... az éleknek a számával, amelyeknek végpontja A-ba tartozik, de kezdőpontja nem.

34. Egy irányított $\vec{G}$ gráf pontjai: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Bizonyítsuk be, hogy a következő összeg páros szám:

$$|\varphi_{ki}(p_1)-\varphi_{be}(p_1)|+|\varphi_{ki}(p_2)-\varphi_{be}(p_2)|+\ldots+|\varphi_{ki}(p_n)-\varphi_{be}(p_n)|.$$

35. Bizonyítsuk be, hogy ha az előző feladatban szereplő összeg $2k$ ($k \geqq 1$), és a G gráf összefüggő, akkor kijelölhető a $\vec{G}$ gráfban k számú nyitott gráfvonal úgy, hogy $\vec{G}$ minden éle ezen gráfvonalak közül pontosan egyben szerepeljen. (Vö. a 30. feladattal.)

36. Bizonyítsuk be, hogy hurokélt nem tartalmazó minden gráfot lehet úgy irányítani, hogy az irányított gráf ne tartalmazzon irányított kört.

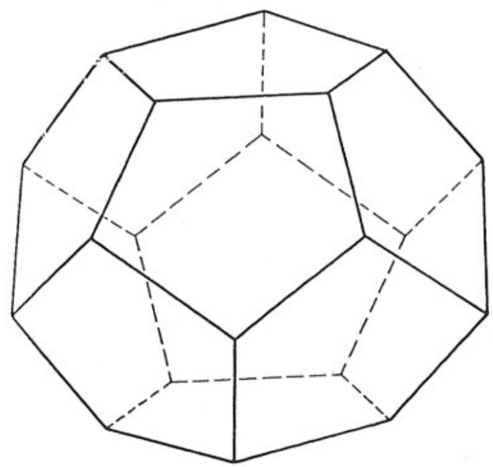
37. Egy körmérkőzés során mindenki mindenkivel egyszer mérkőzött, és egyetlen mérkőzésnek sem volt döntetlen az eredménye. Bizonyítsuk be, hogy van olyan résztvevő, aki minden versenytársát megemlíti akkor, ha felsorolja az általa legyőzötteket, valamint azokat, akiket az általa legyőzöttek legyőztek.

38. Bizonyítsuk be, hogy ha az irányított $\vec{G}$ gráf bármely p pontjára $\varphi_{ki}(p)=\varphi_{be}(p)$, akkor $\vec{G}$ bármely a és b pontpárjára igaz a következő: az a kezdőpontú és b végpontú páronként közös élt nem tartalmazó irányított utak maximális száma megegyezik a b kezdőpontú és a végpontú, páronként közös élt nem tartalmazó irányított utak maximális számával.

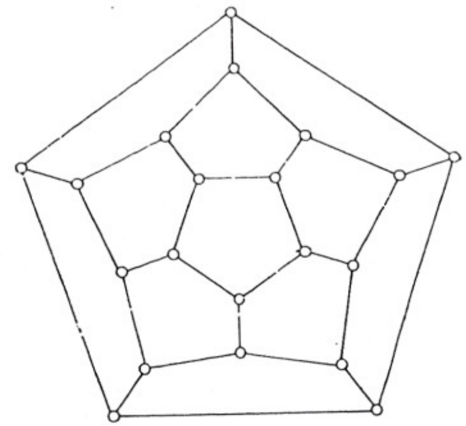
39. Bizonyítsuk be, hogy a kettőnél több pontból is tetszőlegesen bejárható gráfok körök, és így egyszersmind bármely pontjukból tetszőlegesen bejárhatók.

4. BEJÁRJUK A GRÁF PONTJAIT

A 83. ábrán 12 szabályos ötszöglap határolta szabályos test, ún. dodekaéder látható. Ha a csúcsokat gráfpontoknak tekintjük, e test élhálózata gráfot ad, amelyet a méretek torzításával a 84. ábrán látható módon deszkalapra rajzolhatunk. Képzeljünk el a deszkalapon minden gráfpontban egy-egy lyukat és ezekbe illeszthető



83. ábra



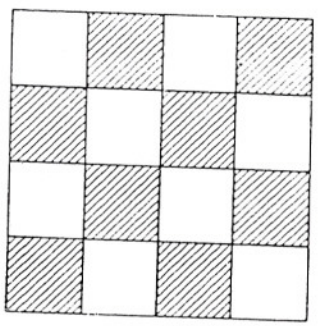
84. ábra

20 darab dugót. Helyezzük a dugókat sorjában a lyukakba a következő játékszabály szerint: Az első dugót bármelyik lyukba illeszthetjük; ezután minden dugót az utoljára elhelyezett dugóval szomszédos (éllel összekapcsolt), még be nem töltött lyukba illesztünk. A játékot akkor mondjuk eredményesnek, ha a fenti szabály szerint mind a 20 lyukat be tudjuk tölteni dugóval, és az utolsónak elhelyezett dugó szomszédos az először elhelyezettel. E játék Hamilton ír matematikustól ered 1860-ból; *dodekaéder-játék* néven ismeretes.

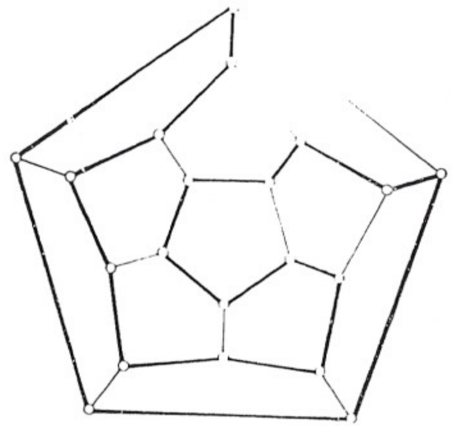
Gyakorlatok

1. Vezessük eredményesen a dodekaéder-játékot.

2. Rajzoljunk a 85. ábrán látható 16 mezőből álló „sakktáblához" gráfot a következőképpen: Feleltessünk meg mind a 16 mezőnek egy-egy gráfpontot, és kössük össze a lóugrásnyira fekvő mezőpároknak megfeleltetett pontpárokat egy-egy éllel.



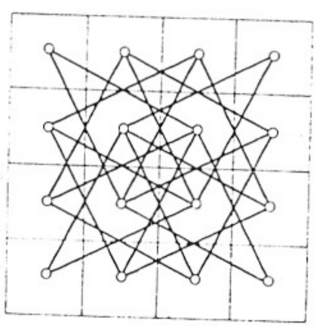
85. ábra



86. ábra

Hamilton-kör
Hamilton-út

Az 1. gyakorlatot végrehajthatjuk a 86. ábra alapján. Az első dugót bármelyik lyukba illeszthetjük, a többit helyezzük el a vastag vonal mentén haladva az érintett lyukak sorrendjében. A vastag vonal az ábrának olyan körét jelöli ki, amely a gráf valamennyi pontját tartalmazza. Egy gráf valamennyi pontját tartalmazó körét a gráf egy *Hamilton-kör*ének, valamennyi pontját tartalmazó útját pedig a gráf egy *Hamilton-út*jának nevezzük. Ha egy gráfnak van Hamilton-köre, nyilván van Hamilton-útja is, hiszen Hamilton-kör bármely élét törölve, Hamilton-utat kapunk. Világos, hogy a 84. ábra bármely Hamilton-köre tetszőleges kezdetű eredményes dodekaéder-játékot jelöl ki, és fordítva, minden eredményes dodekaéder játék meghatározza a 84. ábra egy Hamilton-körét.



87. ábra

A 2. gyakorlat végrehajtását a 87. ábrán láthatjuk. A sakktábla beosztását a vékonyabb vonalak jelzik.

Feladatok

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az összefüggő G gráfból k számú pontjának (természetesen a hozzájuk illeszkedő élekkel együtt történő) törlése révén k-nál több komponensből álló gráfot nyerünk, akkor G-nek nincs Hamilton-köre; ha pedig e törlés révén $k+1$-nél több komponensből álló gráfot nyerünk, akkor G-nek nincs Hamilton-útja sem.

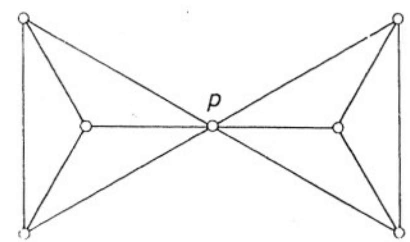
4. Be lehet-e járni a 85. ábrán látható „sakktáblát" (azaz érinteni a sakktábla minden mezőjét) lóugrásokban egyetlen lóval, ha mindig csak olyan mezőre léphetünk, amelyet az előzőekben még nem érintettünk? Tetszőlegesen választott mezőről indulhatunk.

5. Járjuk be a 25 mezőből álló „sakktáblát" lóugrásokkal az előbbi feladatban leírt módon.

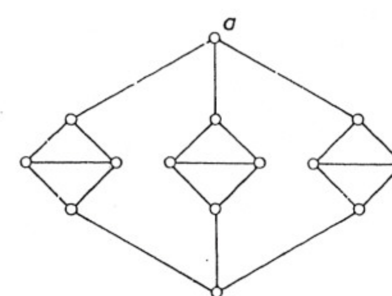
6. Igazoljuk, hogy a dodekaéder-játék szabályainak megfelelően elhelyezhető az első 6 dugó úgy, hogy a játék nem lehet eredményes.

