66. Egy társaság m számú lányból és m fiúból áll ($m \geqq 2$). Minden lány ismeri a fiúknak több mint a felét, és minden fiú ismeri a lányoknak több mint a felét. (Az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük fel.) Bizonyítsuk be, hogy felállhatnak valamennyien egyetlen kört alkotó körtánchoz úgy, hogy a körben minden lány két fiúismerőse és minden fiú két lányismerőse között álljon.

6. SZÉLSŐÉRTÉKEK. EXTRÉM GRÁFOK

Lapozzunk vissza az 1. fejezet 16. állításához (röviden: 1.16-hoz). Annak alapján kérdezhetjük: Melyik a *legkisebb* n szám, amely olyan, hogy minden n-pontú egyszerű gráf vagy a komplementere tartalmaz háromszöget? Az 1.16-ból és 1.29-ből kiderül, hogy a keresett szám 6. Tehát 5-pontúak a *legnagyobb* pontszámú olyan egyszerű gráfok, amelyek sem maguk, sem komplementereik nem tartalmaznak háromszöget. A legnagyobb pontszámú ilyen tulajdonságú egyszerű gráfokat a fenti kérdéshez tartozó *extrém gráf*oknak nevezzük; ilyen pl. az 5-szög.

Ha egy gráfban minden pont foka „elég nagy", akkor a gráf tartalmaz kört. Melyik a legkisebb pozitív egész f szám, amely olyan, hogy ha egy gráfban a legkisebb fokszám is legalább f, akkor a gráf tartalmaz kört? Az 1.23 állítása szerint $f=2$, ugyanis vannak kört nem tartalmazó olyan gráfok, amelyekben a legkisebb fokszám 1: az izolált pontot nem tartalmazó ligetek; e ligetek tehát a kérdéshez tartozó extrém gráfok.

Elegendő sok élből is lehet következtetni arra, hogy egy gráf tartalmaz kört: Ha egy n-pontú gráfnak legalább n éle van, akkor van a gráfban kör. Az extrém gráfok itt fák (2.4 és 2.5).

Ha csak a páratlan körökre vagyunk tekintettel, akkor az élek nagy száma helyett kiindulhatunk abból is, hogy kevés független pont választható ki a gráfból. Szem előtt tartva a páros gráf két pontosztálya közül azt, amely legalább annyi pontot tartalmaz, mint a másik, minden páros gráfban $fp_{\max} \geqq \frac{n}{2}$, és ha n páratlan, akkor $fp_{\max} \geqq \frac{n+1}{2}$. Ezt egyöntetűen is ki tudjuk fejezni az alább értelmezett jelöléssel:

Az x valós számhoz azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb x-nél, így jelöljük:

$$[x].$$

Pl. $[-3{,}84]=-4$, $[2{,}7]=2$, minden egész k-ra $[k]=k$ és

$$\left[\frac{k}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{k}{2}, & \text{ha } k \text{ páros,}\\[2mm] \dfrac{k-1}{2}, & \text{ha } k \text{ páratlan.}\end{cases}$$

Új jelölésünkkel: minden n-pontú páros gráfra

$$fp_{\max} \geqq \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Tehát, ha egy gráfra $fp_{\max}$ elég kicsi, éspedig n-pontú gráfra kisebb, mint $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, akkor a gráf nem lehet páros, és így 5.15 szerint szükségképpen tartalmaz páratlan hosszúságú kört. Így páratlan hosszúságú kör tartalmazásának kérdésére szorítkozva, n-pontú extrém gráfok pl. az olyan $G(A, B)$ páros gráfok, amelyekben minden A-beli pont szomszédos minden B-beli ponttal, és A pontjainak száma $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

A felsoroltakhoz hasonló ún. szélsőérték-problémákat tárgyalunk ebben a fejezetben. Az előző fejezetekben található mintegy 30 szélsőérték-probléma közül a fentebb felidézetteken kívül szám szerint is utalunk néhány fontosabbra; érdemes keresni ezekhez tartozó extrém gráfokat: 2.13, 2.14, 4.13, 4.14, 4.35, 5.31, 5.65.

