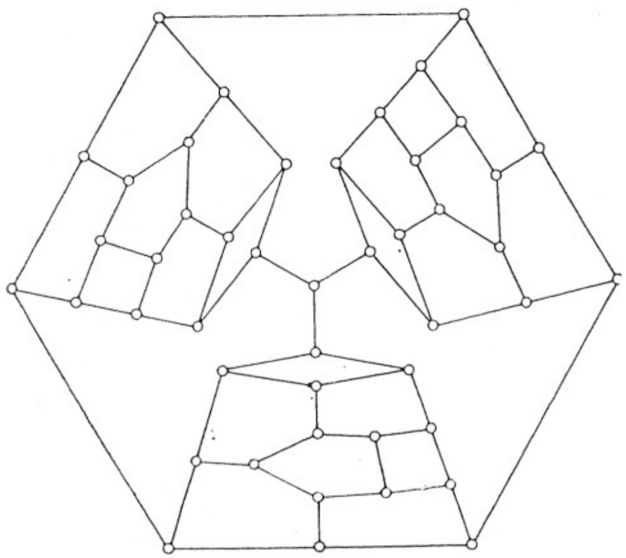


128. ábra

35. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-pontú egyszerű gráfnak legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ éle van, akkor van a gráfnak Hamilton-köre.

36. Mutassuk meg, hogy egy legalább 2-pontú teljes gráfból egyetlen élének törlése révén nyert gráfot lehet úgy irányítani, hogy ne legyen irányított Hamilton-útja.

37. A $\vec{G}$ gráfot egy legalább 2-pontú teljes gráfból irányítása révén nyertünk. Ha van $\vec{G}$-nek irányított Hamilton-köre, akkor $\vec{G}$ nyilván erősen összefüggő. Bizonyítsuk be ennek megfordítását: Ha $\vec{G}$ erősen összefüggő, akkor van irányított Hamilton-köre.

38. A 26. feladat megoldásában átgondoltak szerint, ha egy irányított $\vec{G}$ gráfnak van irányított Hamilton-köre, akkor bármilyen módon is osztjuk $\vec{G}$ pontjait két A és B részre, van $\vec{G}$-nek olyan éle, amelynek kezdőpontja A-ban, végpontja pedig B-ben van, és van olyan éle is, amelynek kezdőpontja B-ben, végpontja pedig A-ban van. Az előbbi feladatban megadott $\vec{G}$ gráf esetén bizonyítsuk be ennek megfordítását: Ha található $\vec{G}$-nek pontjai bármely kettéosztása esetén is két fent említett tulajdonságú éle, akkor van $\vec{G}$-nek irányított Hamilton-köre.

5. PÁROSÍTÁSI PROBLÉMÁK. FAKTOROK

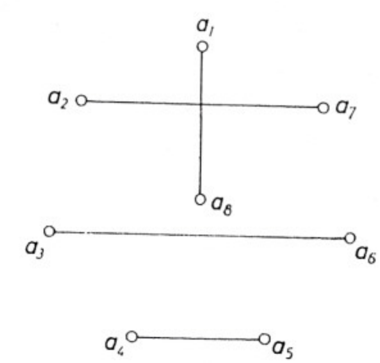
Körmérkőzések szervezése

Bizonyos sportágakban úgy bonyolítanak le bajnokságot, hogy a csapatok (vagy játékosok) körmérkőzést játszanak, azaz minden csapat mindegyikkel egyszer mérkőzik. Pl. a labdarúgó-bajnokság bármely osztályában ilyen egy tavaszi vagy egy őszi idény. Ezen belül több fordulóban mérkőznek a csapatok úgy, hogy egy-egy fordulóban bármelyik csapat legfeljebb egyszer játszik. Általában a következő kérdésekre keresünk választ: Milyen módszerrel lehet az egyes fordulókban egymás ellen mérkőző párokat alkalmasan kijelölni? Lebonyolítható-e mindig n csapat körmérkőzéses bajnoksága $n-1$ fordulóban?

Az utóbbi kérdésre hamar választ adhatunk. Ha ugyanis n csapat körmérkőzése $n-1$ fordulóban lezajlik, akkor minden csapatnak játszania kell minden fordulóban; ez azonban páratlan n esetén lehetetlen. Megmutatjuk, hogy páros n esetén $n-1$ fordulóban, páratlan n esetén pedig n fordulóban mindig lebonyolítható körmérkőzés. Ekkor a fordulók száma nyilvánvalóan minimális. Az utóbbi esetben minden fordulóban lesz egy „pihenő" csapat.

Elegendő a feladatot arra az esetre megoldani, amelyben n páros; ugyanis az erre kapott megoldásból úgy nyerünk megoldást páratlan n-re, hogy páratlan n esetén kijelölünk még egy képzeletbeli csapatot is, és mindig az ezzel mérkőző lesz a pihenő csapat.

A következőkben geometriai ismereteket használunk fel egy gráfelméleti probléma megoldására (a fordítottra is látunk példákat a könyvben).

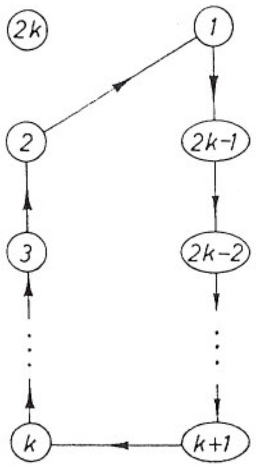


129. ábra

Jelöljük tehát a csapatokat az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jelekkel, és legyen n páros. Jelöljük egy szabályos $n-1$-szög csúcsait is rendre az $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ jelekkel, középpontját pedig a_n-nel. Tekintsük szabályos $n-1$-szögünk egy tükörtengelyét. Minthogy $n-1$ páratlan, ez csak egy oldal felező merőlegese lehet, amely a középponton áthaladva a szemközti csúcsra illeszkedik. Kössük össze a tengelyre nem eső csúcsokat a reá vo-

7 Ismerkedés a gráfelmélettel — 52 446

natkozó tükörképeikkel (így a szóban forgó oldalon kívül a vele párhuzamos átlókat rajzoljuk meg); a tengelyre eső egyetlen csúcsot pedig a sokszög középpontjával kössük össze (azaz töröljük a tengelynek e szakaszán kívül eső részeit). A 129. ábra az $n=8$ esetet szemlélteti. Az első fordulóban egymás ellen játszó párok kijelölésére a megrajzolt szakaszok kínálkoznak, hiszen így minden csapat játszani fog az első fordulóban. Ugyanez lesz a helyzet a többi $n-2$ fordulóban is, ha azoknak mérkőzéseit sokszögünk olyan elforgatásai után jelöljük ki az előbbi módon, amelyek rendre más-más oldalt visznek az előbb tekintett oldal helyébe. Így bármely két csapat sem fog két ízben mérkőzni egymással, mert — ahogyan egyszerű meggondolás mutatja — páratlan oldalszámú szabályos sokszög bármely átlója pontosan egy oldallal párhuzamos.



130. ábra

Az $n=2k$ esetben a fentiek alapján nyert fordulókat a 130. ábra révén úgy is megkaphatjuk, hogy a csapatokat jelölő számokat — a $2k$ kivételével — a nyilak irányában egy-egy hellyel továbbforgatjuk, és minden helyzetben az egy sorba eső párok mérkőznek egymással.

A fentiekben ismertetett szervezési problémát a gráfok nyelvén is megfogalmazhatjuk: Az $n=2k$ számú csapat között lejátszandó mérkőzéseket szemléltessük a G-vel jelölt teljes n-gráffal. Egy fordulót G egy részgráfjával adhatunk meg. Ennek megfelelően keressük a G gráf alábbi követelményeket kielégítő $n-1$ számú részgráfját:

(1) Mindegyik tartalmazza G minden pontját.

(2) Mindegyikben minden pont foka 1.

(3) Bármely kettőnek sincs közös éle.

(4) Együttvéve G valamennyi élét tartalmazzák.

A G gráf első két követelményt kielégítő részgráfját G *elsőfokú faktor*ának nevezzük. Azt, hogy kijelölhetők G-nek mind a 4 követelményt kielégítő részgráfjai, úgy is mondjuk, hogy G *felbontható* (vagy *felbomlik*) *elsőfokú faktorokra*, vagy úgy is mondjuk, hogy G *elsőfokú faktorok szorzata*.

A fentiek alapján kimondhatjuk a következő állítást:

1. *A teljes $2k$-gráf $2k-1$ elsőfokú faktorra bontható fel.*

Az előző fejezetben gráfok Hamilton-köreit kerestük. Egy gráf Hamilton-köre a gráf minden pontját 2-es fokszámmal tartalmazó részgráfja; azt is mondjuk, hogy másodfokú faktora.

Általában, ha a G gráf G' részgráfja G minden pontját tartalmazza, és G' minden pontjának foka ugyanaz a $k \geqq 1$ szám, akkor a G' gráfot G *k-adfokú faktor*ának nevezzük. (Ez esetleg lehet maga G is.) Tehát a gráf összefüggő másodfokú faktorai

azonosak a Hamilton-köreivel (l. az 1. fejezet 36. feladatát). Ha G-nek $G_1, G_2, \ldots, G_m$ rendre k_1-, k_2-, ..., k_m-edfokú faktora, közülük bármely kettőnek sincs közös éle, és együttvéve G minden élét tartalmazzák, akkor azt mondjuk, hogy G *felbontható* (vagy *felbomlik*) a fenti *m számú faktorra*, vagy azt mondjuk, hogy G a fenti *m számú faktor szorzata*.

Az itt szereplő „faktor" és „szorzat" elnevezéseket indokoltnak látjuk, ha megfigyeljük, hogy G minden pontjának foka $= k_1+k_2+\ldots+k_m$, amint a polinómok szorzatának foka is egyenlő a tényezők fokainak összegével. E hasonlóság mögött a gráfelmélet és az algebra mélyebb kapcsolata rejlik.

Egy gráfot *reguláris*nak nevezünk, ha minden pontjának foka ugyanaz. Ha e fokszám k, akkor a gráfot *k-adfokú reguláris gráf*nak nevezzük. Faktorok és szorzataik reguláris gráfok. Ha egy k-adfokú G gráf valamely l-edfokú $(l<k)$ faktorának éleit töröljük, a megmaradó gráf G-nek egy $k-l$-edfokú faktora lesz.

Egy gráf elsőfokú faktorában bármely két élnek sincs közös végpontja. Általában egy gráf bizonyos *éleit független*eknek mondjuk, ha közülük bármely kettőnek sincs közös végpontja, és egyikük sem hurokél. Egy gráf elsőfokú faktorának élei a gráf pontjait kimerítő független élek. Ebből az is következik, hogy csak páros számú pontot tartalmazó gráfnak lehet elsőfokú faktora.

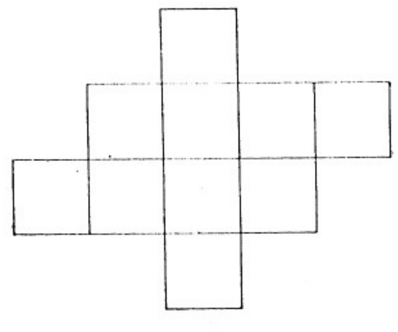
Egy gráf független éleiből álló halmazt a gráf egy *független élhalmaz*ának nevezünk. Egy *gráf független éleinek maximális számá*n olyan független élhalmaza éleinek számát értjük, amelynél több független éle nincs a gráfnak. Ha a G gráf független éleinek maximális száma $fé_{\max}(G)$, és E G-nek egy $fé_{\max}(G)$ számú élből álló független élhalmaza, akkor E-t G egy *maximális független élhalmaz*ának nevezzük. A továbbiakban $fé_{\max}(G)$ helyett rendszerint a rövidebb $fé_{\max}$ jelölést fogjuk alkalmazni, mert nem lesz félreérthető, hogy melyik gráfra vonatkozik. (Hasonló rövidítést fogunk eszközölni más ilyen jellegű jelölések esetén is.)

Gyakorlatok

2. Bontsuk fel a 89. ábrán látható gráfot 3 elsőfokú faktorra.

3. Bontsuk fel az oktaéder élhálózata alkotta gráfot (122. ábra) 2 másodfokú faktorra. Felbontható-e a gráf elsőfokú faktorokra?

4. Kirakható-e a 131. ábra olyan dominólapocskákból, amelyek egyenként az ábrának pontosan két, közös oldalú négyzetét fedik?


131. ábra

7*

Feladatok

5. Gondoljuk át a 3. fejezet 31. feladatának megoldását. A feladat állítását fogalmazzuk át a szóban forgó gráf faktorokra bontására.

