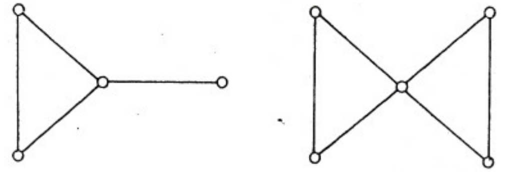
90. A 190. ábrán látható két összefüggő gráfban nincs átlót tartalmazó négyszög.



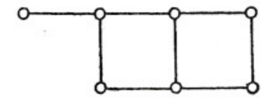
190. ábra

Igazoljuk, hogy ugyanez elmondható bármely $\langle m, m\rangle$ gráfról is. Ellenőrizzük, hogy ha a $2m$-pontú egyszerű gráf a felsorolt gráfok valamelyike, akkor éleinek száma m^2.

91. A 191. ábrán látható két összefüggő gráfban nincs átlót tartalmazó kör. Igazoljuk, hogy ugyanez elmondható bármely $\langle 2, n-2\rangle$ gráfról is. Ellenőrizzük,



191. ábra



192. ábra

hogy ha az n-pontú egyszerű gráf a felsorolt gráfok valamelyike, akkor éleinek száma $2n-4$.

92. Hány maximális független ponthalmaz jelölhető ki a 192. ábrán látható gráfban?

Feladatok

93. Legfeljebb hány éle lehet egy n-pontú nem összefüggő egyszerű gráfnak? Melyek a legtöbb élt tartalmazók, azaz melyek a kérdéshez tartozó extrém gráfok?

94. Láttuk, hogy az ötszög az n (3, 3) számot jellemző (fejezetünk elején felvetett) problémához tartozó extrém gráf. Igazoljuk, hogy nincs e problémához tartozó más extrém gráf.

95. Igazoljuk, hogy bármely 6-pontú egyszerű gráfban és komplementerében tartalmazott háromszögek együttes száma legalább 2.

96. Igazoljuk, hogy a 189. ábrára $fp_{\max} = 4$.

97. Bizonyítsuk be, hogy $n(3, 5) = 14$.

98. A 26. feladatban értelmezett $f_s(n)$ számra vonatkozóan bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan szám és legalább 3, akkor

$$f_{n-1}(n) = 3.$$

99. Jelöljük $g(m, k)$-val ($m \geqq 1, k \geqq 1$) azt a legkisebb egész számot, amelyre fennáll a következő: Bármely $g(m, k)$-pontú egyszerű gráf tartalmaz m hosszúságú utat, vagy a komplementere tartalmaz k hosszúságú utat. Bizonyítsuk be, hogy

$$g(m, k) \leqq m+k.$$

100. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszöget nem tartalmazó n-pontú egyszerű gráfra $fp_{\max} = k$, akkor

$$n \leqq k(k+1).$$

101. Bizonyítsuk be a következőt: Ha $n = 2f+d$ és $1 \leqq d \leqq \frac{f}{3}$ mellett a 7-nél kisebb hosszúságú páratlan kört nem tartalmazó n-pontú egyszerű G gráfra $fp_{\max} = f$,