Az említett és az ebben a fejezetben tárgyalásra kerülő feladattípusokon kívül még számos más jellegű szélsőérték-feladat tartozik a gráfelméletbe. Ilyennek tekinthető pl. a 2. fejezetben tárgyalt „körmentes hálózat gazdaságos építése" és az 5. fejezetben tárgyalt „páros gráf maximális független élhalmazának keresése". Találkozni fogunk további szélsőérték-problémákkal e könyv tervezett folytatásában is.

Kombinációk

A továbbiakban hasznunkra lesz néhány ún. kombinatorikai fogalom; most ezekkel ismerkedünk meg.

Gyakorlatok

1. Hány olyan 3-jegyű szám van, amelyek mindegyike a következő 3 számjegyből áll: 2, 7 és 8?

2. Hány olyan 5-jegyű szám van, amelyek mindegyikében kétszer fordul elő a 9-es és háromszor a 4-es számjegy?

3. Hányféleképpen választható ki 5 diák közül 2?

Az 1. gyakorlatot így is szövegezhetnénk: Hányféle sorrendben írható fel a 3 adott számjegy? Ha a 2-est már leírtuk, a 7-est két módon illeszthetjük hozzá: elébe, ill. utána. A 8-ast mindkét esetben három módon sorolhatjuk be: a két jegy elé, közé, ill. után. Ennélfogva az 1. gyakorlatra az alábbi 6 számmal válaszolhatunk:

872	827
782	287
728	278.

Bizonyos számok, tárgyak, általában „elemek" sorrendjeit a szóban forgó elemek *permutáció*inak nevezzük; n számú elem permutációinak számát P_n-nel jelöljük. Az 1. gyakorlat végrehajtási módjából kiolvashatjuk, hogy $P_1 = 1$, $P_2 = 1\cdot 2 = 2$ és $P_3 = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$. Nyilvánvaló, hogy 3 adott elem minden permutációjából egy újabb negyedik elemmel 4 permutáció hozható létre, tehát $P_4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$, és indukciós eljárásunk folytatása révén azt nyerjük, hogy

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n.$$

Szokásos jelölés a következő:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n = n! \qquad \text{(olv.: } n \text{ faktoriális).}$$

Tehát kimondhatjuk az alábbi állítást:

4. *n számú elem permutációinak száma:*

$$P_n = n!$$

Ha a 2. gyakorlatnak megfelelő 5-jegyű számokban a két 9-est is és a három 4-est is különbözőnek tekintjük, majd a 9-esek helyén a két különböző 9-es, a 4-esek helyén pedig a három különböző 4-es valamennyi sorrendjét létrehozzuk, akkor 5 különböző számjegy valamennyi sorrendjét hozzuk létre. Tehát ha a 2. gyakorlatban kérdezett szám x, akkor

$$P_2\cdot P_3\cdot x = P_5,$$

és ebből

$$x = \frac{P_5}{P_2\cdot P_3} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{120}{2\cdot 6} = 10.$$

Ha n számú elem r számú különbözőből adódik, éspedig az elsőből n_1 számú, a másodikból n_2 számú, ..., az r-edikből n_r számú azonos — és így $n_1+n_2+\cdots+n_r = n$ —, akkor ezek megkülönböztethető sorrendjeit az n elem *ismétléses permutáció*inak nevezzük; e permutációk számát $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r}$-nel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy $P_n^{1, 1, \ldots, 1} = P_n$. A 2. gyakorlatra adott választ eredményező okoskodásunk általános érvénye könnyen látható. Ennélfogva a következő összefüggést nyerjük:

$$P_{n_1}\cdot P_{n_2}\cdot \cdots \cdot P_{n_r}\cdot P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = P_n,$$

és így a 4. állítás felhasználásával a következőre jutunk:

5. *n számú elem ismétléses permutációinak száma:*

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}.$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
+	−	+	−	−
−	+	+	−	−
−	+	−	−	+

158. ábra

Jelöljük a 3. gyakorlatban szereplő diákokat így: $a_1, a_2, \ldots, a_5$. A 158. ábrán látható táblázatban feltüntetett 3 sorral egy-egy kiválasztást szemléltettünk: a kiválasztott diákoknak megfelelő oszlopokba + jelet, a ki nem választottakénak megfelelőbe pedig − jelet írtunk. Ezen a módon nyilván valamennyi kiválasztás kijelölhető. Ennélfogva a kérdéses kiválasztások száma annyi, ahány sorrendje lehetséges 2 fajtából (pl. +-ból és −-ból) álló 5 elemnek, ha az egyikből 2, a másikból pedig 3 azonos.

Tehát a keresett szám $P_5^{2,3} = 10$.

Általában n számú elem közül (sorrendre való tekintet nélkül) kiválasztott k számút az *n elem* egy *k-ad osztályú kombinációjá*nak nevezzük; e kombinációk számát C_n^k-val jelöljük.

A 158. ábrán szemléltetett kiválasztási mód általában is alkalmazható. Ezzel a következő összefüggésre jutunk:

$$C_n^k = P_n^{k, n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Ha $(n-k)!$-sal egyszerűsítünk, a következőt kapjuk:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot k},$$

ahol mind a számlálóban, mind a nevezőben k-tényezős szorzat szerepel. E számot szokás így is jelölni:

$$\binom{n}{k} \quad \text{(olv.: } n \text{ alatta } k\text{).}$$

Tehát érvényes a következő állítás:

6. *n elem k-ad osztályú kombinációinak száma:*

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

Nem véletlen, hogy a 2. és 3. gyakorlatban kérdezett szám egyaránt 10, hiszen mindkét szám $P_5^{2,3}$. Ha a teljes 5 gráf pontjai a 3. gyakorlatban szereplő diákoknak felelnek meg, akkor gráfunk élei végpontpárjaikkal éppen az összes diákpárokat jelölik ki. Ha a teljes 5-gráf pontjait sorszámokkal látjuk el, akkor az élek végpontpárjaik sorszámaival a 2. gyakorlatban szereplő két 9-es összes lehetséges elhelyezéseit is kijelölik a szóban forgó 5-jegyű számokban. Tehát a 2. és 3. gyakorlatban kérdezett szám egyaránt a teljes 5-gráf éleinek száma.

Világos, hogy a teljes n-gráf éleinek száma annyi, ahányféleképpen ki lehet választani n pontból kettőt egy-egy él 2 végpontjaként; ez pedig n elem másod osztályú kombinációinak száma, vagyis $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, megegyezésben 1.11-gyel.

Gyakorlatok

7. Igazoljuk, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

8. Igazoljuk, hogy $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

A 7. gyakorlatban felírt egyenlőség mindkét oldala $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Kombinatorikai értelmezéssel pedig így adódik az egyenlőség: Annyiféleképpen lehet n számú elemből k számút kiválasztani, ahányféleképpen a többi $n-k$ számút ott lehet hagyni (vagyis otthagyással ki lehet választani), tehát

$$C_n^k = C_n^{n-k},$$

ez pedig a 6. állítás szerint a kívánt egyenlőséget adja.

Ha $k=0$, akkor a 7. gyakorlatban szereplő egyenlőség bal oldala értelmetlen, jobb oldala pedig $\binom{n}{n} = 1$. Ezért szokásos az $\binom{n}{0} = 1$ — és az ebből kínálkozó $0!=1$ — önkényes értelmezés, amely összhangban van az $\binom{n}{k}$ számok kombinatorikai eredetével is, ti. n számú elemből 0 számút 1-féleképpen lehet kiválasztani: úgy, hogy semmit sem választunk ki belőlük.