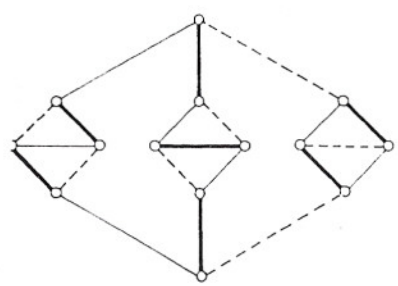
6. Egy sakktáblából eltávolítunk két olyan mezőt, amelyek tükörképei egymásnak a sakktábla középpontjára nézve. Kirakható-e a megmaradt rész olyan dominólapocskákból, amelyek egyenként két, közös oldalú mezőt fednek?

7. Bizonyítsuk be a következőt: Ha egy hurokélt nem tartalmazó gráf irányítható úgy, hogy ne jöjjön létre benne 2 hosszúságú irányított út, akkor a gráf minden köre páros hosszúságú; és fordítva, ha egy gráfnak nincs páratlan hosszúságú köre, akkor irányítható úgy, hogy ne jöjjön létre benne 2 hosszúságú irányított út.

8. Bizonyítsuk be, hogy egy másodfokú reguláris gráf pontosan akkor bomlik 2 elsőfokú faktorra, ha a gráf minden köre páros hosszúságú.

9. Egy folyóiratban kitűzött 8 feladat mindegyikére 2—2 közlésre alkalmas megoldást talál a szerkesztő, és észreveszi, hogy a 16 megoldás 8 megoldótól származik olyan módon, hogy mindegyiküknek 2 megoldása szerepel a kiválasztottak közt. Bizonyítsuk be, hogy a szerkesztő közölhet úgy egy-egy megoldást mindegyik feladatra, hogy minden megoldónak is közölje egy megoldását.

A 132. ábrán a 2. gyakorlat egy végrehajtását láthatjuk; egy-egy faktor éleit vastagon, vékonyan, ill. szaggatottan rajzoltuk. Nyilvánvaló, hogy bármely két elsőfokú faktor szorzata a gráf egy másodfokú faktorát adja. Azonban összefüggő másodfokú faktora, azaz Hamilton-köre nincs a gráfnak, amint azt a 4. fejezet 3. feladatának alkalmazásaként megmutattuk.

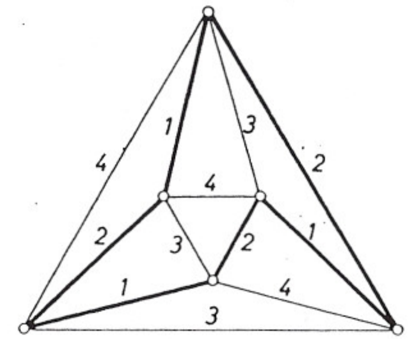


132. ábra

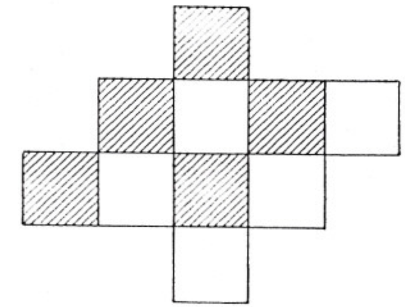
A 3. gyakorlat első részére a 122. ábrával válaszolhatunk: A vastag, ill. vékony élek a gráf egy-egy másodfokú faktorának élei. A vékony vonalakkal rajzolt másodfokú faktor nem bontható fel elsőfokú faktorokra, mert 2, egyenként páratlan számú pontot tartalmazó komponensből áll. Az oktaéder élhálózata alkotta gráf azonban felbontható összefüggő másodfokú faktorokra is, amint azt a 133. ábrán láthatjuk. E másodfokú faktorok most már felbonthatók elsőfokúakra: az ábrán az azonos számokkal jelölt élek a gráf egy-egy elsőfokú faktorának élei.

Próbálgatások nélkül is beláthatjuk, hogy nem lehet a 131. ábrát a 4. gyakorlatban kérdezett módon kirakni. Tekinthetjük ugyanis az ábrát egy sakktábla részletének: a mezőket feketére, ill. fehérre színezetteknek (134. ábra). Ha kirakható volna az ábra dominólapocskákkal, akkor minden lapocska pontosan egy fehér és egy fekete mezőt fedne. Ennélfogva az egy átlóba eső 3 fekete mezőt (és ugyanígy az egy átlóba

eső 3 fehér mezőt is) 3 lapocska fedné. Ez azonban nem lehetséges, hiszen a 3 fekete mezőhöz mindössze 2 fehér (ill. a 3 fehér mezőhöz mindössze 2 fekete) csatlakozik.



133. ábra



134. ábra

Az 5. feladat a következő állításra vonatkozik: Ha G 4-edfokú reguláris gráf, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden ponthoz két piros és két kék élvég illeszkedjen. Világos, hogy gráfunknak mind az a részgráfja, amelynek élei pirosak, mind az, amelynek élei kékek, G-nek másodfokú faktora. Tehát érvényes az alábbi állítás:

10. *Minden negyedfokú reguláris gráf felbomlik 2 másodfokú faktorra.*

Ha a G gráf minden pontjának foka legfeljebb 4, akkor G újabb élek hozzávételével kiegészíthető negyedfokú reguláris gráffá. Ugyanis az 1. fejezet 9. állítása szerint G páratlan fokú pontjainak száma páros. Illeszthetünk tehát két-két páratlan fokú ponthoz egy-egy új élt, majd a 4-nél kisebb fokú pontokhoz hurokéleket úgy, hogy végül negyedfokú reguláris gráfot nyerjünk. Minthogy ez két másodfokú faktorra bomlik, érvényes a 10. állítást is magában foglaló következő állítás:

11. *Ha egy gráf minden pontjának foka legfeljebb 4, akkor szétoszthatók a gráf élei 2 halmazra úgy, hogy ugyanabból a halmazból legfeljebb 2 élvég illeszkedik bármely ponthoz.*

Bebizonyítjuk a 11. állítás következő általánosítását:

12. *Ha egy gráf minden pontjának foka legfeljebb $2k$, akkor szétoszthatók a gráf élei k halmazra úgy, hogy ugyanabból a halmazból legfeljebb 2 élvég illeszkedik bármely ponthoz.*

Bizonyítási módszerünk rögzített k mellett az élek számára vonatkozó teljes indukció.

Ha az élek száma 0, akkor állításunk nyilván igaz; ekkor ugyanis üres mind a k halmaz. Tegyük fel, hogy állításunk helyes az m-élű gráfokra. Megmutatjuk, hogy ekkor helyes az $m+1$-élűekre is. Legyen tehát G egy $m+1$-élű gráf, amelyben minden pont foka legfeljebb $2k$. Töröljük G egy tetszőleges $e = \{a, b\}$ élét. A G-ből így kapott m-élű G' gráfra feltevésünk szerint igaz a 12. állítás: G' élei szétoszthatók a kívánt módon a $H_1, H_2, \ldots, H_k$ halmazokra. Minthogy a törlés révén G'-ben

$$\varphi(a) \leqq 2k-1 \quad \text{és} \quad \varphi(b) \leqq 2k-1.$$

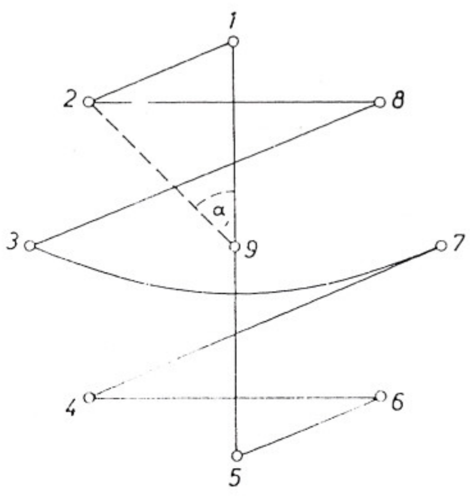
van olyan H_i és H_j halmaz, hogy az előbbiből a-hoz, az utóbbiból pedig b-hez legfeljebb egy élvég illeszkedik. Ha H_i azonos H_j-vel, akkor az e élt ebbe sorolva azt kapjuk, hogy a G gráfra igaz a 12. állítás. Ha H_i és H_j nem azonos, akkor jelöljük H_{ij}-vel azt az élhalmazt, amelynek élei H_i élei és H_j élei együttvéve. Legyen G_0 az a gráf, amelyet G'-ből úgy nyerünk, hogy a pontok meghagyásával töröljük valamennyi H_{ij}-be nem tartozó élét. A G_0 gráfban bármely p pontra

$$\varphi(p) \leqq 4, \quad \text{továbbá} \quad \varphi(a) \leqq 3 \quad \text{és} \quad \varphi(b) \leqq 3.$$

Tehát a G_0 gráfból az e él hozzávételével nyert gráf élei szétoszthatók a 11. állításnak megfelelő H_i' és H_j' halmazokra. Ha most a fentebb felsorolt k számú halmazban H_i-t H_i'-vel, H_j-t pedig H_j'-vel pótoljuk, azt kapjuk, hogy G élei szétoszthatók az így nyert k számú halmazra a 12. állításnak megfelelően. Ezzel bebizonyítottuk állításunkat.

A 12. állításban szereplő G gráf pontosan $2k$-adfokú pontjához a feltételt kielégítő k élhalmaz mindegyikéből pontosan 2 élvégnek kell illeszkednie. Ha pedig e k élhalmaz valamelyikéből G minden pontjához 2 élvég illeszkedik, akkor ez G egy másodfokú faktorának élhalmaza. Így a 12. állításból páros fokú reguláris gráfokra a következő adódik:

13. *Bármely $2k$-adfokú reguláris gráf felbomlik másodfokú faktorokra, ha* $k \geqq 1$.



135. ábra

A teljes $2k+1$-gráf $2k$-adfokú reguláris gráf, és így a 13. állítás szerint felbomlik k számú másodfokú faktorra. Az érdekesség kedvéért jegyezzük meg, hogy e gráf felbontható k számú Hamilton-körre is. Ilyen felbontás ahhoz hasonlóan nyerhető, ahogyan a teljes $2k$-gráfot bontottuk fel elsőfokú faktorokra. A $k=4$ esetben a 135. ábrán szemléltetünk; könnyen látható, hogy általában is hasonlóan járhatunk el: Az 1, 2, …, 8 számokkal jelölt gráfpontok egy szabályos 8-szög csúcsaiban helyezkednek el, a 9-cel jelölt pont pedig a 8-szög középpontjában. Ha az ábrán látható 9 hosszúságú kört a közép-

pont körül ugyanabban az irányban az $\alpha = \frac{360°}{8}$, 2α, 3α és 4α szögekkel elforgatjuk, akkor egyszerű geometriai megfontolások mutatják, hogy az elforgatott körök közül bármely kettőnek sincs közös éle, és így annak a teljes 9-gráfnak kapjuk egy-egy keresett Hamilton-körét, amelynek élei az ábrán látható élek forgatottjai.

A 6. feladat megoldásához a 4. gyakorlatra adott válasz után elegendő csupán annyit észrevenni, hogy a sakktáblából eltávolított 2 mező azonos színű. Minthogy a 64 mező között ugyanannyi fehér mező van, mint fekete, a 2 mező eltávolítása után a fehér mezők száma nem egyezik meg a feketékével. Tehát a kérdéses kirakás nem lehetséges, hiszen minden dominólapocska egy-egy fehér és fekete mezőt ad.

A 7. feladat első részének megoldásához tegyük fel, hogy a hurokélt nem tartalmazó $\vec{G}$ gráfban nincs legalább 2 hosszúságú irányított út. Ekkor $\vec{G}$ bármely pontja a hozzá illeszkedő éleknek vagy csak kezdőpontja vagy csak végpontja lehet. Jelöljük az előbbi gráfpontok halmazát A-val, az utóbbiakét pedig B-vel. A $\vec{G}$ gráfban a G gráf bármely szomszédos pontpárja közül az egyik kezdőpont, a másik pedig végpont. Ennélfogva G-ben csak olyan élek lehetnek, amelyeknek egyik végpontja A-beli, a másik végpontja pedig B-beli. Tehát G bármely körének bejárásában váltakozva fordulnak elő A-beli és B-beli pontok. Ebből következik, hogy G minden körének hossza páros.

A 7. feladat második állításának bizonyításához elegendő azt belátnunk, hogy páratlan hosszúságú kört nem tartalmazó gráf pontjai két csoportba oszthatók úgy, hogy ugyanabba a csoportba tartozó pontpárok nem szomszédosak. Ekkor ugyanis irányíthatjuk a gráfot úgy, hogy az egyik csoportba tartozó pontokat kezdőpontoknak, a másik csoportba tartozókat pedig végpontoknak választjuk. Így nem jöhet létre 2 hosszúságú irányított út.