7. Hány különböző módon folytatható eredményesen a dodekaéder-játék az első, ill. az első két dugó elhelyezése után?

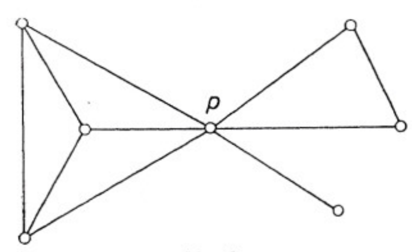
A 3. feladat állítása könnyen belátható, hiszen egy összefüggő gráf k számú pontjának törlésekor a gráf bármely köre legfeljebb k komponensre, bármely útja pedig legfeljebb $k+1$ komponensre esik szét. Ennélfogva Hamilton-kört, ill. Hamilton-utat tartalmazó gráfból k számú pont törlése révén nyert gráf sem állhat k-nál, ill. $k+1$-nél több komponensből, hiszen mind a Hamilton-kör, mind pedig a Hamilton-út a gráf valamennyi pontját tartalmazza. Példaként megállapíthatjuk, hogy nincs Hamilton-köre a 88., 89., 90. és 91. ábrának, közülük a 90- és 91-nek pedig Hamilton-útja sincs (a törlendő pontok: p, a és b).



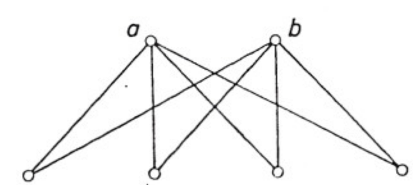
88. ábra



89. ábra



90. ábra

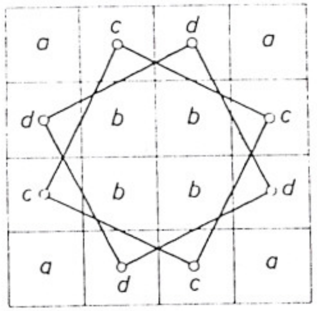


91. ábra

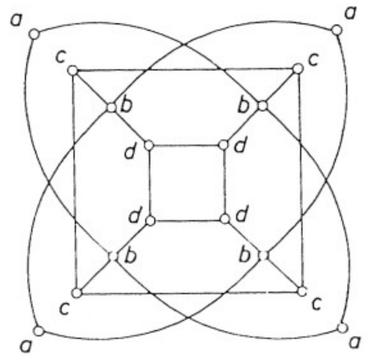
Összefüggő gráf *elvágó pont*jának vagy *artikulációj*ának a gráf olyan pontját nevezzük, amelynek törlése révén a gráfból nem összefüggő gráfot nyerünk. Az 1-nél több élű összefüggő gráf bármely hurokélének pontját is elvágó pontnak nevezzük. A 88. és 90. ábrának p egy-egy elvágó pontja.

Az előbbiek szerint artikulációt tartalmazó egynél több pontú gráfnak nem lehet Hamilton-köre.

A 4. feladatban az a kérdés, hogy a 87. ábrán látható sakktáblára rajzolt G gráfnak van-e Hamilton-köre vagy Hamilton-útja. Rajzoljuk fel a G gráfot áttekinthetőbben! Jelöljük meg a sarkokban levő másodfokú pontokat a-val, ezek szomszédait pedig b-vel. A megjelölt pontokat törölve G-ből, két kör marad; jelöljük meg egyikük pontjait c-vel, másikuk pontjait pedig d-vel (92. ábra). Ha e két kört úgy rajzoljuk meg, hogy éleik ne keresztezzék egymást — mint pl. a 93. ábrán —, máris áttekint-



92. ábra

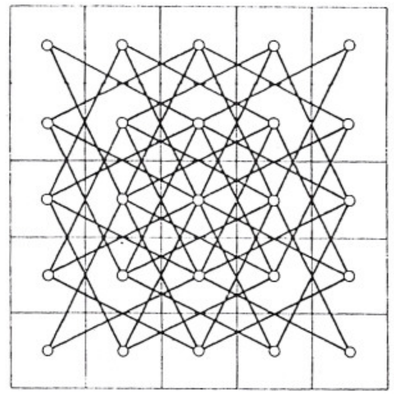


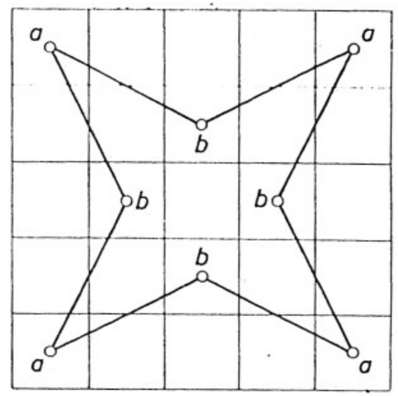
93. ábra

hetőbb lesz gráfunk (amelyben még minden b jelű pont szomszédos egy-egy c jelű és d jelű ponttal is). Már közben is észrevehettük, most pedig könnyen ellenőrizhetjük, hogy G összefüggő, és belőle a b-vel jelölt 4 pont törlése révén 6 komponensből álló gráfot nyerünk: az a-val jelölt 4 pont és a c-vel, ill. a d-vel jelölt pontokat tartalmazó 2 kör teszi ki e 6 komponenst. Ennélfogva a 3. feladat szerint nincs G-nek sem Hamilton-útja, sem Hamilton-köre. Tehát nem járható be a 85. ábrán látható sakktábla a 4. feladatban kérdezett módon.

Az 5. feladatot megoldjuk, ha megkeressük a 94. ábrán látható G gráf egy Hamilton-útját. Most is célszerű lesz gráfunkat áttekinthetőbben felrajzolni. Jelöljük meg a sarkokban levő másodfokú pontokat a-val, ezek szomszédait pedig b-vel. A 95. ábrán csak az a-khoz illeszkedő éleket rajzoltuk meg. Minthogy e 8 él G egy körét jelöli ki, nem szerepelhet mind G egyetlen Hamilton-útjában sem és egyetlen Hamilton-körében sem. Ebből következik, hogy Hamilton-köre nem is lehet G-nek, mert abból a G másodfokú pontjaihoz illeszkedő élek közül egy sem maradhatna ki; Hamilton-útja pedig csak olyan lehet, amelynek legalább az egyik végpontja a-val jelölt pont, mert ebből egy a jelű ponthoz illeszkedő élnek ki kell maradnia, és így

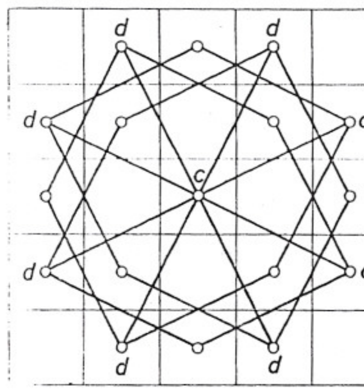
benne ez az a jelű pont elsőfokúvá válik. A 96. ábrát a 94-ből úgy nyertük, hogy töröltük az a és b pontokat. Ha most még a középső c pontot is töröljük, pusztán egy 16-élű K kör marad G-ből. E kört élei mentén bejárva, minden második pontot d-vel jelöltünk meg; ezek c szomszédai. A 97. ábrán G-t úgy rajzoltuk meg, hogy a


94. ábra

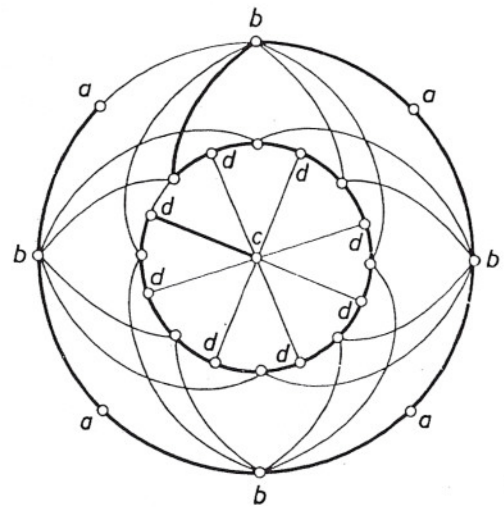


95. ábra

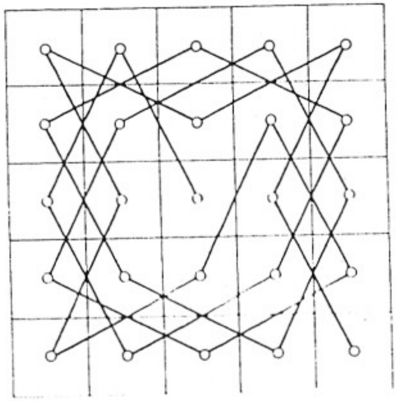
K kört „körvonallá húztuk ki". Így G áttekinthetőbb és könnyen találunk benne egy sereg Hamilton-utat. Példaként egy Hamilton-út éleit vastagabban rajzoltuk; ennek a 98. ábrán látható megfelelője nyomán bejárhatjuk sakktáblánkat lóugrásokkal a kívánt módon.