*Páros gráf*nak nevezzük az olyan G gráfot, amelynek pontjai két csoportba oszthatók úgy, hogy ugyanabba a csoportba tartozó pontpárok nem szomszédosak. Az egyik csoportba tartozó pontok halmazát A-val, a másikba tartozók halmazát B-vel jelölve, beszélünk $G(A, B)$ páros gráfról is. Arra gondolva, hogy a sakktáblán csak különböző színű mezők lehetnek „szomszédosak", azt is fogjuk mondani, hogy az A-beli pontok fehérek, a B-beliek pedig feketék. Előfordulhat, hogy az A és B halmazok egyike üres; ekkor a gráfnak nincs éle.

Tehát a 7. feladat második részéhez elegendő a következőt bizonyítanunk:

14. *Páratlan hosszúságú kört nem tartalmazó gráf páros.*

Megjegyezzük, hogy ha egy gráf páros, akkor minden komponense is páros; és fordítva, ha egy gráf minden komponense páros, akkor a gráf is páros: az egyes komponensek fehér, ill. fekete pontjai választhatók a gráf fehér, ill. fekete pontjainak, még akkor is, ha bármely komponensen belül felcseréljük a színeket.

Ezek után bizonyítjuk a 14. állítást, mégpedig a gráf pontjainak számára vonatkozó teljes indukcióval.

Az állítás nyilván igaz minden 1-pontú gráfra. Tegyük fel, hogy igaz az állítás minden n-pontú gráfra. Megmutatjuk, hogy ekkor igaz minden $n+1$-pontú gráfra is. Legyen tehát G egy $n+1$-pontú gráf, amelyben nincs páratlan hosszúságú kör. Töröljük G egy tetszőlegesen választott p pontját a hozzá illeszkedő élekkel együtt. A G-ből e törlés révén nyert n-pontú G' gráf ugyancsak nem tartalmaz páratlan hosszúságú kört, és így feltevésünk szerint G' páros gráf; osszuk fel a pontjait ennek megfelelő módon fehérekre és feketékre. Belátjuk, hogy p-nek G' ugyanazon K komponensébe eső G-beli szomszédai mind ugyanolyan színűek. Tegyük fel ugyanis, hogy p-nek a G-beli q és r szomszédja K-ba esik, továbbá, hogy q fehér és r fekete. Minthogy K összefüggő, van benne a q és r pontot összekötő L út. Az L út páratlan hosszúságú, hiszen végpontjai különböző színűek, és G' minden szomszédos pontpárja két különböző színű pontból áll. Mármost a $\{p, q\}$ és $\{p, r\}$ éleket L-hez csatolva, G egy páratlan hosszúságú körét kapjuk; ez pedig lehetetlen. Ezek szerint a 14. állítást követő megjegyzésünk alapján a páros G'-ben választhatjuk a két színt úgy, hogy p valamennyi szomszédja fehér legyen. Ehhez a p pontot feketének tekintve, G párosságát kifejező színezést nyerünk. Ezzel bizonyítottuk a 14. állítást.

A 14. állítás a fentiekhez hasonló okoskodással a gráf éleinek számára alkalmazott teljes indukcióval is bizonyítható. Ezt azonban az olvasóra hagyjuk.

A 7. feladat első részének megoldása kapcsán megállapítottuk, hogy páros gráf nem tartalmazhat páratlan hosszúságú kört. Megállapításunkat a 14. állítással egybevetve, a következőt nyerjük:

15. *A páros gráfok azok, amelyek nem tartalmaznak páratlan hosszúságú kört.*

Megjegyzés: A 15. állítás alapján egy gráf páros voltát azonosnak fogjuk tekinteni azzal, hogy nem tartalmaz páratlan hosszúságú kört, vagyis minden köre páros hosszúságú.

A 4. fejezetben különböző méretű „sakktáblákhoz" rendeltünk gráfokat úgy, hogy az élekkel a lehetséges lóugrásokat fejeztük ki. Minthogy bármely két, egymástól lóugrásnyira eső mező különböző színű, az említett gráfok mind páros gráfok, és így páratlan hosszúságú kört egyikük sem tartalmaz. Ebből azonnal adódik az is, hogy páratlan n-re az n^2 számú mezőből álló sakktáblához a fenti módon rendelt gráfnak nincs Hamilton-köre (4. fejezet 27. feladat).

Most oldjuk meg a 8. feladatot. Könnyű belátni, hogy egy másodfokú reguláris G gráf minden komponense kör. (Lényegében ennek bizonyítását kívánja az 1. fejezet 36. feladata is.) Ha G 2 elsőfokú faktor szorzata, akkor e 2 faktor élei bármely kör mentén váltakoznak, és így minden körnek páros hosszúságúnak kell lennie. Ha viszont G minden köre páros hosszúságú, akkor jelöljünk meg minden kör mentén minden második élt. A megjelölt és a meg nem jelölt élek G egy-egy elsőfokú faktorának éleit adják, és G e két faktorra bomlik.

Rendeljünk alkalmas módon gráfot a 9. feladathoz. A feladatoknak a megoldóikkal való kapcsolatát kell kifejeznünk. Vegyünk fel tehát a megoldókat és a feladatokat

jelölő 8—8 gráfpontot. Az előbbiek legyenek fehérek, az utóbbiak pedig feketék. Egy-egy él jelentsen egy-egy megoldást; tehát legyen szomszédos egy fehér és egy fekete pont, ha a fehér pontnak megfelelő megoldó a feketének megfelelő feladatra küldött be közlésre alkalmas megoldást. Az így kapott G gráf másodfokú reguláris páros gráf. A 9. feladat megoldásához azt kell bizonyítanunk, hogy van G-nek elsőfokú faktora; ezt viszont a 8. feladat megoldásával megtettük. Sőt az is látható, hogy a megoldók száma és a feladatok száma tetszőleges lehet, azonban — amint azt bizonyítjuk is — e két számnak egymással szükségképpen meg kell egyeznie.

Jelöljük általában $k \geqq 1$-re a k-adfokú reguláris páros $G(A, B)$ gráf A-beli pontjainak számát m-mel, B-beli pontjainak számát pedig n-nel. Ekkor mind km, mind pedig kn a gráf éleinek számát adja; a $km = kn$ egyenlőségből pedig $m = n$ következik. Tehát bebizonyítottuk a következőt:

16. *Ha a k-adfokú reguláris páros $G(A, B)$ gráfra $k \geqq 1$, akkor az A és B halmazok pontjainak száma megegyezik.*

Be fogjuk bizonyítani a 9. feladat további általánosítását is jelentő alábbi állítást:

17. *Bármely k-adfokú reguláris páros gráfnak van elsőfokú faktora, ha $k \geqq 1$.*

Legyen $k \geqq 1$ és G egy k-adfokú reguláris páros gráf. Duplázzuk meg G éleit. Az így kapott G' gráf $2k$-adfokú reguláris páros gráf. A 13. állítás szerint van G'-nek egy másodfokú F faktora. Az F faktor szintén páros gráf, és így a 8. feladat állítása szerint felbomlik 2 elsőfokú faktorra. Jelöljük e faktorok közül az egyiket F_1-gyel. Ha F_1-nek a G-ben nem szereplő éleit a megfelelő (velük végpontjaikban megegyező) G-beli élekkel pótoljuk, G egy elsőfokú faktorát nyerjük. Ezzel bebizonyítottuk állításunkat.

A 17. állítás alapján a 9. feladat általánosítása így fogalmazható: Egy folyóiratban kitűzött feladatok megoldóinak mindegyike $k \geqq 1$ megoldást küldött be. (Bármely megoldó k számú megoldása között előfordulhatnak ugyanazon feladatnak különböző megoldásai is.) A kitűzött feladatok mindegyikére pontosan k megoldás futott be. Ekkor a szerkesztőnek módjában áll minden feladatra pontosan egy megoldást közölni úgy, hogy minden megoldónak pontosan egy megoldását közölje.

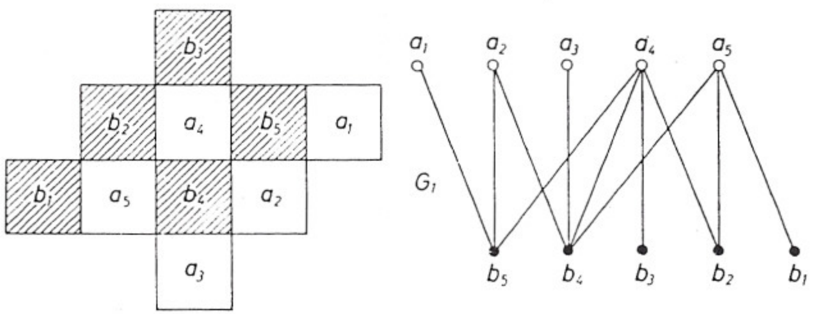
Ugyancsak a 17. állítás alkalmazása a következő is: Egy táncmulatságon minden nő pontosan k férfit ismer, és minden férfi pontosan k nőt ismer ($k \geqq 1$). Ekkor páros táncra perdülhetnek egyszerre valamennyien úgy, hogy az egymással táncolók ismerjék egymást.

Ha egy reguláris páros gráf 17. állításunk szerint létező elsőfokú faktorának éleit töröljük, ismét reguláris páros gráfot kapunk. Ha ez tartalmaz élt, akkor ugyancsak a 17. állítás szerint van elsőfokú faktora is. Törlési eljárásunk ismétlésével a következő állításra jutunk:

18. *Bármely k-adfokú reguláris páros gráf elsőfokú faktorokra bomlik, ha $k \geqq 1$.*

Megjegyezzük, hogy a 17. állítás táncolókra vonatkozó fenti megfogalmazásában a „pontosan" szó lényeges, és nem helyettesíthető a több ismeretséget megengedő

„legalább”-bal, vagyis ha egy páros gráf minden pontjának foka legalább k ($k \geqq 1$), nem biztos, hogy van a gráfnak elsőfokú faktora. Megjegyzésünket alátámasztja a 6. feladat kérdésére adott tagadó válasz, ha a feladathoz a következőképpen rendeljük a $G = G(A, B)$ páros gráfot: Jelöljék A és B a csonkított sakktábla fehér, ill. fekete mezőit, G egy-egy éle pedig fejezze ki azt, hogy a végpontpárjának megfelelő mezőpár lefedhető egyetlen dominólapocskával. Könnyen belátható, hogy G minden pontjának foka legalább 1 (ha pedig az eltávolított mezők nem szomszédjai sarokmezőknek, akkor G minden pontjának foka legalább 2); továbbá, hogy a 6. feladat kérdése így is fogalmazható: Van-e G-nek elsőfokú faktora? Ha figyelembe vesszük, hogy A és B pontjainak száma nem egyenlő, a tagadó válasz nyilvánvaló. Vajon csak abban az esetben tudjuk megjegyzésünket alátámasztani, ha A és B pontjainak száma különböző? Nem. Rendeljünk gráfot a 134. ábrához a fentebb leírt módon: 136. ábra. A G_1 gráfban — amelyben minden pont foka legalább 1 — ugyanannyi



136. ábra

pont fehér, mint fekete. A 4. gyakorlat kérdésére adott válasz az, hogy nem fedhető le sakktáblarészletünk dominólapocskákkal az említett módon — vagyis nem lehet G_1-nek elsőfokú faktora —, mert már b_1, b_2 és b_3 sem fedhető le egyidejűleg: hiszen a b_1, b_2 és b_3 pontok együttvéve csak a_4-gyel és a_5-tel szomszédosak.

Jelöljenek a G_1 gráf a_i pontjai lányokat, b_i pontjai fiúkat, a gráf élei pedig ismeretségeket. Meg szeretnénk házasítani a fiúkat úgy, hogy mindegyikük olyan lányt vegyen el, akit már ismer. Ha a b_1, b_2 és b_3 fiúknak nincs más ismerősük, mint akiket G_1 feltüntet, e házasítás a fentebb mondottak szerint nem lehetséges. Világos, hogy ismeretségi alapon létrehozott házasításhoz általában is teljesülnie kell a következő feltételnek: Bárhogyan is választjuk ki fiúknak egy csoportját (egyetlen fiú is alkothat csoportot, de valamennyi is), e csoport tagjai együttvéve legalább ugyanannyi lányt ismernek, mint ahány fiú van a csoportban. Megmutatjuk, hogy ha e feltétel teljesül, mindig lehetséges a fiúk házasítása ismeretség alapján.

A problémát átfogalmazzuk a gráfok nyelvére. Jelölje P, ill. E egy gráf bizonyos pontjainak, ill. éleinek halmazát. Ha P minden pontja szerepel az E-beli élek vég-

pontjai között, akkor azt mondjuk, hogy *E lefedi P*-t, vagy azt, hogy *E élei lefedik P*-t. E fogalommal a fenti módon való házasíthatóság azt kívánja, hogy a $G(A, B)$ páros gráfban — amelyben B pontjai jelentenek fiúkat — létezzenek B-t lefedő független élek, és ehhez szükséges, hogy B bárhogyan kiválasztott k számú pontjának együttvéve legalább k szomszédja legyen, minden lehetséges k-ra. Tehát az alábbi állítás bizonyításával a házasítási problémára is választ adunk:

19. *Ha a $G(A, B)$ páros gráfban B bárhogyan kiválasztott k számú pontjának együttvéve legalább k szomszédja van minden lehetséges k-ra, akkor van a gráfnak B-t lefedő független élhalmaza.*

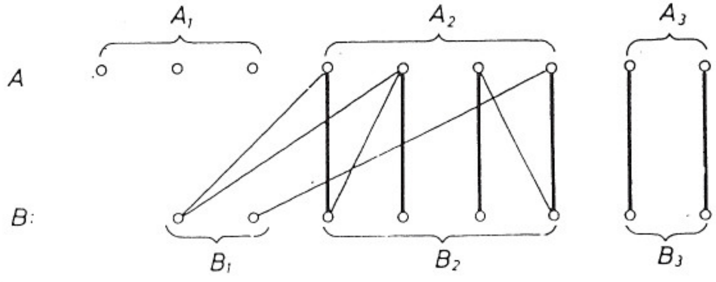
Állításunk bizonyításához a következő, más esetekben is jól használható eljárást alkalmazzuk:

Alternáló utak módszere. Jelöljük E-vel a G gráf egy független élhalmazát. A G gráf olyan útját, amelynek bármely belső pontjához illeszkedő két éle közül az egyik E-beli, a másik pedig nem, E-ben *alternáló út*nak nevezzük. Egynél több élt tartalmazó alternáló út bejárásában E-beli és nem E-beli élek váltakozva (alternálva) követik egymást. Mármost ha L a G gráfnak E-ben alternáló útja, továbbá L egyik végpontja sem végpontja E-beli élnek, akkor E olyan módosításával, hogy elhagyjuk belőle az L-hez tartozó éleket, viszont hozzávesszük L nem E-beli éleit, G-nek olyan E' élhalmazát nyerjük, amelynek élei szintén függetlenek (hiszen bármely ponthoz legfeljebb egy E'-beli él illeszkedik), és E' eggyel több élből áll, mint E. Ez az alapgondolata az alternáló utak módszerének. A 137. ábra egy alternáló utat szemléltet csere előtt, ill. után; az E-be, ill. E'-be tartozó éleket vastagon rajzoltuk.

137. ábra

A 19. állítás bizonyításához tegyük fel, hogy a $G = G(A, B)$ páros gráf teljesíti a 19. állítás feltételét. Azt kell megmutatnunk, hogy található G-ben B-t lefedő független élhalmaz.

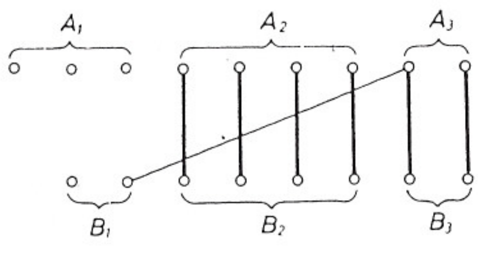
Alkalmazzuk a maximálisból indulás módszerét: Jelöljük E-vel G egy maximális független élhalmazát. Azt fogjuk megmutatni, hogy E lefedi B-t. Indirekt okoskodásunkhoz tegyük fel, hogy E nem fedi le B-t. A 138. ábrán szemléltetünk. A felső pontsor A pontjaiból, az alsó pedig B pontjaiból áll. A vastagon rajzolt élek az E-beli élek; az E-be nem tartozó éleket vékonyaknak képzeljük, néhányat ezek közül is feltüntettünk.



138. ábra

Jelöljük A_1-gyel, ill. B_1-gyel azoknak az A-beli, ill. B-beli pontoknak a halmazát, amelyek nem végpontjai vastag éleknek. (Indirekt feltevésünk szerint van B_1-be sorolható pont.) B_1-beli pont nem lehet A_1-beli ponttal szomszédos, mert különben E ilyen éllel maximális tulajdonságának ellentmondóan bővíthető volna. Jelöljük B_2-vel azoknak a B-beli pontoknak a halmazát, amelyek a B_1-beli pontokból alternáló (természetesen E-ben alternáló) utakkal elérhetők; és jelöljük A_2-vel a B_2 pontjaihoz illeszkedő vastag élek A-ba tartozó végpontjainak halmazát. Alkossák A-nak sem A_1-be, sem A_2-be nem tartozó pontjai az A_3 halmazt, és B-nek sem B_1-be, sem B_2-be nem tartozó pontjai a B_3 halmazt.

Láttuk, hogy B_1-beli pontnak nem lehet A_1-beli szomszédja. De B_1-beli pontnak A_3-ba tartozó szomszédja sem lehet, mert különben volna B_1-beli pontból alternáló úttal elérhető B_3-beli pont (139. ábra); az ilyen pontok pedig mind B_2-be tartoznak.

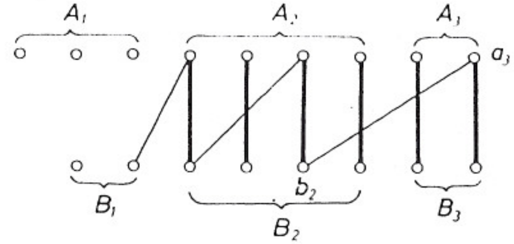


139. ábra

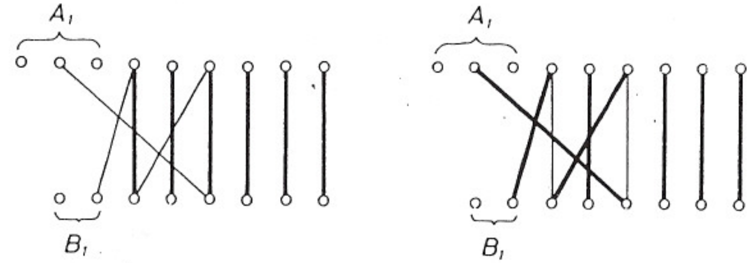
Tehát a B_1-beli pontok szomszédai mind A_2-be tartoznak. Meg fogjuk mutatni, hogy B_2 pontjainak szomszédai is mind A_2-beliek. Ezáltal ellentmondásra fogunk jutni, mert A_2 és B_2 pontjainak száma egyenlő, és így ha B_1 és B_2 együttvéve k számú pontból áll, akkor e k számú B-beli pontnak csak k-nál kevesebb szomszédja lehet, ellentétben azzal, hogy G teljesíti a 19. állítás feltételét.

Tegyük fel, hogy a B_2-beli b_2 pontnak szomszédja az A_3-beli a_3 pont. Tudjuk, hogy b_2 valamelyik B_1-beli pontból egy L alternáló úttal elérhető. L-nek nem lehet A_3-beli pontja, mert másképp, egy ilyen ponthoz illeszkedő vastag élt figyelembe

véve, volna alternáló úttal elérhető B_3-beli pont is. Csatoljuk L-hez a $\{b_2, a_3\}$ élt és az a_3-hoz illeszkedő vastag élt (140. ábra). Így arra jutunk, hogy van B_1-beli pontból alternáló úttal elérhető B_3-beli pont; ez pedig lehetetlen.



140. ábra



141. ábra

Még azt kell megmutatnunk, hogy A_1-beli pont sem lehet b_2-nek szomszédja. Ehhez előbb belátjuk, hogy B_1-beli pontból A_1-beli pont nem érhető el alternáló úttal. Ellenkező esetben ugyanis egy ilyen út csak vékony éllel kezdődhetne és végződhetne, és így az alternáló utak módszerét alkalmazva, az eredetinél eggyel több vastag él jönne létre, ellentmondásban E maximális tulajdonságával (141. ábra). Mármost tegyük fel, hogy b_2-nek szomszédja az A_1-beli a_1 pont. Az L alternáló út — amellyel b_2 egy B_1-beli pontból elérhető volt — az előbbiek szerint nem tartalmazhatja a_1-et. Ekkor azonban L-hez a $\{b_2, a_1\}$ élt csatolva olyan alternáló út jönne létre, amilyen az előbbiek szerint szintén nem létezhet.

Ezzel a 19. állítás bizonyítását befejeztük.

Megjegyzés. Ha a 19. állításban szereplő $G = G(A, B)$ gráf A-beli pontjainak száma megegyezik B-beli pontjainak számával, akkor az állítás egyértelmű azzal, hogy van G-nek elsőfokú faktora. Ha viszont egy $G = G(A, B)$ páros gráfnak van elsőfokú faktora, akkor nyilvánvaló, hogy az A-beli pontok száma megegyezik a B-beli pontok számával, és G bármely elsőfokú faktorának élei biztosítják a 19. állítás feltételeinek teljesülését.

Most megmutatjuk, hogy a 17. állítás a 19-nek következménye. Legyen tehát $r \geqq 1$ és $G = G(A, B)$ egy r-edfokú reguláris páros gráf. Miután A és B pontjainak száma a 16. állítás szerint megegyezik, elegendő azt igazolnunk, hogy G teljesíti a 19. állítás feltételét. A B halmazból kiválasztott k számú ponthoz G-nek $k \cdot r$ számú éle illeszkedik. Minthogy ezek közül A-nak bármely pontjához legfeljebb r él illeszkedik, a kiválasztott pontoknak együttvéve legalább k szomszédjuk van. Tehát teljesül G-re a 19. állítás feltétele, és így találhatók G-ben B-t lefedő független élek, amelyek egyben G elsőfokú faktorát alkotják.

A következő problémában a 19. állítás egy alkalmazását lelhetjük fel:

Egy iskola diákjaival tanulmányi versenyen akar részt venni. Kijelölik az egyes tantárgyakban versenyképes diákokat. A versenyen egyetlen diák sem indulhat két tantárgyban. Milyen feltétel esetén indíthat az iskola a versenyen szereplő valamennyi tantárgyban versenyzőt? Rendeljük a problémához a $G(A, B)$ páros gráfot a következőképpen: Az A halmaz pontjai a diákokat jelölik, a B halmaz pontjai pedig az egyes tantárgyakat. Egy él azt jelenti, hogy az A-beli végpontjának megfelelő diák versenyképes a B-beli végpontjának megfelelő tantárgyban. Világos, hogy valamennyi tárgyban akkor versenyezhet az iskola, ha van gráfunkban B-t lefedő független élhalmaz. Ennek feltételét a 19. állítás tartalmazza; a feltétel átfogalmazva az, hogy bárhogyan választunk ki k számú tantárgyat, legyen legalább k olyan diák, aki e tárgyak legalább egyikében versenyképes, minden lehetséges k-ra.

A fenti probléma kapcsán kérdezhetjük: Maximálisan hány tárgyban képviseltetheti magát a versenyen a szóban forgó iskola? A kérdéses szám nyilván a $G(A, B)$ gráf független éleinek maximális száma. Hogyan találhatunk páros gráfban maximális független élhalmazt? Megadunk egy, az alternáló utak módszerét felhasználó eljárást, más szóval algoritmust ilyen élhalmaz keresésére. Az eljárás, ill. annak bizonyos változata a gyakorlatban (főleg ún. szállítási problémák megoldásában) alkalmazható is. Haszna bonyolult esetekben mutatkozik meg — amikor „kézi" eszközökkel már nem is gazdaságos alkalmazni az eljárást — mégpedig abban, hogy számológépekre jól programozható.

Algoritmus páros gráf maximális független élhalmazának keresésére. Jelöljünk ki a $G(A, B)$ páros gráfban lehetőleg sok független élt. Ha a kijelölt élek végpontjaival vagy az A, vagy a B halmaz pontjait kimerítettük, akkor gráfunknak nyilván maximális sok független élét jelöltük ki. Vizsgáljuk gráfunkat abban az esetben, ha az előbbi módon még sem az A, sem a B halmaz pontjait nem merítettük ki. Szemléltessünk a 138. ábra szerint. A kijelölt független élek legyenek a vastagon rajzoltak, de ezek E halmazának maximális tulajdonságát most ne tegyük fel. Azt most is feltehetjük, hogy A_1-beli pont nem szomszédos B_1-beli ponttal, mert különben szemmel láthatóan nem „lehetőleg sok" független élt jelöltünk ki. A B_2 halmaz meghatározásából most is a régi módon következik, hogy B_1-beli és B_2-beli pont nem lehet szomszédos A_3-beli ponttal. Vizsgálatunk abban áll, hogy megnézzük, van-e A_1-beli pontnak szomszédja B_2-ben. Ha van, akkor E-ből a 141. ábrán látható módon ugyancsak független élekből álló olyan E' élhalmazt nyerhetünk, amely eggyel több élből áll, mint E. Ebben az esetben ismételjük meg eljárásunkat E'-ből

mint vastag élek halmazából kiindulva, és ismételjünk mindaddig, amíg csak lehet. Jelöljük E_u-val az utoljára kijelölt vastag élek halmazát, tehát azt, amelynél bővebb a fenti módon már nem található; és legyen e_u az E_u-t alkotó vastag élek száma. Eljárásunk, amelyben a **magyar módszer** néven ismert eljárás alapgondolatát alkalmaztuk, a fenti E_u megadásával befejeződik, ugyanis megmutatjuk, hogy gráfunkban e_u-nál több független él bármely más módon sem jelölhető ki, azaz bebizonyítjuk a következőt:

20. *Páros gráfra alkalmazva algoritmusunkat a gráf egy maximális független élhalmazát nyerjük. A fenti $G(A, B)$ gráfra így*

$$fé_{\max} = e_u.$$

Tegyük fel, hogy a 138. ábrán kijelölt vastag élek éppen az eljárásunkból adódó E_u-t alkotják. Ekkor, minthogy a régebbiek szerint mind B_1, mind B_2 szomszédai A_2-ben vannak, $G(A, B)$ valamennyi élének legalább az egyik végpontja vagy A_2-beli, vagy B_3-beli (mondhatjuk, hogy az A_2-beli és a B_3-beli pontok együttesen „lefogják" a gráf éleit). Ebből következik, hogy gráfunkban több független élt, mint amennyi pont e két halmazban van, nem lehet kiválasztani. Ámde A_2 és B_3 pontjai számának összege éppen e_u. Ezzel bebizonyítottuk a 20. állítást.