96. ábra

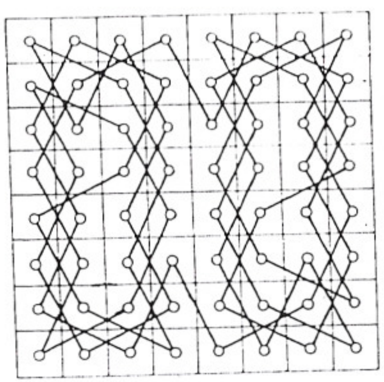


97. ábra



98. ábra

Megjegyezzük, hogy a 4, ill. 9 mezőből álló „sakktábla" nem járható be lóugrásokkal, ugyanis az előbbin nincs mezőpár lóugrásnyi távolságban, az utóbbin pedig nem akad a középső mezőtől lóugrásnyi távolságban fekvő. Viszont a 64 mezőből álló „igazi" sakktábla bejárható lóugrásokkal, mégpedig úgy is, hogy az utoljára érintett mező lóugrásnyira legyen attól, amelyről indultunk. Vagyis van a sakktáblára a fentiekhez hasonlóan rajzolt gráfnak Hamilton-köre. Azonban ne várjuk, hogy e bejárást kitűző feladatot feltétlenül megoldhatjuk meddő kísérletek nélkül, noha a feladatnak számtalan megoldása ismeretes (ez a probléma régi idők óta sokakat foglalkoztatott). Egy megoldást a 99. ábrán megrajzolt Hamilton-kör ad, egy másikat pedig a 100. ábrán láthatunk: a lóugrások sorrendjét a számok sorrendje mutatja. Az utóbbinak az is érdekessége, hogy a mezőkbe írt számok összege minden sorban és oszlopban egyaránt 260. A feladatnak több ilyen *bűvös négyzet*et adó megoldása ismeretes.



99. ábra

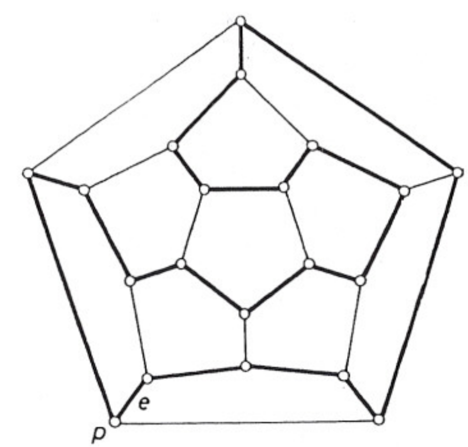
50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

100. ábra

Az előző fejezetben gráfok éleinek egyrétű bejárásával foglalkoztunk. Ilyen bejárás akkor lehetséges, ha létezik a gráfnak Euler-vonala, ill. nyitott Euler-vonala. Találtunk olyan általános érvényű állítást, amely körülhatárolja az Euler-vonallal, ill. nyitott Euler-vonallal rendelkező gráfok osztályát (3. fejezet 6. és 7. állítás), és az ebbe tartozó gráfok éleinek egy jól követhető egyrétű bejárási utasítását is felleltük (a 3. fejezet 5. feladatának második megoldását követő bekezdésben). E fejezetben — amint az eddigiekből is kitűnik — hasonló problémával foglalkozunk: gráfok élei mentén haladva, pontjainak egyrétű bejárása a feladat, amely megoldható, ha van a gráfnak Hamilton-köre vagy Hamilton-útja. Azonban nem ismeretes sem olyan általános érvényű állítás, amely körülhatárolná a Hamilton-kört vagy Hamilton-utat tartalmazó gráfok osztályát, sem olyan utasítás, amelynek alapján a kívánt bejárás véghezvihető volna. (Olyan általános érvényű feltételek ismeretesek, amelyek biztosítják gráfok Hamilton-körének, ill. -útjának létezését, de nem szükségesek ehhez. Közülük néhányat meg fogunk ismerni a későbbiekben.) Ennélfogva a Hamilton-féle bejárás keresése lényegesen nehezebb, mint az Euler-féle. Pedig a probléma megoldása gyakorlatilag is fontos volna. Ha pl. egy utazó el akar jutni egy sereg városba, akkor a szóban forgó városokat összekapcsoló út- vagy vasúthálózatból adódó gráf egy Hamilton-körét vagy útját célszerű követnie. Amennyiben ilyen létezik, a gazdaságosság azt is megköveteli, hogy az utazó olyan Hamilton-kört, ill. -utat kövessen, amelynek mentén az utazás összköltsége a lehető legkisebb. E problémára mindmáig nem sikerült általános érvényű megoldást találni.

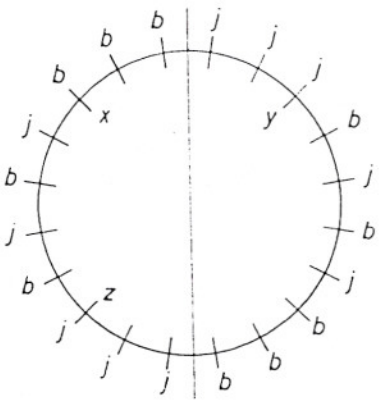
Visszatérve a kitűzött feladatokra, a 6. feladat megoldását is nyerjük, ha követjük a dodekaéder-játék alábbi vizsgálatát. A dugók játékszabály szerinti elhelyezésének egy sorrendjét megadhatjuk a 84. ábrán látható gráf megfelelő éleinek bejárásával, mint ahogyan az 1. gyakorlat végrehajtásában történt. A síkra rögzített gráf minden pontja harmadfokú, tehát ha egy pontba érkezünk — és oda dugót illesztünk —, e pontból két élen mehetünk tovább: a jobbra vagy balra esőn, röviden a j vagy a b élen. Vagyis ha az első pontot és az elsőként bejárandó élt rögzítjük, a folytatást már egy j és b jelekből álló sorozattal is leírhatjuk. Pl. ha a 101. ábrán az első pont p és az első él e, akkor az ábrán látható G gráf vastagon megrajzolt Hamilton-köre így írható le:

$$jjjbjbjbbbjjjbjbjbbb.$$



101. ábra

Sorozatunk 20 tagú, minden élre fordulásnak egy tag felel meg; az utolsó b betű az e élre fordulást jelzi. Ugyanezt a Hamilton-kört bármely pontból kezdődően is leírhatjuk. Ez azt jelenti, hogy ha a fenti sorozatunkat egy körvonal mentén az óramutatót követő sorrendben helyezzük el, akkor ezt az irányt megtartva, egy teljes körüljárásban ugyanazt a Hamilton-kört olvashatjuk le, bárhonnan is indulunk (102. ábra). Figyeljük meg, hogy ha a Hamilton-körünk bejárása folyamán egy ponton b jellel haladunk át, akkor ugyanazon a ponton a Hamilton-kör ellentétes irányú bejárásában j jellel haladnánk át és viszont. Vagyis, ha a 102. ábrán a b és j jeleket egymással felcseréljük (amit úgy is elérhetünk, hogy tükrözzük az ábrát a berajzolt tengelyen), akkor is megadható Hamilton-körünk az óramutatót követő leolvasással, csakhogy az előbbivel ellentétes irányú bejárásával. De azt is figyeljük meg a 102. ábrán, hogy ha x-ből indulunk az óramutatót követően, és az érintett b jeleket sorra j jelekkel helyettesítjük, az érintett j jeleket pedig b jelekkel, akkor ugyanaz a jelsorozat alakul ki, mint amit y-ból indulva az óramutató járásával ellentétesen, betűcsere nélkül olvashatunk le az ábráról. Tehát Hamilton-körünk bármely pontból induló és mindkét irányban vett bejárása leolvasható a 102. ábráról.



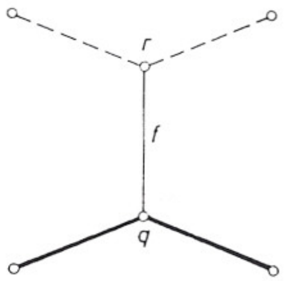
102. ábra

Írjuk le a 86. ábrán (1. gyakorlat megoldása) kijelölt Hamilton-kört b és j jelekkel, ha a legalsó él a kezdőél, és ennek bal vége a kezdőpont. A kapott

$$jbjbjbbbjjjbjbjbbbjj$$

sorozat azonban a 102. ábráról is leolvasható, ha a z pontból indulunk, és az óramutató járását követjük. E megfigyelés nem véletlen, ugyanis megmutatjuk, hogy a 84. ábrán látható gráf bármely Hamilton-körének bejárása leolvasható a 102. ábráról a fentebb említett módon; azaz bármely eredményesen vezetett dodekaéder-játék menetét megadja a 102. ábra egy körbejárása révén nyert jelsorozat.

Nem megy az általánosság rovására, ha állításunk bizonyításakor rögzítettnek tekintjük a játék G gráfjában a p kezdőpontot és az e kezdőélt; ugyanis a dodekaéder-játékot dodekaédertesten is vezethetnénk, ott pedig az élhálózat szimmetriája folytán egyik élnek sincs kitüntetett szerepe.



103. ábra

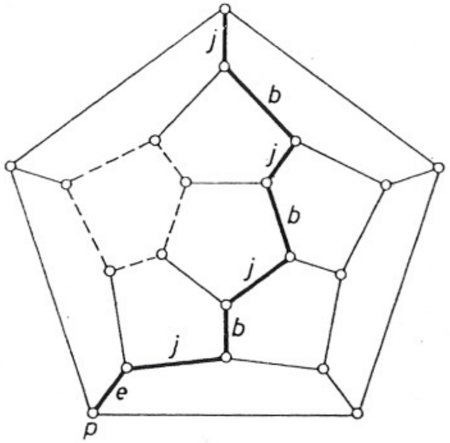
A következőket kell még szem előtt tartanunk:

I. Kör valódi része nem lehet kör.

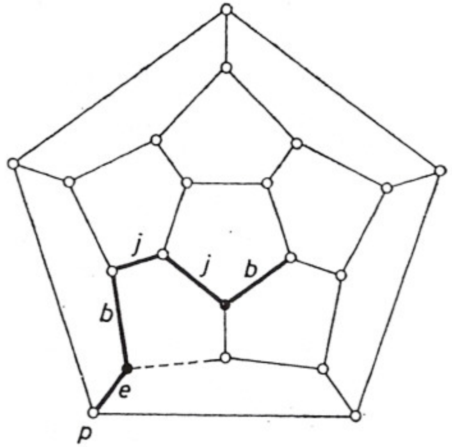
II. A G gráf minden pontja G-ben harmadfokú, G bármely Hamilton-körében pedig másodfokú. Ennélfogva, ha q és r egy G-beli f él végpontjai, és a q-hoz illeszkedő másik két él G-nek egy H Hamilton-köréhez tartozik, akkor f nem tartozhat H-hoz; de éppen ezért az r-hez illeszkedő másik két élnek H-hoz kell tartoznia (103. ábra).

Ezek alapján eredményes játékot leíró, j és b jelekből álló sorozatról az alábbiakat állapíthatjuk meg. (A sorozatot a 102. ábra mintájára körvonalon elhelyezettnek képzeljük el.)

(1) A sorozat nem állhat csupán váltakozó j és b jelekből; sőt 7 jel sem követheti benne egymást váltakozva: A 104. ábra egy j-vel kezdődő ilyen részletet szemléltet az élek vastagításával, és az ezt tartalmazó Hamilton-körben a II. követelmény szerint szükségképpen fellépő részletet az élek szaggatottan rajzolásával; az utóbbi pedig az I. tilalomba ütközik. (Ebből következik, hogy *bjbjbjb* részlet sem fordulhat elő, mert ha egy Hamilton-kör bejárását leíró sorozatban betűcserét hajtunk végre, ugyanazon Hamilton-kör bejárását kapjuk az előbbivel ellentétes irányban.)



104. ábra

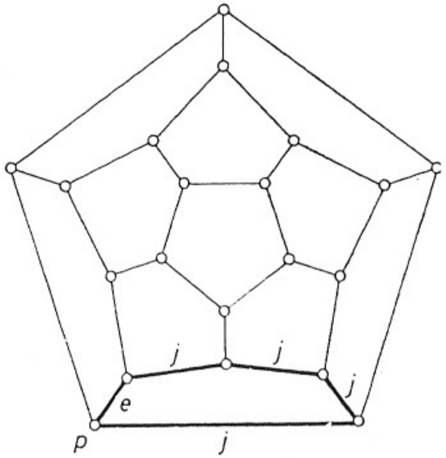


105. ábra

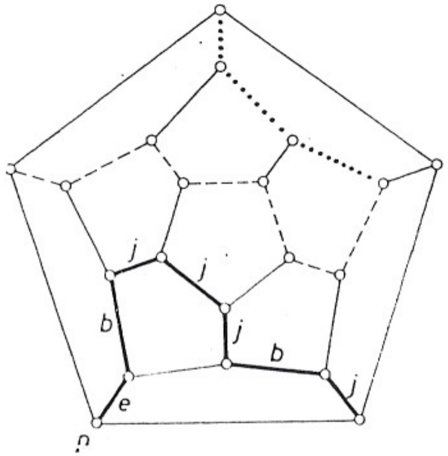
(2) Az előbbiek szerint szükségképpen szerepel sorozatunkban két egymást követő j vagy b jel. De ekkor egy harmadik ugyanolyan jelnek is csatlakoznia kell hozzájuk; vagyis nem fordulhat elő *bjjb* részlet (és a betűcserével adódó *jbbj* sem): A 105. ábrán vastagítással jelöltünk meg egy ilyen részletet, és szaggatottan egy élt, amelynek a II. követelmény szerint — a két befeketített ponthoz illeszkedő éleket tekintetbe véve — egyrészt tilos, másrészt kötelező szerepelnie G-nek a vastag éleket tartalmazó bármely Hamilton-körében. Az ábra vastag vonalának követése eszerint a 6. feladat megoldását is adja.

(3) Azonban négy j jel (és betűcserevél: négy b jel) nem szerepelhet egymás után a sorozatunkban, hiszen így a 106. ábra tanúsága szerint az I. tilalomba ütköznénk.

Az előbbiek alapján sorozatunknak szükségképpen van három egymást követő, azonos jelből álló részlete; tegyük fel, hogy ez *jjj*; (3) szerint ezt b előzi meg és követi is. A *bjjjb* részlet után akár j-vel, akár b-vel folytatódhat a sorozat; de megmutatjuk, hogy az ezt követő rész már egyértelműen meghatározott. A 107. ábrán az első változat kezdeti részét vastagítva, a II. követelmény szerint az ugyanazon H Hamilton-körhöz szükségképpen tartozó részt szaggatva, és a szaggatott rész miatt II. szerint H-hoz tartozó részt pontozva jelöltük meg. A vastag vonal az I. tilalom miatt csakis b-vel, majd a II. követelmény miatt csakis j-vel folytatódhat; így beletorkollik a



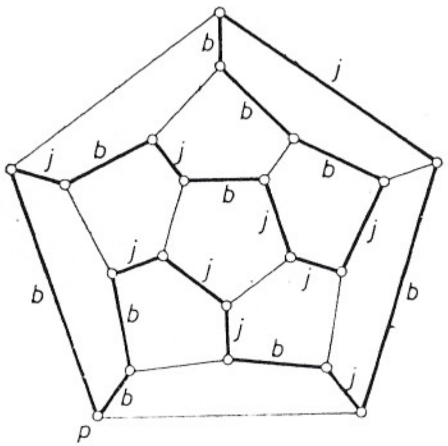
106. ábra



107. ábra

pontozott vonalba, és csakis ennek bejárásával folytatódhat II. szerint; így a szaggatott vonalba torkollik bele, és folytatni II. miatt csakis ennek mentén lehet, végül is a p kiinduló pontba térve vissza. Így kapjuk a 108. ábrán kivastagított Hamilton-kört. Erről a következő sorozat olvasható le:

bjjjbjbjbbbjjjbjbjbb.



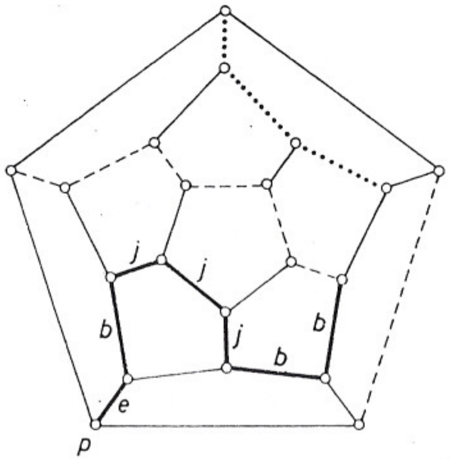
108. ábra

Ugyanez a sorozat olvasható le alkalmas helyről indulva, az óramutatót követő sorrendben a 102. ábráról is.

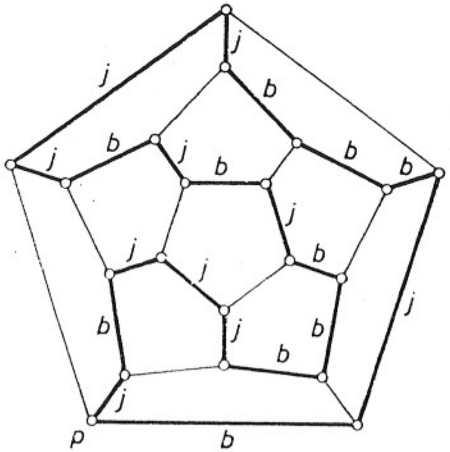
Hasonlóan állapíthatjuk meg a 107. ábrának megfelelő 109. ábrából, hogy egy *bjjjbb* részletet tartalmazó sorozat a 110. ábrán látható Hamilton-kört határozza meg egyértelműen. Erről pedig a teljes sorozat így olvasható le:

bjjjbbbjbjbjjjbbbjbj.

Ez is leolvasható a 102. ábráról, az óramutató járásával ellenkező irányban haladva. A betűcserével adódó *jbbbj* kezdetű sorozat sem adhat újat. Tehát a j és b jelek bármely 20 tagú sorozata, amely a G gráf egy tetszőleges Hamilton-körének bejárását írja le, a 102. ábráról is leolvasható, a körvonal egy körbejárása révén. Ez volt a bizonyítandó állításunk.



109. ábra



110. ábra

A 7. feladat megoldásához először is vegyük észre, hogy a 102. ábra tükrös a körvonal középpontjára, azaz egy körbejárás mentén leolvasott sorozatban az első 10 tagú részlet ismétlődik. Tehát a p kezdőpont és az e kezdőél rögzítése mellett az, hogy a 102. ábra 20 jele közül bármelyikkel folytathatjuk a leolvasást, a két forgásirányban mégsem 20—20, hanem csak 10—10 különböző eredményes dodekaéder-játékot ad. Vagyis az első két dugó elhelyezése után 20 különböző módon folytatható a dodekaéder-játék eredményesen. Ha csak a p pontot rögzítjük, az ehhez illeszkedő három él mindegyikét választhatjuk kezdőélnek, és bármelyikükön indulva 20 eredményes folytatást kapunk; ez összesen 60 lehetőség.