Általában egy G gráf bizonyos pontjainak R halmazát a gráf egy *lefogó* vagy *reprezentáló ponthalmazának* nevezzük, ha G minden élének legalább az egyik végpontja R-be tartozik. Egy *gráf lefogó pontjainak minimális számán* olyan lefogó ponthalmaza pontjainak számát értjük, amelynél kevesebb pontot tartalmazó lefogó ponthalmaza nincs a gráfnak. Ha a G gráf lefogó pontjainak minimális száma $lp_{\min}$ és R G-nek egy $lp_{\min}$ számú pontból álló lefogó ponthalmaza, akkor R-et G egy *minimális lefogó ponthalmazának* nevezzük.

Minthogy egy gráf bármely két független éle sem „fogható le" egyetlen ponttal, a gráf bármely lefogó ponthalmaza legalább annyi pontot tartalmaz, mint amekkora a gráf független éleinek maximális száma. Tehát érvényes a következő állítás:

21. *Bármely gráfra*

$$fé_{\max} \leqq lp_{\min}.$$

Fordítsuk figyelmünket ismét a fentebbi $G(A, B)$ páros gráfra. Láttuk, hogy a gráfunk utolsó felosztásában szereplő, összesen e_u számú pontot tartalmazó A_2 és B_3 együttvéve gráfunknak egy lefogó ponthalmaza. Tehát gráfunkra

$$lp_{\min} \leqq e_u.$$

Ha ezt a 20. és 21. állítással egybevetjük, azt kapjuk, hogy $G(A, B)$-re

$$fé_{\max} = lp_{\min}.$$

Az utóbbi összefüggésre vezető okoskodásunk páros gráfokra vonatkozóan csupán annyiban nem volt általános érvényű, amennyiben feltettük, hogy az e_u számú független él végpontjai sem az A, sem a B halmaz pontjait nem merítik ki. De gondoljuk meg, hogy a $G(A, B)$ páros gráfnak mind A, mind pedig B lefogó ponthalmaza. Ha tehát vannak $G(A, B)$-ben A-t vagy B-t lefedő független élek, akkor a 21. állítás figyelembevételével azonnal adódik, hogy $fé_{max} = lp_{min}$ ekkor is fennáll.

Ennélfogva bebizonyítottuk a páros gráfokra általános érvényű alábbi állítást:

22. *Bármely páros gráfra*

$$fé_{max} = lp_{min}.$$

A 22. állításban szereplő egyenlőség nem páros gráfokra általában nem érvényes: pl. bármely háromszögre $fé_{max} = 1$ és $lp_{min} = 2$. Könnyű belátni, hogy általában a $2k+1$ hosszúságú körre

$$fé_{max} = k \qquad \text{és} \qquad lp_{min} = k+1.$$

Több gráfelméleti probléma vizsgálatában bizonyult hasznosnak a 22. állítás. Számos szép bizonyítása ismeretes, ezek közül még egyet közlünk. Ez a gráf lefogó pontjainak minimális számára vonatkozó teljes indukcióval történik.

A bizonyításban — és a továbbiakban is — hasznunkra lesz a következő fogalmak bevezetése: A P és Q *ponthalmazok összegén* azt a ponthalmazt értjük, amelybe egy pont akkor tartozik, ha P-ben vagy Q-ban szerepel. Alkossák a P halmazt a G gráf bizonyos pontjai, és legyen a G' gráf G-nek részgráfja. A G' gráfot a G gráf *P feszítette részgráf*jának nevezzük, ha pontjainak halmaza P, élei pedig G-nek mindazon élei, amelyeknek végpontjai P-beliek. Lehet egy részgráf nem feszített is. Pl. egy n hosszúságú körnek van olyan részgráfja, amely $n-1$ hosszúságú út, de nincs ilyen feszített részgráfja, hiszen $n-1$ hosszúságú útja tartalmazza mind az n pontot, és az ezek feszítette részgráf maga a kör.

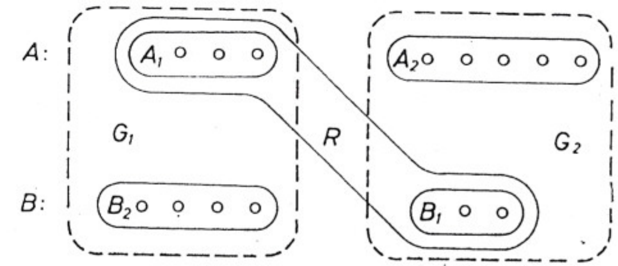
A 22. állítás nyilván igaz azokra a páros gráfokra, amelyekre $lp_{min} = 0$ vagy 1. Legyen $k \geqq 2$, és tegyük fel, hogy igaz a 22. állítás mindazokra a páros gráfokra, amelyekre $lp_{min} < k$; továbbá legyen a $G = G(A, B)$ páros gráfra $lp_{min} = k$. Megmutatjuk, hogy G-re $fé_{max} = k$.

A bizonyításban két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy van, ill. nincs G-nek k számú pontból álló olyan lefogó ponthalmaza, amely tartalmaz A-beli pontot is és B-belit is.

1. eset. Jelöljük R-rel G-nek egy olyan minimális lefogó ponthalmazát, amely A-beli és B-beli pontot is tartalmaz. Álljon A_1, ill. B_1 R-nek A-beli, ill. B-beli pontjaiból, továbbá álljon A_2 A-nak A_1-be nem tartozó pontjaiból és B_2 B-nek B_1-be nem tartozó pontjaiból. Minthogy R G-nek lefogó ponthalmaza, A_2-beli pont nem lehet szomszédos B_2-beli ponttal. Legyen $G_1 = G_1(A_1, B_2)$, ill. $G_2 = G_2(A_2, B_1)$ a G gráf $A_1 + B_2$, ill. $A_2 + B_1$ feszítette részgráfja. A 142. ábrán G pontjainak felosztását szemléltetjük.

Az A_1 ponthalmaz G_1-nek nyilván lefogó ponthalmaza. Jelöljük A_1 pontjainak számát k_1-gyel. Minthogy R-nek B_1-ben is van pontja, $k_1 < k$. Belátjuk, hogy A_1 G_1-nek minimális lefogó ponthalmaza. Tegyük fel ugyanis, hogy van G_1-nek k_1-nél

kevesebb pontból álló R_1 lefogó ponthalmaza. Ekkor $R_1 + B_1$ G-nek lefogó ponthalmaza, mert a G_1-beli éleket lefogja R_1, a többi élt pedig B_1 (hiszen A_2-beli pont nem lehet szomszédos B_2-beli ponttal). Ez azonban lehetetlen, hiszen $R_1 + B_1$ k-nál kevesebb pontból áll. Tehát G_1-re $lp_{min} = k_1 < k$. Ennélfogva indukciós feltevésünk értelmében van G_1-ben k_1 számú független él.



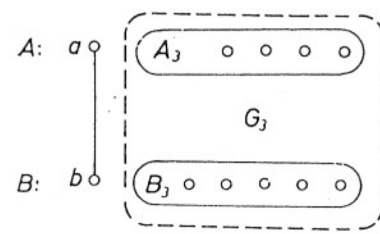
142. ábra

A B_1 halmaz pontjainak számát k_2-vel jelölve, az előbbihez hasonló módon látható be, hogy van G_2-ben k_2 számú független él. Minthogy G_1-beli független élek G_2-beli független élekkel együttvéve G-ben függetlenek, továbbá $k_1 + k_2 = k$, azt kaptuk, hogy van G-ben k számú független él. A 21. állítás szerint nem is lehet G-ben k-nál több független él, tehát G-re $fé_{max} = k$.

2. eset. A G gráf minden k számú pontból álló lefogó ponthalmaza vagy csak A-beli, vagy csak B-beli pontokból áll.

Nevezzük *kritikus él*nek a G gráf olyan élét, amelynek törlése révén a G-ből nyert gráfra $lp_{min} < k$. Ha G-nek nincs kritikus éle, akkor élek törlése révén a G-ből biztosan nyerhetünk olyan G' gráfot, amelynek már van kritikus éle. Ha meg tudjuk mutatni, hogy G'-ben van k számú független él, akkor a G' valamennyi élét tartalmazó G-ben is van.

Tehát feltehetjük, hogy van G-nek egy $e = \{a, b\}$ kritikus éle (az a pont A-beli, a b pont B-beli). Álljon A_3 A-nak, ill. B_3 B-nek a-tól, ill. b-től különböző pontjaiból.



143. ábra

Legyen $G_3 = G_3(A_3, B_3)$ a G gráf $A_3 + B_3$ feszítette részgráfja (143. ábra). A G_3 gráfra nyilván $lp_{min} < k$. Ha G_3-ra $lp_{min} < k-1$ volna, akkor volna G_3-nak egy $k-2$ pontból álló R_3 lefogó ponthalmaza. Ekkor azonban R_3-hoz a-t és b-t hozzávéve, G-nek egy k számú pontból álló olyan lefogó ponthalmazát nyernénk, amelynek volna A-beli pontja is és B-beli pontja is, ellentétben a 2. eset kiinduló állításával. Tehát a G_3 gráfra $lp_{min} = k-1$, és így indukciós feltevésünk értelmében van G_3-nak egy $k-1$ számú élt tartalmazó független E élhalmaza. Ha E-hez e-t hozzávesszük, G-nek k számú független élét nyerjük. Mármost a 21. állítást is figyelembe véve nyerjük, hogy G-re $fé_{max} = k$.

Ezzel befejeztük a 22. állítás második bizonyítását.

Korábban beláttuk, hogy a 17. állítás következménye a 19-nek. Most azt mutatjuk meg, hogy a 19. állítás — és így a 17. állítás is — következménye a 22-nek.

Tegyük fel, hogy a $G = G(A, B)$ páros gráf teljesíti a 19. állítás feltételeit, azaz B bárhogyan kiválasztott k számú pontjának együttvéve legalább k szomszédja van minden lehetséges k-ra. Jelöljük G lefogó pontjainak minimális számát m-mel. Minthogy A is, B is lefogó ponthalmaza G-nek, B legalább m pontból áll. Ha B pontosan m pontból áll, akkor a 22. állítás szerint kiválasztható G-nek m számú független éle: ezek pedig B-t lefedik. Tegyük fel, hogy B m-nél több pontból áll. Jelöljük G-nek egy minimális lefogó ponthalmazát R-rel, és jelöljük A és B felosztását a 142. ábra szerint. Minthogy B_2-beli pontnak A_2-beli szomszédja nem lehet, B_2 valamennyi szomszédja A_1-be tartozik. De A_1+B_1 m pontból, viszont B, azaz B_2+B_1 m-nél több pontból áll, és így A_1 kevesebb pontot tartalmaz, mint B_2. Ez pedig ellentmond annak, hogy B_2-re is teljesül a 19. állítás feltétele.

Megjegyezzük, hogy fordítva: a 22. állítás is levezethető a 19-ből. Kísérelje meg az olvasó.

Töröljük egy gráf egy lefogó ponthalmazának pontjait a hozzájuk illeszkedő élekkel együtt. Világos, hogy gráfunk nem törölt pontjai közül bármely kettő sem lehet egymásnak szomszédja.

Általában egy G gráf bizonyos pontjainak F halmazát a gráf egy *független ponthalmazának* nevezzük, ha nincs G-nek olyan éle, amelynek mindkét végpontja F-be tartozik, és nincs G-ben F-beli ponthoz illeszkedő hurokél. Egy *gráf független pontjainak maximális számán* olyan független ponthalmaza pontjainak számát értjük, amelynél több pontot tartalmazó független ponthalmaza nincs a gráfnak. Ha a G gráf független pontjainak maximális száma fp_{max}, és F G-nek egy fp_{max} számú pontból álló független ponthalmaza, akkor F-et G egy *maximális független ponthalmazának* nevezzük.

Az előbbiekben egy gráf független éleinek maximális számát a gráf lefogó pontjainak minimális számával hasonlítottuk össze. Most bevezetünk egy olyan minimális számot, amellyel a gráf független pontjainak maximális számát fogjuk összehasonlítani.

Ha egy gráf bizonyos éleiből álló E halmaz a gráf valamennyi pontját lefedi, akkor E-t a gráf *lefedő élhalmazának* nevezzük. Egy *gráf lefedő éleinek minimális számán* olyan lefedő élhalmaza éleinek számát értjük, amelynél kevesebb élt tartalmazó lefedő élhalmaza nincs a gráfnak: jelölése $lé_{min}$.

Feladatok

23. Igazoljuk, hogy ha F a G gráf egy maximális független ponthalmaza, akkor G-nek az F-be nem tartozó pontjai G egy minimális lefogó ponthalmazát alkotják;

és fordítva, ha R a G gráf egy minimális lefogó ponthalmaza, akkor G-nek az R-be nem tartozó pontjai G egy maximális független ponthalmazát alkotják.

24. Bizonyítsuk be, hogy ha az izolált pontot nem tartalmazó G gráf független pontjainak maximális száma m, akkor nem lehet G-nek m-nél kevesebb élből álló lefedő élhalmaza.

25. Bizonyítsuk be, hogy ha egy legalább 6-pontú egyszerű gráf minden pontjának foka legalább 3, akkor kiválasztható a gráfnak 3 független éle.

26. Egy társaság 3 lányból és 3 fiúból áll. Bármely egymást nem ismerő vegyes párban a lány fiúismerőseinek száma és a fiú lányismerőseinek száma együttvéve legalább 4. Bizonyítsuk be, hogy felállhat a társaság egyetlen kört alkotó körtánchoz úgy, hogy a körben minden lány két fiúismerőse és minden fiú két lányismerőse között álljon. (Az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük fel.)

27. Bizonyítsuk be, hogy ha egy páros gráf bármely F független ponthalmazát alkotó pontjainak együttvéve legalább annyi szomszédjuk van, mint amekkora F pontjainak száma, akkor van a gráfnak elsőfokú faktora.

A 23. feladat megoldásához csupán azt kell megfontolnunk, hogy bárhogyan is választjuk ki G-nek egy F független ponthalmazát, G-nek F-be nem tartozó pontjai G egy lefogó ponthalmazát alkotják; és fordítva, bárhogyan is választjuk ki G-nek egy R lefogó ponthalmazát, G-nek R-be nem tartozó pontjai G egy független ponthalmazát alkotják. Megfontolásunkból egyszersmind az alábbi állítás is következik:

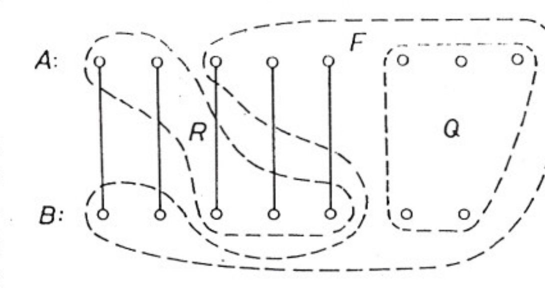
28. *Bármely n-pontú gráfra*

$$fp_{max} + lp_{min} = n.$$

A 24. feladat állítása nyilvánvaló, hiszen egy gráf bármely két nem szomszédos pontját sem lehet a gráf egyetlen élével „lefedni". Tehát érvényes a következő állítás:

29. *Izolált pontot nem tartalmazó gráfra*

$$fp_{max} \leqq lé_{min}.$$



144. ábra

Bebizonyítjuk, hogy izolált pontot nem tartalmazó páros $G = G(A, B)$ gráfra fp_{max} mindig egyenlő $lé_{min}$-nel. Ehhez azt kell belátnunk, hogy van G-nek fp_{max} számú élből álló lefedő élhalmaza. Jelöljük ki G egy maximális független élhalmazának mind az $fé_{max}$ számú élét, és jelöljük R-rel G egy minimális lefogó ponthalmazát. A 22. állításból következik, hogy R minden kijelölt élnek pontosan az egyik végpontját tartalmazza, és más pontot nem is tartalmaz. (A 144. ábrán szemléltetünk, a megrajzolt élek a kijelölt élek.) Jelöljük F-fel a G gráf R-be nem tartozó pontjainak halmazát, és Q-val azt a ponthalmazt, amelyet F-ből úgy nyerünk, hogy elhagyjuk belőle a kijelölt élek végpontjait. A 23. feladat állítása szerint F G-nek maximális független ponthalmaza, tehát F pontjainak száma $fp_{\max}$. Minthogy a kijelölt $fé_{\max}$ számú él mindegyikének egyik végpontja F-beli, Q pontjainak száma $fp_{\max}-fé_{\max}$. Mármost Q lefedhető a pontjaihoz illeszkedő egy-egy élből álló élhalmazzal, G többi pontja pedig lefedhető az $fé_{\max}$ számú kijelölt éllel. Tehát G pontjai lefedhetők

$$fp_{\max}-fé_{\max}+fé_{\max}=fp_{\max}$$

számú éllel.

Ezzel bebizonyítottuk a következő állítást:

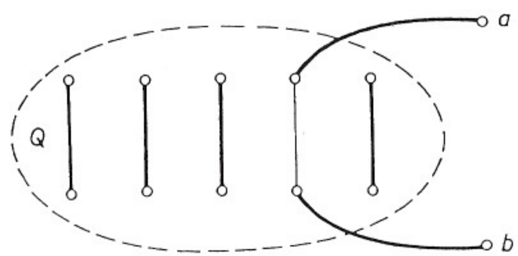
30. *Izolált pontot nem tartalmazó páros gráfra*

$$fp_{\max}=lé_{\min}.$$

A 25. feladat állításának alábbi általánosítása is érvényes; rögtön ezt bizonyítjuk:

31. *Ha egy legalább 2k-pontú egyszerű gráf minden pontjának foka legalább k, akkor a gráf független éleinek száma legalább k.*

A bizonyításhoz tegyük fel, hogy a legalább $2k$-pontú egyszerű G gráf minden pontjának foka legalább k. Jelöljük G független éleinek maximális számát $é$-vel, és az indirekt okoskodáshoz tegyük fel, hogy $é \leq k-1$. Legyen E a G gráf egy maximális független élhalmaza, és Q az E-beli élek végpontjaiból álló ponthalmaz. Minthogy Q pontjainak száma $2é \leqq 2k-2$, van G-nek két, Q-ba nem tartozó a és b pontja. E pontok E maximális tulajdonsága miatt Q-ba nem tartozó ponttal nem lehetnek szomszédosak. Nem lehet olyan E-beli él, amelynek egyik végpontja a-nak, másik végpontja b-nek szomszédja, mert különben az alternáló utak módszerét alkalmazva, ellentmondásba jutnánk E maximális tulajdonságával (145. ábra). Tekintsük a-nak k szomszédját; láttuk, hogy ezek Q-beliek. Helyezzünk mindegyikükre egy-egy korongot, és csúsztassuk át mindegyiket a hozzá illeszkedő E-beli él másik végpontjára. Így a korongok k olyan pontot fednek, amelyek az előbbiek szerint nem lehetnek b-vel szomszédosak. Ennélfogva b-nek legfeljebb $2k-2-k=k-2$ szomszédja lehet Q-ban, holott legalább k szomszédja van; és láttuk, hogy ezek mind Q-beliek.



145. ábra

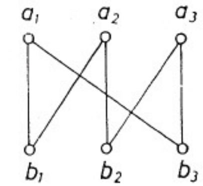
Ezzel bebizonyítottuk a 31. állítást.

Megjegyezzük, hogy ha a 31. állításban a „legalább $2k$" helyett „pontosan $2k$"-t mondunk, akkor állításunk következménye a 4. fejezet 14. állításának ($k>1$-re).

Eszerint ugyanis ekkor van a szóban forgó G gráfnak H Hamilton-köre; H pedig két elsőfokú faktorra bomlik, és e két faktor mindegyike eleget tesz a 31. állítás követelményének.

Páros hosszúságú Hamilton-kör létezése mindig biztosítja elsőfokú faktor létezését. A 26. feladat és általánosítása azt mutatja meg, hogy a 4. fejezet 34. feladatának és 15. állításának Hamilton-kör létezését biztosító feltételei hogyan csökkenthetők, ha páros gráfokra szorítkozunk.

A 26. feladat megoldásához jelöljük a lányokat, ill. a fiúkat így: a_1, a_2, a_3, ill. b_1, b_2, b_3. Ha minden lány ismer minden fiút, akkor a kívánt elrendezés nyilván lehetséges. Tehát feltehetjük, hogy a_1-nek nem ismerőse b_2. Ekkor a_1-nek szükségképpen ismerőse b_1 és b_3, b_2-nek pedig a_2 és a_3. Ha a_2-nek is és a_3-nak is ismerőse minden fiú, akkor is lehetséges kívánt elrendezés; csupán arra kell ügyelni, hogy a lányok és fiúk váltakozva álljanak, és ne kerüljön a_1 mellé b_2. Tehát feltehetjük, hogy a_2-nek nem ismerőse b_3. Ekkor a_2-nek szükségképpen ismerőse b_1 és b_2, b_3-nak pedig a_1 és a_3. Ezek után kívánt sorrendet ad a következő: $a_1, b_3, a_3, b_2, a_2, b_1$ (146. ábra).



146. ábra

Mármost bebizonyítjuk a 26. feladat állításának következő általánosítását is:

32. *Ha a többszörös éleket nem tartalmazó $G(A, B)$ páros gráfban mind A, mind pedig B m számú pontból áll ($m \geq 2$), továbbá bármely A-beli pont és vele nem szomszédos B-beli pont fokösszege nagyobb mint m, akkor van a gráfnak Hamilton-köre.*

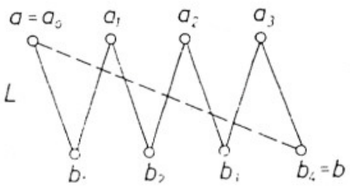
A bizonyítás a 33. állítás bizonyítása során fog adódni. A 33. állítás azt mutatja, hogy ha a többszörös éleket nem tartalmazó $G(A, B)$ páros gráf — amelyben A és B pontjainak száma egyenlő — „elég sok" pontjának foka „elég nagy", akkor van a gráfnak Hamilton-köre; pontosabban:

33. *Ha a többszörös éleket nem tartalmazó $G(A, B)$ páros gráfban mind A, mind pedig B m számú pontból áll ($m \geqq 2$), továbbá bármely $\frac{m}{2}$-nél nem nagyobb pozitív egész k esetén a k-nál nem nagyobb fokú A-beli pontok száma is és B-beli pontok száma is kisebb, mint k, akkor van a gráfnak Hamilton-köre.*

Indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy a $G=G(A, B)$ páros gráf eleget tesz a 33. állítás feltételeinek, és nincs G-nek Hamilton-köre. Állítsunk elő G-ből újabb élek behúzásával egy többszörös élt nem tartalmazó olyan $G'=G'(A, B)$ páros gráfot, amelynek nincs Hamilton-köre, de bárhogyan is állítanánk elő G'-ből egyetlen új él behúzásával egy $G''(A, B)$ páros gráfot, annak már volna Hamilton-köre. (Ilyen G'-höz biztosan eljuthatunk, hiszen minden A-beli pontot minden B-belivel szomszédossá téve, biztosan Hamilton-körrel rendelkező gráf jönne létre.) A *telített*, más szóval *kritikus* G' gráf szintén eleget tesz a 33. állítás feltételeinek; továbbá ha G eleget tesz a 32. állítás feltételeinek, akkor G' is. A G' gráf kritikus jellegéből következik: Ha az a pont A-beli, a b pont pedig B-beli, és a és b nem szomszédosak G'-ben, akkor van G'-nek olyan L Hamilton-útja, amelynek két végpontja a és b. Járjuk be L-et a-tól b-ig, és jelöljük a pontokat érintésük sorrendjében így:

$$a = a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, b_{m-1}, a_{m-1}, b_m = b.$$

(Az $m = 4$ esetben a 147. ábra szemléltet.) Ha létezik G'-ben az $\{a_0, b_j\}$ él, akkor nem létezhet a $\{b_m, a_{j-1}\}$ él, mert különben G' egy Hamilton-körét járhatnók be rendre a következő pontokat érintve: $a_0, b_j, a_j, b_{j+1}, a_{j+1}, \ldots, a_{m-1}, b_m, a_{j-1}, b_{j-1}, a_{j-2}, b_{j-2}, \ldots, b_1, a_0$. Ha tehát a r-edfokú, akkor b legfeljebb $m-r$-edfokú. Ebből következik, hogy G' bármely A-beli a és B-beli b nem szomszédos pontpárjára mind G'-ben, mind G-ben fennáll az alábbi egyenlőtlenség:



147. ábra

$$\varphi(a) + \varphi(b) \leqq m.$$

Ez ellentmond annak, hogy G teljesíti a 32. állítás feltételeit; tehát a 32. állítás máris bizonyított.