Hamilton-féle bejárás vizsgálatában szorítkozhatunk egyszerű gráfokra, hiszen ha egy gráfnak nincs Hamilton-útja, éleit többszörös élekké duzzasztva sem lesz, hurokél pedig Hamilton-útban nem szerepelhet, Hamilton-körben is csak akkor, ha a gráfnak csupán egyetlen pontja van.

Feladatok

8. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $k>1$-re egy társaság minden tagja ismeri a társaságnak legalább k tagját, akkor leültethető közülük legalább $k+1$ egyetlen kerek asztal körül úgy, hogy mindenkinek ismerőse legyen a két szomszédja. Az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük fel.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha az előbbi feladatban $k=3$ és a társaság hattagú, akkor valamennyien leültethetők egyetlen kerek asztal körül a fenti módon.

10. Legyen $n>3$. Bebizonyítandó, hogy ha egy n-pontú egyszerű gráfban bármely

$\frac{n-1}{2}$-nél kisebb pozitív egész k esetén a k-nál nem nagyobb fokú pontok száma kisebb, mint k, akkor a gráf összefüggő.

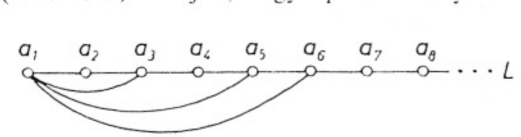
11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráf K köréből egy élt törölve, a gráf egy leghosszabb útját kapjuk, akkor K Hamilton-köre a gráfnak.

12. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-pontú egyszerű gráf egy leghosszabb útja két végpontjának fokszámösszege legalább n, akkor van a gráf leghosszabb útjai között olyan, amelynek végpontjai szomszédosak.

A 8. feladatot úgy oldjuk meg, hogy a társasághoz a szokásos módon ismeretségeket gráfélekkel fejezve ki — rendelünk gráfot, és megmutatjuk, hogy van e gráfban egy legalább $k+1$ hosszúságú kör; ugyanis egy ilyen kör pontjainak megfelelő tagokat a kör bejárásának sorrendjében ültetve, kívánt elrendezést hozunk létre. Tehát bebizonyítjuk a következőt:

13. *Ha egy egyszerű gráf minden pontjának foka legalább k $(k>1)$, akkor van a gráfban egy legalább $k+1$ hosszúságú kör.*

Alkalmazzuk az 1. fejezetben említett leghosszabb út módszerét, vagyis legyen L egy leghosszabb út egy olyan gráfban, amelyben minden pont foka legalább k. Menjünk végig L mentén, és jelöljük pontjait az érintési sorrendben így: $a_1, a_2, \ldots$ (111. ábra). Tudjuk, hogy a_1 valamennyi szomszédja L-be tartozik. De a_1-nek legalább k szomszédja van, és így van közöttük olyan a_j is, amelyre $j \geqq k+1$. Ekkor L-nek az a_1 és a_j végpontú részútja, valamint az $\{a_1, a_j\}$ él együttvéve k-nál hosszabb kör létezését biztosítja gráfunkban.



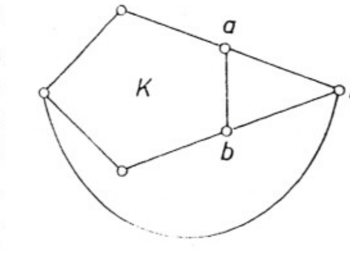
111. ábra

A feltétel hosszabb kört még az összefüggő gráfok körében sem biztosít; példa erre olyan gráf, amelyet teljes $k+1$-gráfokból úgy nyerünk, hogy egy-egy pontjukat egyetlen ponttá forrasztjuk össze. Így fogható fel a 88. ábra is két teljes gráfból létrehozottnak a $k=3$ esetben.

A 9. feladat a következő állítás bizonyítását követeli: Ha egy 6-pontú egyszerű G gráf minden pontjának foka legalább 3, akkor van G-nek Hamilton-köre.

Állításunk indirekt bizonyításához tegyük fel, hogy nincs G-nek Hamilton-köre. Ekkor a 13. állítás szerint van G-ben olyan K kör, amelynek hossza 4 vagy 5. Először tegyük fel, hogy K hossza 5. Ekkor G-nek a K-ba nem tartozó p pontja K-nak legalább 3 pontjával szomszédos. Ebből következik, hogy van K-nak olyan $\{a, b\}$ éle, hogy a is, b is szomszédja p-nek (112. ábra). Mármost az $\{a, b\}$ élt az $\{a, p\}$ és $\{p, b\}$ élekkel kicserélve, K gráfunk Hamilton körévé bővíthető, feltevésünkkel ellentétben. Most tegyük fel, hogy K hossza 4. Legyen G K-ba nem tartozó két pontja p és q. Egyiküknek sem lehet 2-nél több K-beli szomszédja, mert különben az előbbi módon K 5 hosszúságú körré volna bővíthető. Minthogy p foka is, q foka is legalább 3,

e két pont szomszédos, továbbá van K-ban két pont — mondjuk a és b — úgy, hogy p szomszédja a-nak, q pedig b-nek. Mármost K-nak az a és b végpontú egyik részútja nem hosszabb 2-nél. Ezt az $\{a, p\}$, $\{p, q\}$ és $\{q, b\}$ élekkel kicserélve, K-ból G egy Hamilton-körét nyerjük, és így ismét ellentmondásba kerülünk feltevésünkkel. Ezzel megoldottuk a 9. feladatot.

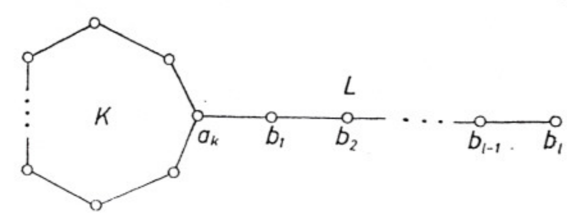


112. ábra

Most bizonyított állításunk akkor is helyes marad, ha abban 6 helyett n-et és 3 helyett $\frac{n}{2}$-t mondunk. Ezt monja ki a következő állítás, amelyet bizonyítani fogunk:

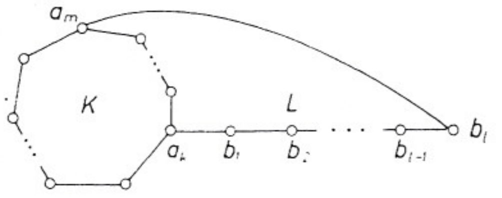
14. *Ha egy n-pontú egyszerű gráf minden pontjának foka legalább $\frac{n}{2}$ $(n \geqq 3)$, akkor van a gráfnak Hamilton-köre.*

A bizonyításhoz tegyük fel, hogy az n-pontú egyszerű G gráfra teljesülnek az állítás feltételei. Alkalmazzuk G köreire vonatkozóan a 3. fejezetben említett maximálisból indulás módszerét. Jelöljük K-val G egy leghosszabb körét, és k-val K hosszát. A 13. állítás szerint $k \geqq \frac{n}{2}+1$. Megmutatjuk, hogy K G-nek egy Hamilton-köre. Tegyük fel ugyanis az ellenkezőt, vagyis azt, hogy $k<n$. Az 1. fejezet 21. állítása szerint G összefüggő, a 25. állításból pedig következik, hogy van G-ben olyan út, amelynek egyik végpontja K-ba tartozik, de egyetlen más pontja sem; legyen az l hosszúságú L út az ilyen tulajdonságú utak közül egy leghosszabb; jelöljük pontjait a 113. ábra szerint. Abból, hogy $k \geqq \frac{n}{2}+1$, következik, hogy $l<\frac{n}{2}$.



113. ábra

Az L út b_l végpontjának csak L-be vagy K-ba tartozó szomszédja lehet, mert különben L nem lehetne maximális. Minthogy L-ben legfeljebb l szomszédja lehet, és $\varphi(b_l) \geqq \frac{n}{2}$, b_l-nek legalább $\frac{n}{2}-l$ — és így legalább egy — szomszédja a_k-tól különböző K-beli pont; a 114. ábrán a_m jelöl egy ilyet. A K kör a_k és a_m végpontú két részútja közül legalább az egyik $\frac{k}{2}$-nél nem kisebb hosszúságú. Egy ilyen út, L és



114. ábra

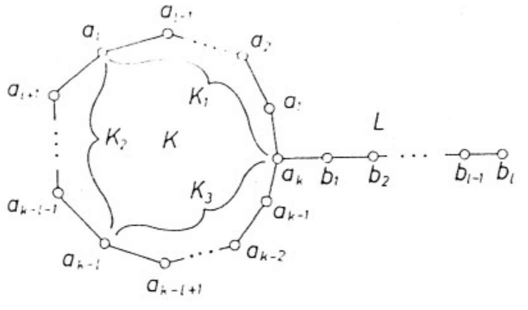
a $\{b_l, a_m\}$ él együttvéve G-nek egy legalább $\frac{k}{2}+l+1$ hosszúságú köre. Minthogy K maximális,

$$k \geqq \frac{k}{2}+l+1,$$

ebből pedig 2-vel szorozva és átrendezve,

$$k-l \geqq l+2, \quad \text{azaz} \quad k-l > l+1$$

adódik. Ennélfogva K pontjait a 115. ábra szerint jelölhetjük, ahol az a_l, a_{k-l}, és