Jelentse most az A-beli a és a B-beli b G'-nek két olyan nem szomszédos pontját, amelyre a $\varphi(a)+\varphi(b)$ fokösszeg maximális (és legyen az a_i és b_i jelek jelentése ugyanaz, mint előzőleg). E maximum most is legfeljebb m. Tehát a és b közül az egyiknek — mondjuk a-nak (a másik esetben hasonlóan okoskodhatunk) — $\frac{m}{2}$-nél nem nagyobb a foka: vagyis

$$\varphi(a) = k \leqq \frac{m}{2}.$$

Jelöljük az a pont k számú szomszédjának egyikét b_j-vel. Fentebb beláttuk, hogy b nem szomszédos a_{j-1}-gyel. Minthogy $\varphi(a)+\varphi(b)$ maximális,

$$\varphi(a_{j-1}) + \varphi(b) \leqq \varphi(a) + \varphi(b),$$

tehát

$$\varphi(a_{j-1}) \leqq \varphi(a) = k.$$

Így G'-nek k számú A-beli pontjáról láthatjuk be, hogy foka nem nagyobb k-nál. Ez azonban ellentmond annak, hogy G' eleget tesz a 33. állítás feltételeinek. Tehát az a feltevésünk, hogy nincs G-nek Hamilton-köre, helytelen.

Ezzel bebizonyítottuk mind a 33. állítást, mind pedig a 32.-et.

Oldjuk meg a 27. feladatot. Tegyük fel, hogy a $G(A, B)$ páros gráf teljesíti a 27. feladat állításának feltételeit. Mind A, mind B független ponthalmaza gráfunknak. Ennélfogva B legalább annyi pontból áll, mint A, és A legalább annyi pontból áll, mint B. Vagyis A és B pontjainak száma egyenlő. De gráfunk teljesíti a 19. állítás feltételeit is, tehát van a gráfnak B-t lefedő független élhalmaza, éspedig minden ilyen élhalmaz A-t is lefedi, azaz gráfunk elsőfokú faktorának éleit szolgáltatja.

Belátjuk, hogy a 27. feladat állítása megfordítható. Tegyük fel, hogy a $G(A, B)$ páros gráfnak van elsőfokú faktora, és E egy elsőfokú faktor éleiből álló halmaz. Mármost bárhogyan is jelöljük ki a gráf egy független F ponthalmazát, ennek minden pontjához pontosan egy E-beli él illeszkedik. Minthogy minden E-beli élnek legfeljebb az egyik végpontja F-beli, és bármely két E-beli élnek sincs közös végpontja, az F pontjaihoz illeszkedő E-beli élek végpontjaikkal F pontjainak annyi szomszédját jelölik ki, ahány pontból F áll.

Ezzel bebizonyítottuk az alábbi állítást:

34. *Ha egy páros gráf bármely F független ponthalmazát alkotó pontjainak együttvéve legalább annyi szomszédjuk van, mint amennyi F pontjainak száma, akkor van a gráfnak elsőfokú faktora; és megfordítva, ha egy páros gráfnak van elsőfokú faktora, akkor a gráf bármely F független ponthalmazát alkotó pontjainak együttvéve legalább annyi szomszédjuk van, mint amennyi F pontjainak száma.*

A 34. állítás második része a páros gráfokon túlmenően bármely gráfra érvényes, hiszen fenti okoskodásunkban nem használtuk ki, hogy a szóban forgó gráf páros. Megállapításunkat átfogalmazzuk. Ehhez vegyük figyelembe, hogy egy gráf bármelyik független ponthalmazába nem tartozó pontjai a gráf egy lefogó ponthalmazát alkotják, és viszont. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van elsőfokú faktora. Töröljük G-nek egy tetszőlegesen választott R lefogó ponthalmazát alkotó pontjait a hozzájuk illeszkedő élekkel együtt. A törlés révén G-ből nyert G_0 gráf csupa izolált pontból áll. Ezek után megállapításunk az, hogy G_0 pontjainak száma nem nagyobb R pontjainak számánál.

Állításunk további általánosításához jelöljük G tetszőlegesen választott pontjainak halmazát Q-val, és töröljük Q pontjait a hozzájuk illeszkedő élekkel együtt. Jelöljük a törlés révén G-ből nyert G' gráf páratlan számú pontot tartalmazó komponenseinek számát k-val. Tegyük fel, hogy van G-nek elsőfokú faktora, és az E élhalmazt G egy elsőfokú faktorának élei alkotják. Ha G_1 a G' gráfnak egy páratlan számú pontot tartalmazó komponense, akkor kell lenni olyan E-beli élnek, amelynek egyik végpontja G_1-beli, a másik pedig Q-beli. Ebből az észrevételből következik: Ha van G-nek elsőfokú faktora, akkor k legfeljebb akkora, mint Q pontjainak száma.

Be lehet bizonyítani, hogy utóbbi állításunk megfordítható, de ennek bizonyítása korántsem egyszerű, és ezért nem is tárgyaljuk. Az alábbi állításban azonban a megfordított állítást is megfogalmazzuk.

35. *Jelöljük a G gráf tetszőlegesen választott pontjainak halmazát Q-val, és jelöljük Q pontjainak és a hozzájuk illeszkedő éleknek törlése révén G-ből nyert gráf páratlan számú pontot tartalmazó komponenseinek számát k-val. Mármost ha van G-nek elsőfokú faktora, akkor k legfeljebb akkora, mint Q pontjainak száma; és megfordítva, ha minden lehetséges Q-ra k legfeljebb akkora, mint Q pontjainak száma, akkor van G-nek elsőfokú faktora.*

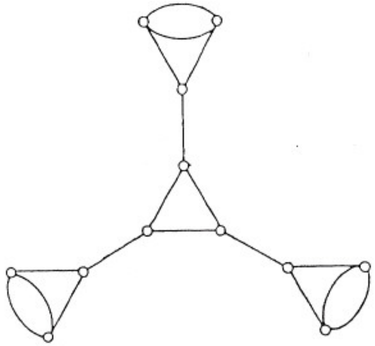
Kiegészítés: A 35. állításban szereplő törlések közé soroljuk az „üres műveletet" is, vagyis azt, hogy G egyetlen pontját sem választjuk ki törlésre. Ekkor is mondhatjuk, hogy Q létezik, csak éppen *üres*, azaz pontjainak száma 0. Ha Q üres, akkor k a G gráf páratlan számú pontot tartalmazó komponenseinek számát jelenti.

Megjegyzés. Ismeretes a 35. állításnak olyan általánosítása is, amely gráfok tetszőleges faktorának létezésére szolgáltat feltételt.

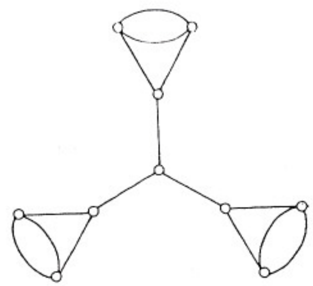
E könyv tervezett folytatásában (a négyszínprobléma kapcsán) látni fogjuk, hogy harmadfokú reguláris gráfok esetén az elsőfokú faktorokra bontás problémájának különösen fontos szerepe van a gráfelméletben. Ennek jegyében fordítjuk most figyelmünket a harmadfokú reguláris gráfokra.

Gyakorlatok

36. Vizsgáljuk meg, van-e a 148., ill. a 149. ábrának elsőfokú faktora.

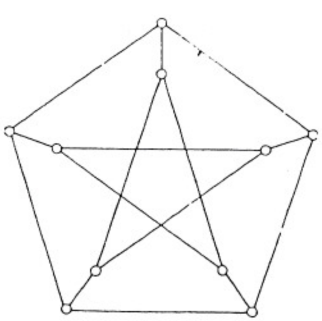


148. ábra



149. ábra

37. Rajzoljunk olyan 3-adfokú reguláris gráfokat, amelyeknek van Hamilton-körük. (Ilyen pl. a 86. és a 121. ábra). Felbonthatók-e a rajzolt gráfok elsőfokú faktorokra?



150. ábra

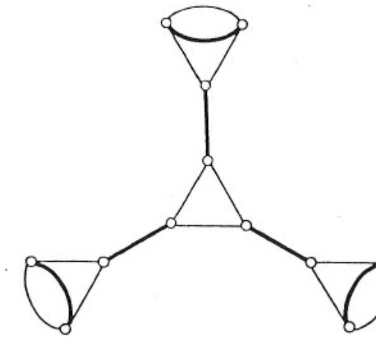
Feladatok

38. Bizonyítsuk be, hogy az olyan harmadfokú reguláris gráf, amelynek van Hamilton-köre, felbontható 3 elsőfokú faktorra.

39. Bizonyítsuk be, hogy a 150. ábrán látható gráf nem bontható fel 3 elsőfokú faktorra.

40. Igazoljuk, hogy az olyan harmadfokú reguláris gráf, amelynek van hídja, nem bontható fel 3 elsőfokú faktorra.

A 36. gyakorlathoz megadott gráfok közül a 148. ábrának egy elsőfokú faktorát könnyen megtalálhatjuk: a 151. ábra vastagon rajzolt éleivel ilyet jelöltünk ki. A 35. állítás alkalmazásával viszont azonnal kiderül, hogy a 149. ábrának nincs elsőfokú faktora: ha Q az egyetlen „középső" pontból áll (amelyhez illeszkedő élek hidak), akkor $k=3$.

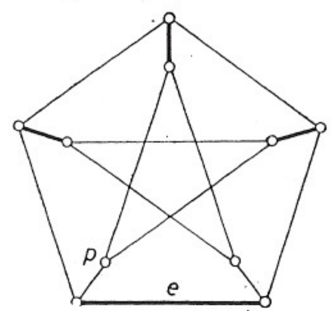


151. ábra

A 37. gyakorlat előírásának megfelelően rajzolt gráfok mind felbonthatók elsőfokú faktorokra. Ennek bizonyítását kívánja a 38. feladat. A bizonyításhoz tegyük fel, hogy a harmadfokú reguláris G gráfnak H egy Hamilton-köre. Töröljük G-ből a H-beli éleket. A nem törölt élek szükségképpen G egy elsőfokú faktorának élei. Ebből (de az 1. fejezet 9. állításából is) következik, hogy G-nek és így H-nak is páros számú pontja van. Tehát H éleinek száma is páros, ennélfogva felbomlik 2 elsőfokú faktorra: H bejárásában minden második él tartozik ugyanabba az elsőfokú faktorba.

A 38. feladat állítása nem fordítható meg, összefüggő gráfokra vonatkozóan sem. Erre példa a 132. ábra és a 89. ábrához a 4. fejezetben fűzött megjegyzés.

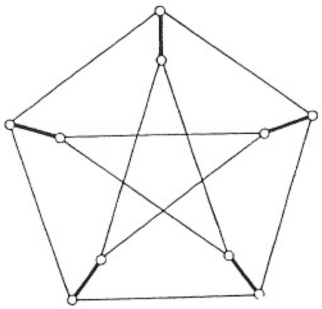
A 39. feladat megoldásához tegyük fel, hogy a 150. ábrán látható gráf felbomlik 3 elsőfokú faktorra: F_1-re, F_2-re és F_3-ra. Minthogy az ábra „peremét" alkotó K ötszög nem bontható fel 2 elsőfokú faktorra, mindhárom faktornak van K-ba tartozó éle. De ekkor a 3 faktor között van olyan — mondjuk F_1 —, amelynek csak egy éle szerepel K-ban, ezt a 152. ábrán e-vel jelöltük meg, és vastagon rajzoltuk. Így a többi K-beli él már nem F_1-beli. De minden ponthoz illeszkedik mindhárom faktornak egy-egy éle, és ezért a 152. ábra többi vastagon rajzolt éle szükségképpen F_1-beli. A p ponthoz illeszkedő élek egyike is F_1-beli, ámde bármelyik is az, találunk olyan pontot, amelyhez két F_1-beli él illeszkedik, ez pedig lehetetlen. Ezzel megoldottuk a 39. feladatot. A 38. feladatot figyelembe véve az is adódik, hogy nincs gráfunknak Hamilton-köre.



152. ábra

A 40. feladat megoldásához tegyük fel, hogy a harmadfokú reguláris G gráfnak a h-val jelölt éle hídja, és G 3 elsőfokú faktorra bontható. Képzeljük el a G gráfot felbontva 3 elsőfokú faktorra. E faktorok közül töröljük az egyik h-t nem tartalmazónak az éleit. A G-ből így nyert G' gráf minden pontjának foka 2, és ezért G' minden komponense kör (1. fejezet 36. feladat). Ebből következik, hogy h G'-nek és így G-nek is valamelyik körébe tartozik; ez pedig a 3. fejezet 12. feladatának állítása szerint lehetetlen.

Tehát hidat tartalmazó harmadfokú reguláris gráf nem bontható fel 3 elsőfokú faktorra, sőt az is lehet, hogy ilyen gráfnak (pl. a 149. ábrának) nincs is elsőfokú faktora; ez azonban nem szükségszerű (mint pl. a 151. ábrán). Láttuk, hogy a hidat nem tartalmazó 150. ábra sem bontható fel 3 elsőfokú faktorra. E gráfnak azonban van elsőfokú faktora: a 153. ábrán a vastagon rajzolt élek éppen ezt mutatják. Tehát lehetséges, hogy hidat nem tartalmazó harmadfokú reguláris gráf nem bontható fel 3 elsőfokú faktorra, de megmutatjuk, hogy elsőfokú faktora szükségképpen van, azaz bebizonyítjuk a következő állítást.



153. ábra

41. *Hidat nem tartalmazó harmadfokú reguláris gráfnak van elsőfokú faktora.*

Állításunkat így bizonyítjuk: Megmutatjuk, hogy ha a harmadfokú reguláris G gráf nem tartalmaz hidat, akkor G teljesíti a 35. állítás második részének a kiegészítéssel „bővített" feltételét. Tehát csak azt bizonyítjuk, hogy a 41. állítás következménye a 35.-nek.

Feltehetjük, hogy G összefüggő, mert okoskodásunk végrehajtható komponensenként. Tehát legyen Q az összefüggő G gráf tetszőlegesen választott pontjainak halmaza, és legyen a Q pontjainak és a hozzájuk illeszkedő éleknek törlése révén G-ből nyert G' gráf páratlan számú pontot tartalmazó komponenseinek száma k.

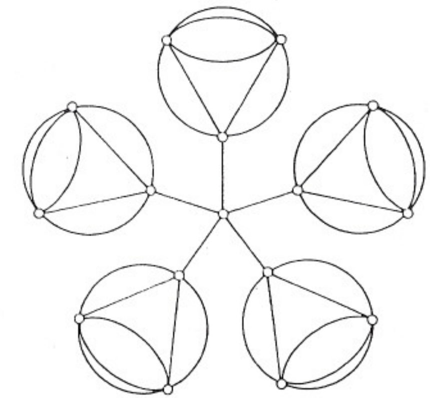
Ha Q üres, akkor $k=0$, mert G összefüggő, és az 1. fejezet 9. állítása szerint páros számú pontot tartalmaz. Tegyük fel most, hogy Q nem üres, és jelöljük K-val G' egy páratlan számú pontot tartalmazó komponensét. Állítsuk elő K-ból a K_1 gráfot a következőképpen: Válasszuk ki — és csatoljuk K-hoz — G-ből mindazokat az éleket, amelyeknek egyik végpontja K-beli, a másik pedig nem K-beli, vagyis Q-beli. Forrasszuk össze a kiválasztott éleknek Q-beli végpontjait egyetlen p ponttá. Így kapjuk a K_1 gráfot, amelynek K részgráfja. Minthogy K_1-nek a K-ba tartozó pontjai mind harmadfokúak, és e pontok száma páratlan, az 1. fejezet 9. állítása szerint p foka is páratlan. Azonban p foka nem lehet 1, mert akkor G tartalmazna hidat. Ennélfogva

$$\varphi(p) \geqq 3.$$

Ebből következik, hogy legalább $3k$ azoknak a G-beli éleknek a száma, amelyeknek egyik végpontja G' valamely páratlan számú pontot tartalmazó komponensébe tartozik, másik végpontja pedig Q-beli. Egy-egy Q-beli ponthoz ezek közül legfeljebb 3 illeszkedhet, hiszen G minden pontjának foka 3; és így Q pontjainak száma legalább k.

Tehát G teljesíti a 35. állítás második részének feltételét, és így van G-nek elsőfokú faktora. Ezzel megmutattuk, hogy a 41. állítás a 35.-nek következménye.

Jelöljük a 149. ábrán látható 3-adfokú reguláris gráfot G_3-mal. „Hasonló" szerkezetű a 154. ábrán látható 5-ödfokú reguláris gráf; jelöljük ezt G_5-tel. Ezek mintájára képzeljük el a 7-edfokú reguláris G_7 gráfot, a 9-edfokú reguláris G_9 gráfot, s í. t. (Általában a $2k+1$-edfokú reguláris G_{2k+1} gráfban G_5 kétszeres élei helyébe k-szoros élek, és G_5 háromszoros élei helyébe $k+1$-szeres élek kerülnek.) Megmutatjuk, hogy a felsorolt gráfok egyikének sincs valódi részgráfját alkotó faktora, és így egyiknek sincs elsőfokú faktora.



154. ábra

Tegyük fel ugyanis, hogy a G_{2k+1} gráf felbomlik 1-nél több faktorra. Ekkor e gráf egy felbontásában szereplő faktorait két csoportba osztva, és az egy-egy csoportba tartozók szorzatát létrehozva, az is adódik, hogy G_{2k+1} felbomlik két faktorra, mondjuk F_1-re és F_2-re. Minthogy G_{2k+1} két faktorának fokösszege $2k+1$ (páratlan), F_1 és F_2 közül az egyik páratlan fokú, a másik pedig páros fokú. Legyen F_2 a páros fokú. A 13. állítás szerint F_2 felbomlik másodfokú faktorokra. Ebből következik, hogy G_{2k+1} minden pontja gráfunk valamely körének pontja. Ez azonban lehetetlen, hiszen G_{2k+1} „középső" pontja nem tartozhat a gráf egyetlen körébe sem, mert a hozzá illeszkedő $2k+1$ számú él mindegyike hídja a gráfnak.

Minthogy az egyetlen élből (amely nem hurokél) és annak végpontjaiból álló gráfnak sincs valódi részgráfját alkotó faktora, bebizonyítottuk a következő állítást:

42. *Minden pozitív páratlan k számhoz létezik olyan k-adfokú reguláris gráf, amelynek nincs valódi részgráfját alkotó faktora.*

Végtelen gráfokra vonatkozóan megjegyezzük, hogy be lehet bizonyítani a következőket: Az 1. állítás úgy módosul, hogy végtelen teljes gráf felbomlik elsőfokú faktorokra. Véges fokszámú reguláris végtelen gráfokra érvényes a 13. és a 18. állítás.

*

Gyakorlatok

43. Szervezzük meg 6 csapat 5 alkalommal lezajló körmérkőzését.

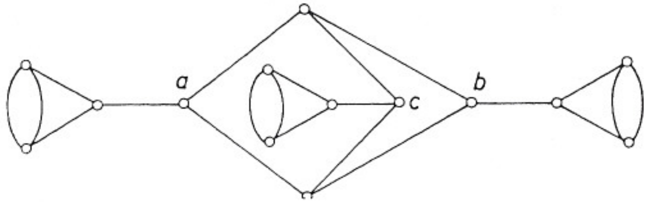
44. Bontsuk fel a 123. ábrát elsőfokú faktorokra.

45. Bontsuk fel a 128. ábrát két faktorra.

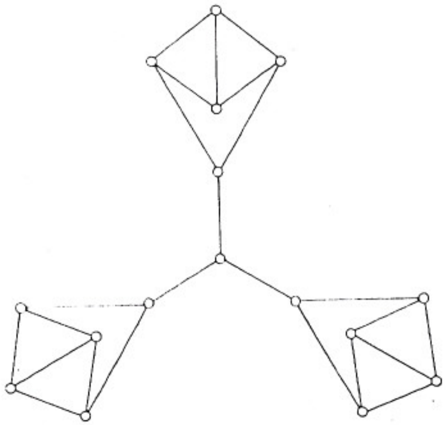
46. Bontsuk fel a teljes 7-gráfot 3 másodfokú faktorra.

47. Mutassuk meg, hogy a teljes 5-gráfból bármely páros részgráfjának éleit törölve sem kapunk páros gráfot.

48. Van-e a 155. vagy a 156. ábrának elsőfokú faktora?



155. ábra



156. ábra

Feladatok

49. Igazoljuk, hogy az olyan $2k$-adfokú ($k \geqq 1$) reguláris összefüggő gráf, amelynek páros számú éle van, felbontható két k-adfokú faktorra.

50. Bizonyítsuk be, hogy Euler-gráfnak nincs hídja. (Az Euler-gráf fogalma a 3. fejezet 7. állítása után található.)

51. Igazoljuk, hogy összefüggő reguláris gráf minden páratlan fokú faktora tartalmazza a gráf összes hídját.

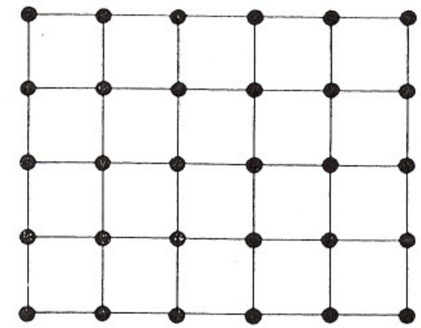
52. Igazoljuk, hogy hidat is tartalmazó összefüggő reguláris gráf bármely faktorokra bontásában legfeljebb egy faktor foka lehet páratlan.

53. Igazoljuk, hogy ha egy összefüggő reguláris gráf valamely pontjához a gráfnak h számú hídja illeszkedik, akkor a gráf minden páratlan fokú faktora legalább h-adfokú.

54. Igazoljuk, hogy ha egy összefüggő páratlan fokú reguláris gráfnak van olyan pontja, amelyhez illeszkedő valamennyi él híd, akkor nincs a gráfnak valódi részgráfját alkotó faktora.

55. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G(A, B)$ páros gráf összefüggő, akkor A és B, sorrendjüktől eltekintve, egyértelműen meghatározottak.

56. Gyöngyszemekből és azokat összekapcsoló zsinórdarabokból „négyzetrácsos hálózatot" alakítunk ki. Ebben a gyöngyszemek n sorban és m oszlopban helyezkednek el (a 157. ábrán $n=5$ és $m=6$). Milyen m és n értékek esetén lehetséges a hálózatot bizonyos zsinórdarabok átmetszésével egyetlen köralakú lánccá alakítani?



157. ábra

57. Van-e izolált pontot nem tartalmazó olyan páros gráf, amelyben egy kivétellel minden pont foka egyenlő, a kivételes pont foka pedig kisebb a többi pont fokánál?

58. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re kijelölhető a teljes 2^n-gráfnak n számú részgráfja úgy, hogy mindegyik páros gráf legyen, és a teljes 2^n-gráf minden éle szerepeljen a kijelölt részgráfok valamelyikében.

59. Bizonyítsuk be, hogy a többszörös élt nem tartalmazó $4n$-pontú $2n$-edfokú reguláris páros gráf felbontható n számú összefüggő másodfokú faktorra (Hamilton-körre).

60. Legyen a sakktábla 64 mezejéből 16 mező oly módon kijelölve, hogy mind a 8 sor és mind a 8 oszlop éppen 2—2 kijelölt mezőt tartalmazzon. Bizonyítsuk be, hogy a kijelölt mezőkre mindenkor úgy lehet egy-egy bábot, éspedig 8 fehér és 8 fekete bábot elhelyezni, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan 1 fehér és 1 fekete báb álljon.

61. Igazoljuk, hogy összefüggő, legalább másodfokú reguláris páros gráf nem tartalmaz hidat.

62. Egy tanulmányi versenyen n számú tantárgyban n iskola diákjai versenyeznek. Minden iskolát tantárgyanként egy-egy tanuló képvisel. Bizonyítsuk be, hogy bármely $1 \leqq k \leqq n$ egész szám esetén kiválaszthatók versenyzők úgy, hogy minden iskolát és minden tantárgyat pontosan k kiválasztott versenyző képviseljen.

63. Egy táncmulatságon n számú nő és n számú férfi van jelen. Minden nő ismeri a férfiaknak legalább a felét, és minden férfi ismeri a nőknek legalább a felét. (Az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük fel.) Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre valamennyien úgy, hogy az egymással táncolók ismerjék egymást.

64. Bizonyítsuk be, hogy izolált pontot nem tartalmazó n-pontú páros gráfra

$$f\acute{e}_{\max} + l\acute{e}_{\min} = n.$$

65. A többszörös éleket nem tartalmazó $G(A, B)$ páros gráfban mind az A, mind a B halmaz m pontból áll ($m \geqq 2$). Igazoljuk, hogy ha gráfunknak legalább $m(m-1)+2$ éle van, akkor van Hamilton-köre.