115. ábra

a_k pontok a K kört három olyan útra bontják, amelyek közül bármely kettőnek sincs közös éle: az a_k és a_l végpontú K_1-re, az a_l és a_{k-l} végpontú K_2-re s az a_{k-l} és a_k végpontú K_3-ra. Egy $e = \{a_i, b_l\}$ élnek az a_i végpontja nem lehet az $a_1, a_2, \ldots, a_l$ pontok egyike sem, mert különben K_1-nek az a_k és a_i végpontú részútját az L-ből és e-ből álló úttal kicserélve, K-t k-nál hosszabb körré bővíthetnők; hiszen az említett részút hossza nem nagyobb l-nél, L és e együttvéve pedig $l+1$ hosszúságú. E bővítéssel azonban ellentmondásba jutnánk K maximális tulajdonságával. Hasonlóan látható be, hogy a_i nem lehet K_3 egyik pontja sem. Ha a_j és a_{j+1} K_2-nek belső pontja, akkor b_l nem lehet mindkettővel szomszédos, mert ellenkező esetben az $\{a_j, a_{j+1}\}$ élt az e szomszédosságokat kifejező két éllel kicserélve, K-t $k+1$ hosszúságú körré bővíthetnők. Tehát b_l-nek a fentebb említett legalább $\frac{n}{2}-l$ számú szomszédja csak K_2 belső pontjai közül kerülhet ki, de közülük bármely kettő sem lehet szomszédos K_2-ben. Ezért a $k-2l$ hosszúságú K_2-n nem helyezkedhet el b_l-nek $\frac{k-2l}{2}$-nél több szomszédja, és így

$$\frac{n}{2}-l \leqq \frac{k-2l}{2}.$$

Ebből átrendezéssel

$$n \leqq k$$

adódik, ez viszont ellentmond a $k<n$ feltevésünknek. Tehát a K kör G egy Hamilton-köre, és ezzel bizonyítottuk a 14. állítást.

A 10. feladat állításának bizonyításához tegyük fel, hogy az n-pontú egyszerű G gráf teljesíti a feladatban kiszabott feltételeket. Ha G egy komponense m-pontú, akkor e komponens minden pontjának foka $\leqq m-1$; vagyis $m-1$-nél több $m-1$-nél nem nagyobb fokú pont van G-ben. Ennélfogva a feltételek szerint $m-1 \geqq \frac{n-1}{2}$, azaz $m \geqq \frac{n+1}{2}$, és így $m > \frac{n}{2}$. Ez pedig azt jelenti, hogy G bármely komponensének $\frac{n}{2}$-nél több pontja van, és így G csupán egyetlen komponensből állhat, azaz összefüggő.

A 11. feladat megoldásához tegyük fel, hogy az összefüggő G gráf egy K köréből egy élt törölve, G egy l hosszúságú leghosszabb útját kapjuk. Ha K nem tartalmazza G minden pontját, akkor az 1. fejezet 25. állítása szerint van G-nek olyan $e = \{p, q\}$ éle, hogy p K-beli, q azonban nem. Mármost ha K élei közül elhagyunk egy p-hez illeszkedőt és hozzávesszük e-t, akkor egy $l+1$ hosszúságú út éleit kapjuk, ellentétben azzal, hogy nincs G-ben l-nél hosszabb út. Tehát K G-nek egy Hamilton-köre. Ezzel megoldottuk a 11. feladatot.

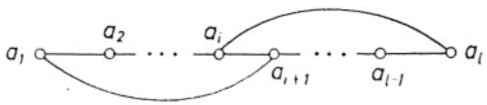
A 12. feladat megoldásához jelöljük az n-pontú egyszerű G gráf egy leghosszabb útját L-lel. Menjünk végig L mentén, és jelöljük pontjait az érintési sorrendben így:

$$a_1, a_2, \ldots, a_l.$$

Ekkor a_1-nek és a_l-nek minden szomszédja L-be tartozik. Tegyük fel, hogy

$$\varphi(a_1)+\varphi(a_l) \geqq n, \qquad \text{azaz} \qquad \varphi(a_l) \geqq n-\varphi(a_1).$$

Eszerint a_l G-nek legfeljebb $\varphi(a_1)$ számú pontjával nem szomszédos (maga a_l mindenesetre ezek közt van). A fenti sorozatban a_1-nek $\varphi(a_1)$ számú szomszédját ugyanennyi pont előzi meg (ezek közt persze a_l nem szerepelhet). Ennélfogva ezek között kell lennie olyan a_i-nek, amellyel a_l szomszédos (116. ábra). Mármost ha L élei közül elhagyjuk $\{a_i, a_{i+1}\}$-et és hozzávesszük $\{a_1, a_{i+1}\}$-et, akkor G olyan l hosszúságú — vagyis leghosszabb — útját nyerjük, amelynek végpontjai szomszédosak. Ezzel megoldottuk a 12. feladatot.



116. ábra

A 11. és 12. feladat felhasználásával a 14. állítás egy új bizonyítását a következőképpen kapjuk: Ha az n-pontú egyszerű G gráf eleget tesz a 14. állítás feltételeinek, akkor G bármely két pontjának fokösszege legalább n. Ennélfogva a 12. feladat szerint van G-nek olyan leghosszabb útja, amelynek végpontjai szomszédosak. Tehát van G-ben olyan K kör, amelyből egy élt törölve, G egy leghosszabb útját kapjuk. Minthogy az 1. fejezet 21. állítása G összefüggő voltát biztosítja, K a 11. feladat állítása szerint G egy Hamilton-köre.

Megjegyezzük, hogy ha egy n-pontú egyszerű gráf minden pontjának foka legalább $\frac{n-1}{2}$, ettől még nincs szükségképpen Hamilton-köre. Példa erre minden olyan gráf, amelyet két teljes $k+1$-gráfból egy-egy pontjuk összeforrasztása révén nyerünk ($k=3$-ra a 88. ábra). E megjegyzés és a 14. állítás alapján azt is mondhatjuk, hogy ha egy egyszerű gráfban minden pont foka „elég nagy", akkor van a gráfnak Hamilton-köre. Most azt mutatjuk meg, hogy Hamilton-kör létezése már akkor is biztosított, ha a gráfban „elég sok" pont foka elég nagy. Pontosabban a következő állítást fogjuk bebizonyítani:

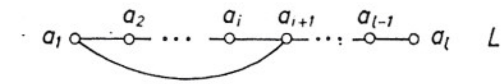
15. *Legyen n 2-nél nagyobb páros szám. Ha egy n-pontú egyszerű gráfban bármely $\frac{n-1}{2}$-nél kisebb pozitív egész k esetén a k-nál nem nagyobb fokú pontok száma kisebb, mint k, akkor van a gráfnak Hamilton-köre.*

Megmutatjuk, hogy ha L az állítás feltételeinek eleget tevő n-pontú egyszerű G gráfnak olyan leghosszabb útja, amelyen a végpontok fokösszege maximális, akkor e fokösszeg legalább n.

Menjünk végig L mentén, és jelöljük pontjait az érintési sorrendben így:

$$a_1, a_2, \ldots, a_l.$$

Ahogyan már a 12. feladat megoldásában átgondoltuk, a_1 szomszédainak — amelyek mind L-be tartoznak — $\varphi(a_1)$ számú előzője szerepel ebben a sorozatban; legyen a_i egy tetszés szerinti ezek közül (117. ábra). Ha most elhagyjuk L-ből az $\{a_i, a_{i+1}\}$ élt, és hozzávesszük $\{a_1, a_{i+1}\}$-et, akkor G egy l — vagyis maximális — hosszúságú



117. ábra

útját kapjuk; ennek végpontjai: a_i és a_l. Minthogy L végpontjainak fokösszege maximális,

$$\varphi(a_i) \leqq \varphi(a_1).$$

Így G-nek $\varphi(a_1)$ számú pontjáról láthatjuk be, hogy foka nem nagyobb $\varphi(a_1)$-nél; ezért az állításunkban szereplő feltétel miatt szükségképpen

$$\varphi(a_1) \geqq \frac{n-1}{2},$$

és itt n páros volta miatt az egyenlőség nem állhat fenn, tehát

$$\varphi(a_1) > \frac{n-1}{2}.$$

Hasonlóan kapjuk, L másik végpontjára végezve el okoskodásunkat, hogy

$$\varphi(a_l) > \frac{n-1}{2},$$

tehát

$$\varphi(a_1) + \varphi(a_l) > n-1;$$

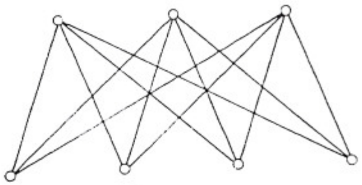
vagyis L végpontjainak fokösszege valóban legalább n.

Ezért a 12. feladat szerint van G-nek olyan köre, amelyből egy élt törölve, G egy maximális hosszúságú útját kapjuk; és minthogy G-re teljesülnek a 10. feladat állításának feltételei, ami maga után vonja G összefüggő voltát, a 11. feladat szerint G-nek van Hamilton-köre. Ezzel bebizonyítottuk a 15. állítást.

A 15. állításban n párosságának kikötése elejthető, ha a feltételt azzal egészítjük ki, hogy páratlan n esetén az $\frac{n-1}{2}$-nél nem nagyobb fokú pontok száma nem nagyobb $\frac{n-1}{2}$-nél. A 15. állításból e kiegészítéssel nyert állítás a fenti bizonyítás némi módosításával igazolható; ezt azonban az olvasóra bízzuk.

Ha egy gráfra teljesülnek a 14. állítás feltételei, akkor teljesülnek a 15. állítás fent említett kiegészítettjének feltételei is, tehát a 14. állítás az utóbbinak következménye.

Ha a 15. állítás feltételeiben bármennyivel is kevesebbet követelünk, már nincs biztosítva Hamilton-kör létezése. Először is legyen $1 \leqq k < \frac{n-1}{2}$, és forrasszuk össze egy teljes $k+1$-gráf és egy teljes $n-k$-gráf egy-egy pontját (az utóbbi gráf pontjainak foka nagyobb k-nál, hiszen $n-k-1 \leqq k$-ból $k \geqq \frac{n-1}{2}$ adódnék). Ekkor olyan gráf jön létre, amelyben a k-adfokú pontok száma k; így gráfunk éppen hogy nem teljesíti a 15. állítás feltételeit, de — forrasztási helye artikuláció lévén, a 3. feladat megoldását követő megjegyzés szerint — nincs is Hamilton-köre. Páratlan n esetén vegyük szemügyre azt az egyszerű gráfot, amelynek pontjai így oszthatók két csoportba: az egyikben $\frac{n-1}{2}$, a másikban pedig $\frac{n+1}{2}$ számú pont van: az ugyanabba a csoportba tartozó pontpárok nem szomszédosak, a különbözőkbe tartozók viszont mind szomszédosak ($n=7$-re a 118. ábra). E gráf $\frac{n+1}{2}$, azaz $\frac{n-1}{2}$-nél éppen eggyel több pontjának foka $\frac{n-1}{2}$, és a 3. feladat szerint nincs is benne Hamilton-kör (töröljük a kevesebb pontot tartalmazó csoportot).



118. ábra

Az alábbi állítás Hamilton-út létezését biztosító olyan jellegű feltételt tartalmaz, mint 15. állításunk; bizonyításába nem bocsátkozunk, ugyanis megfelelő módosításokkal alkalmazható a 15-öt bizonyító gondolatmenet.

16. *Legyen $n>2$. Ha egy n-pontú egyszerű gráfban bármely $\frac{n-1}{2}$-nél kisebb pozitív egész k esetén a k-nál nem nagyobb fokú pontok száma legfeljebb k, akkor van a gráfnak Hamilton-útja.*

Hamilton-utat nem tartalmazó olyan gráfokat, amelyek éppen hogy nem teljesítik a 16. állítás feltételeit, a következőképpen nyerhetünk: Forrasszuk eggyé egy teljes $k+1$-gráf, egy teljes $k+2$-gráf és egy teljes 2-gráf egy-egy pontját ($k=2$-re a 90. ábra), mert az így nyert n-pontú gráfra $\frac{n-1}{2}=k+1$, és a legfeljebb k-adfokú pontok száma éppen 1-gyel több k-nál.

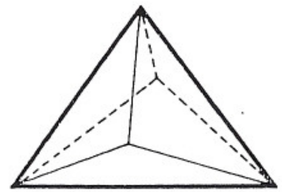
Említettük, hogy ismeretes néhány elégséges feltétel, amelyet kielégítő gráfoknak van Hamilton-körük, ill. Hamilton-útjuk. Az eddig említettek hasonlóak voltak, amennyiben mindegyikük elég sok gráfpontra rótt ki elegendő nagy fokszámot. Megemlítünk még egy más jellegű elégséges feltételt is. Sokszöglapok határolta test, ún. poliéder élhálózata gráfot ad, ha a poliéder csúcsait, ill. éleit gráfpontoknak, ill. gráféleknek tekintjük. Mármost egy gráfnak van Hamilton-köre, ha olyan P poliéder élhálózatával izomorf, amely rendelkezik az alábbi 3 tulajdonsággal:

(1) P minden lapja háromszög.

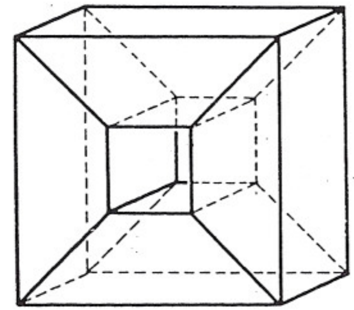
(2) A P élhálózata alkotta gráfban minden háromszög P valamely lapjának határvonalából adódik. (A 119. ábrán látható poliéder két tetraéderből egy-egy

lapjuknak egymásra illesztésével nyerhető. E poliédernek nincs olyan lapja, amelynek határvonala a 3 vastagon rajzolt él volna.)

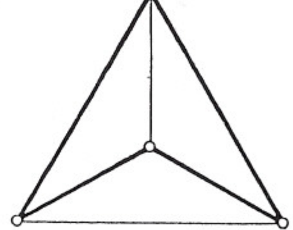
(3) P felülete — ezt tökéletesen nyújtható gumihártyából képzelve el — gömbbé fújható fel. (A 120. ábrán látható képkeretszerű poliéder felülete nem fújható fel gömbbé.)



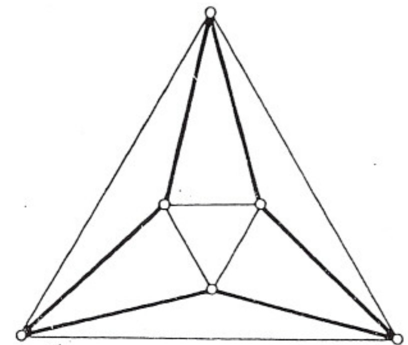
119. ábra



120. ábra



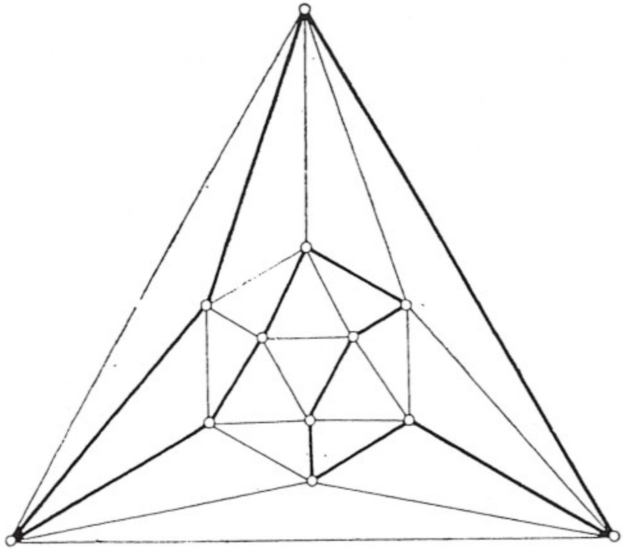
121. ábra



122. ábra

Annak bizonyítása, hogy a felsorolt tulajdonságoknak eleget tevő gráfoknak van Hamilton-körük, meglehetősen bonyolult; ezért nem tárgyaljuk. A szabályos testek közül a tetraéder, az oktaéder és az ikozaéder tesz eleget a felsorolt tulajdonságoknak; ezeknek egy-egy Hamilton-körét a 121., a 122. és a 123. ábra vastagon rajzolt élei jelölik ki.

Irányított gráf *irányított Hamilton-kör*én, ill. *irányított Hamilton-út*ján a gráf olyan irányított körét, ill. útját értjük, amely a gráf valamennyi pontját tartalmazza. Ha egy irányított gráf nem tartalmaz hurokélt, továbbá nem tartalmaz két olyan élt, amelyeknek ugyanaz a kezdőpontjuk és ugyanaz a végpontjuk, akkor az irányított gráfot *egyszerű*nek nevezzük. Egyszerű irányított gráf azonban tartalmazhat 2 hosszúságú irányított kört, azaz két olyan élt, hogy mindegyikük kezdőpontja azonos a másikuk végpontjával.



123. ábra

Feladat

17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy körmérkőzés során mindenki mindenkivel egyszer mérkőzött, és egyetlen mérkőzésnek sem volt döntetlen az eredménye, akkor a versenyzők sorba rendezhetők úgy, hogy mindenki legyőzte a következőt.

A feladat megoldásához jelöljük a versenyzőket egy-egy gráfponttal, és minden mérkőzésnek feleltessünk meg egy irányított élt, amelynek a kezdőpontja a győztest, végpontja pedig a vesztest jelölő pont. A feladat annak bizonyítását követeli, hogy az így nyert irányított gráfban van irányított Hamilton-út, ugyanis ennek irányítást követő bejárásában a pontokat a kívánt sorrendnek megfelelően érintjük. A következő állítás bizonyítása tehát a 17. feladat megoldását jelenti:

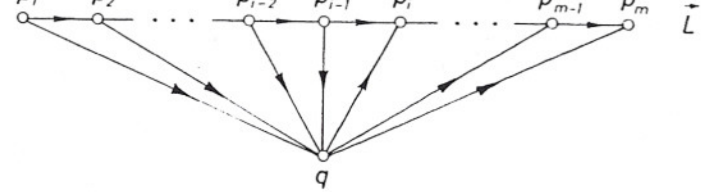
18. *Egy legalább 2-pontú teljes gráf bármilyen irányítása révén nyert irányított gráfnak van irányított Hamilton-útja.*

Az állítás bizonyításához jelöljük $\vec{L}$-lel a teljes n-gráf ($n \geq 2$) egy tetszőleges irányítása révén nyert irányított $\vec{G}$ gráf egy maximális hosszú irányított útját. Ennek bejárása során jelöljük a pontokat érintésük sorrendjében így:

$$p_1, p_2, \ldots, p_m.$$

Tegyük fel, hogy $m < n$, azaz van $\vec{G}$-nek egy, a felsoroltaktól különböző q pontja. Az $\vec{L}$ út maximális tulajdonsága miatt nem létezhet sem a (q, p_1) sem a (p_m, q) irányított él $\vec{G}$-ben. Tehát (p_1, q) is és (q, p_m) is éle $\vec{G}$-nek. Ebből következik, hogy van olyan legkisebb i, hogy (q, p_i) $\vec{G}$-nek éle. Ekkor azonban (p_{i-1}, q) is éle $\vec{G}$-nek

(124. ábra). Ha most $\vec{L}$-nek a (p_{i-1}, p_i) élét (p_{i-1}, q)-val és (q, p_i)-vel pótoljuk, hosszabb irányított utat kapunk, mint $\vec{L}$, ez azonban lehetetlen. Tehát $\vec{G}$-nek bármely maximális hosszú irányított útja Hamilton-út $\vec{G}$-ben. Ezzel bizonyítottuk a 18. állítást.



124. ábra

Egy egyszerű irányított gráfot *szimmetrikus*nak nevezünk, ha bármely (a, b) élével együtt (b, a) is éle. Ha egy egyszerű G_0 gráfot tetszőlegesen irányítunk, majd ebben minden (a, b) élhez a (b, a) élt is berajzoljuk, egy szimmetrikus egyszerű irányított $\vec{G}$ gráfot kapunk. Világos, hogy ha G_0-nak van Hamilton-köre, akkor $\vec{G}$-nek van irányított Hamilton-köre, és fordítva, ha $\vec{G}$-nek van irányított Hamilton-köre, akkor G_0-nak van Hamilton-köre; továbbá ha G_0-ban a p pont foka k, akkor $\vec{G}$-ben $\varphi_{ki}(p) = \varphi_{be}(p) = k$, és ennek megfordítása is igaz. Ennélfogva kimondhatjuk a 14. állítással egyenértékű következő állítást:

19. *Ha egy n-pontú szimmetrikus egyszerű irányított gráf minden pontjának be-foka is, ki-foka is legalább $\frac{n}{2}$, akkor van a gráfnak irányított Hamilton-köre.*

Ez az állítás érvényben marad akkor is, ha a szimmetrikus szót elhagyjuk, azaz fennáll a következő:

20. *Ha egy n-pontú egyszerű irányított gráf minden pontjának be-foka is, ki-foka is legalább $\frac{n}{2}$, akkor van a gráfnak irányított Hamilton-köre.*

A 20. állításnak — amelynek bizonyítása eléggé hosszadalmas, és ezért elhagyjuk — általánosítása a következő állítás, amelyet szintén bizonyítás nélkül említünk:

21. *Ha egy n-pontú egyszerű irányított erősen összefüggő gráf minden pontja ki-fokának és be-fokának összege legalább n, akkor van a gráfnak irányított Hamilton-köre.*

Ehhez még kell jegyezzük, hogy ha egy irányított gráfnak van irányított Hamilton-köre, akkor egy ilyen köre mentén haladva, bármely pontból bármely pontba eljuthatunk irányított utat követve; vagyis a gráf erősen összefüggő. Fordítva, pusztán abból, hogy a gráf erősen összefüggő, nem következik, hogy van irányított Hamilton-köre. Példa erre olyan gráf, amelyet két irányított körből egy-egy pontjuk összeforrasztása révén nyerünk.

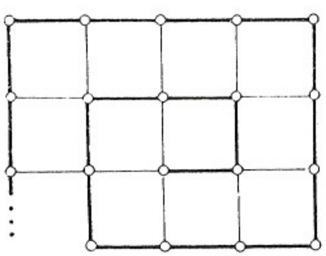
Jelöljünk most $\vec{G}$-vel egy olyan n-pontú egyszerű irányított gráfot, amelyben minden pont be-fokának és ki-fokának összege legalább $n-1$, továbbá jelöljük

$\vec{G}$ pontjait így: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Vegyünk $\vec{G}$-hez egy új q pontot, és rajzoljuk meg minden i-re a következő éleket: $(p_i, q), (q, p_i)$. A $\vec{G}$-ből így létrehozott $n+1$-pontú egyszerű irányított $\vec{G}'$ gráf teljesíti a 21. állítás feltételeit (n helyett $n+1$-et véve), tehát van $\vec{G}'$-nek irányított Hamilton-köre. De $\vec{G}'$ minden irányított Hamilton-körének $\vec{G}$-be eső része $\vec{G}$-nek egy irányított Hamilton-útja. Ennélfogva kimondhatjuk a 21. állítás alábbi következményét:

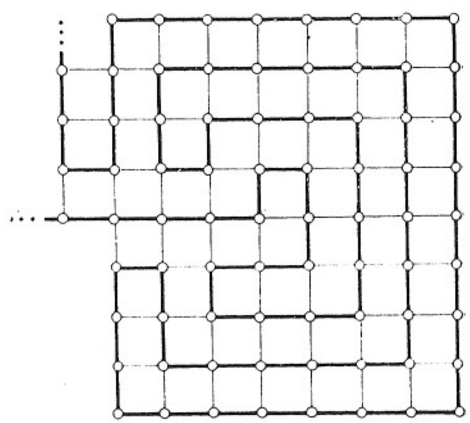
22. *Ha egy n-pontú ($n \geqq 2$) egyszerű irányított gráf minden pontja be-fokának és ki-fokának összege legalább $n-1$, akkor van a gráfnak irányított Hamilton-útja.*

Ha most egy teljes n-gráfot ($n \geqq 2$) tetszőlegesen irányítunk, akkor olyan egyszerű irányított gráfot nyerünk, amelyben minden pont be-fokának és ki-fokának összege $n-1$, tehát a 22. állítás szerint irányított gráfunknak van irányított Hamilton-útja. Ennélfogva a 18. állítás a 22-nek speciális esete.

Az elmondottak mutatják, hogy a 22. állítás érdekes módon teremt kapcsolatot a 14. és a 18. állítás között.



125. ábra



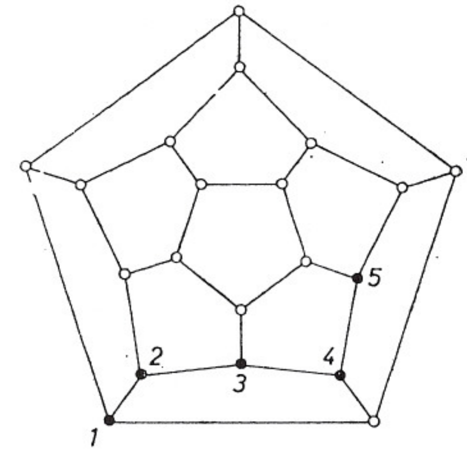
126. ábra

A végtelen gráfok közül csupán a sík koordinátahálózatával előállított gráfot (a végtelen nagy kockás füzetlapot) említjük, amelyben van — a Hamilton-út, ill. -kör fogalmát végtelen gráfokra kiterjesztve — „egy, ill. két irányban végtelen Hamilton-út". Egy-egy ilyennek képzeletben kiegészíthető részét szemléltetjük a 125., ill. a 126. ábra vastagon kihúzott éleivel.

*

Gyakorlatok

23. Dodekaéder-játékban az első 5 dugót a 127. ábrán látható módon helyeztük el a számok növekvő sorrendjében. Folytassuk a játékot eredményesen.



127. ábra

24. Járjuk be a 36 mezőből álló sakktáblát egyetlen lóval lóugrásokban. Érintsünk minden mezőt pontosan egyszer, és az utoljára érintett mező legyen lóugrásnyira attól, amelyről indultunk.

25. Rajzoljunk olyan 6-pontú és 11-élű egyszerű gráfot, amelynek nincs Hamilton-köre.

26. Irányítsunk egy teljes 5-gráfot úgy, hogy ne jöjjön létre irányított Hamilton-kör.

Feladatok

27. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan szám, akkor az n^2 mezőből álló sakktábla nem járható be a 24. gyakorlatban leírt módon.

28. Illesszünk egy oktaéder minden lapjára egy-egy, a lapokat pontosan fedő tetraédert. Bizonyítsuk be, hogy az így létrejött poliéder élhálózata alkotta gráfnak nincs sem Hamilton-köre sem Hamilton-útja.

29. Hány Hamilton-köre van a tetraéder, ill. a hexaéder (kocka) élei alkotta gráfnak?

30. Hány különböző módon folytatható a dodekaéder-játék eredményesen az első 3, 4, ill. 5 dugó elhelyezése után?

31. Lehet-e az ikozaéder papírból elkészített felületét ollóval két részre vágni úgy, hogy minden lapját két részre szeljük, és közben csúcsponton át nem vezetjük az ollót?

32. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű összefüggő gráf minden pontjának foka legalább k ($k \geq 1$), és a gráf pontjainak száma legfeljebb $2k$, akkor nincs a gráfnak elvágó pontja. (Az elvágó pont meghatározása a 3. feladat megoldása után található.)

33. Igazoljuk, hogy a 128. ábrán látható gráfnak nincs Hamilton-köre.

34. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-pontú ($n \geqq 3$) egyszerű gráf bármely két nem szomszédos pontjának fokszámösszege legalább n, akkor van a gráfnak Hamilton-köre.