Megjegyezzük, hogy az

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

értelmezés független e szám kombinatorikai eredetétől (pl. n lehet bármely valós szám is), de mi mindig megköveteljük, hogy $\binom{n}{k}$-ban n és k nem negatív egész legyen; $k>n$-re mindenesetre 0 lesz $\binom{n}{k}$ értéke, mert ekkor a számláló tényezői közt 0 is szerepel.

Az $\binom{n}{0} = 1$ értelmezésből rögtön látható, hogy $k=0$-ra fennáll a 8. gyakorlatban szereplő egyenlőség, hiszen

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1+n = \binom{n+1}{1}.$$

Ha pedig $k>0$, hozzuk a szóban forgó egyenlőség bal oldalát közös nevezőre, és emeljük ki a számlálókból, a közös tényezőket:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(k+1)+n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(k+1+n-k)}{(k+1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Ezt kellett igazolnunk.

Térjünk vissza a fejezet elején felidézett problémához. Jelöljük $n(3,3)$-mal a legkisebb egész számot, amely olyan, hogy minden legalább $n(3,3)$-pontú egyszerű gráf vagy a komplementere tartalmaz háromszöget. Megállapítottuk, hogy $n(3,3)=6$. Kínálkozik e problémát úgy általánosítani, hogy háromszög helyett teljes gráfot mondunk. Később (22. állítás) be fogjuk bizonyítani, hogy minden pozitív egész m és k számhoz létezik olyan pontszám, amely mellett bármely egyszerű gráf vagy maga tartalmaz teljes m-gráfot, vagy a komplementere teljes k-gráfot; tehát létezik a következő tulajdonságú $n(m,k)$ Ramsey-féle szám is:

(1) $n(m,k)$ a legkisebb egész szám, amely olyan, hogy minden legalább $n(m,k)$-pontú egyszerű gráf tartalmaz teljes m-gráfot, vagy komplementere tartalmaz teljes k-gráfot. Extrém gráfok azok az $n(m,k)-1$-pontú egyszerű gráfok, amelyek nem tartalmaznak teljes m-gráfot, komplementereik pedig nem tartalmaznak teljes k-gráfot.

Az $n(m,k)$ számok közül csupán néhánynak ismeretes a pontos értéke (pl. $n(3,3)=6$ és az 5-szög extrém gráf; vö. a 94. feladattal). Általában adott m-hez és k-hoz csak olyan számokat sikerült meghatározni, amelyeknél $n(m,k)$ nem kisebb vagy nem nagyobb; az előbbiek $n(m,k)$ *alsó korlát*jai; az utóbbiak pedig *felső korlát*jai. Most ezekre a problémákra fordítjuk figyelmünket.

Ha a G gráf k számú pontjából álló P ponthalmaz G komplementerében teljes k-gráfot feszít, akkor P a G gráfnak független ponthalmaza; más szóval: van G-ben k független pont. Ennek alapján azt is mondhatjuk, hogy

(2) $n(m,k)$ a legkisebb egész szám, amely olyan, hogy minden legalább $n(m,k)$-pontú egyszerű gráf tartalmaz teljes m-gráfot vagy k független pontot. Extrém gráfok azok a teljes m-gráfot nem tartalmazó $n(m,k)-1$-pontú egyszerű gráfok, amelyekre $fp_{\max} < k$.

G-t teljes n-gráffá egészítjük ki, és ennek éleit két színnel színezzük: G éleit pirossal, komplementerének éleit pedig kékkel. Azt is mondjuk, hogy az így *színezett teljes n-gráf piros-kék*, ebben G *piros*, komplementere pedig *kék*. Ezek szerint az (1) és (2) értelmezéssel egyenértékű az alábbi is:

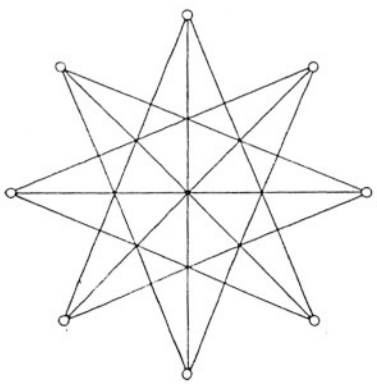
(3) $n(m, k)$ a legkisebb egész szám, amely olyan, hogy minden legalább $n(m, k)$-pontú piros-kék teljes gráf tartalmaz piros teljes m-gráfot vagy kék teljes k-gráfot. Extrém gráfok azok a piros-kék teljes $n(m, k)-1$-gráfok, amelyek nem tartalmaznak sem piros teljes m-gráfot, sem kék teljes k-gráfot.

A piros-kék színezésekben a két szín felcserélésével a következő egyenlőséget nyerjük:

9. *Minden természetes m és k szám mellett* $n(m, k) = n(k, m)$.

A teljes 1-gráfnak nincs éle; azt is mondhatjuk, hogy a teljes 1-gráf valamennyi éle piros vagy éppen kék. Ennélfogva mondhatjuk, hogy $n(1, k) = 1$. A teljes 2-gráfnak egyetlen éle van; tehát ha egy teljes gráf nem tartalmaz piros teljes 2-gráfot, akkor minden éle kék. Ebből következik, hogy $n(2, k) = k$. Tehát a 9. állítást is figyelembe véve a következő állítást nyertük:

10. *Minden természetes m és k szám mellett* $n(1, k) = n(m, 1) = 1$; $n(2, k) = k$ *és* $n(m, 2) = m$.



159. ábra

Gyakorlatok

11. Van-e háromszög a 159. ábrán látható gráfban? Mekkora a gráfra az $fp_{\max}$ érték?

12. Az előző gyakorlatra adott válasz alapján keressünk $n(3, 4)$-re lehetőleg nagy alsó korlátot.

Feladatok

13. Egy könyvtárban adott napon megfordult személyekről az alábbiakat tudjuk:

a) Bármely 8 látogató között található két olyan személy, akik a könyvtárban találkoztak egymással.

b) Két olyan személy nem találkozott egymással a könyvtárban, akiknek mindegyike találkozott egy harmadikkal is.

Bizonyítsuk be, hogy az adott napon senki sem találkozhatott a könyvtárban 7-nél több személlyel.

14. Értelmezzük minden természetes k szám mellett a $3k-1$-pontú egyszerű H_k gráfot a következőképpen: H_k pontjai egy K körvonalon elhelyezkedő szabályos $3k-1$-szög csúcsai (2-szögön K egy átmérőjét értve), és H_k két pontja pontosan akkor szomszédos, ha a két pont távolsága nagyobb, mint a K-ba írt szabályos háromszög oldala. Igazoljuk, hogy e gráfok egyike sem tartalmaz háromszöget, és H_k-ra $fp_{\max} = k$.

15. Milyen nagy alsó korlátot nyerünk $n(3, k)$-ra az előző feladatban értelmezett H_k gráfok tulajdonságai alapján?

16. Bizonyítsuk be, hogy $n(3, 4) = 9$.

A 11. gyakorlat első kérdéséhez figyeljük meg, hogy bármely pont szomszédjai független ponthalmazt alkotnak; tehát gráfunk nem tartalmaz háromszöget. Bármely pont 4 másikkal nem szomszédos, de e 4 között található két-két szomszédos; tehát gráfunkra $fp_{\max} = 3$.

A 8-pontú 159. ábrában nincs háromszög és nincs 4 független pont. Ennélfogva $n(3, 4) \geq 9$, a 12. gyakorlat utasításának megfelelően.

Ha a 13. feladatban szereplő személyek közül valaki 8-cal is találkozott volna, akkor e 8 között *a)* szerint volna kettő, akik egymással is találkoztak volna *b)*-vel ellentmondásban. Tehát az adott napon egyetlen látogató sem találkozhatott a könyvtárban 7-nél több személlyel.

Ugyanezzel a gondolattal oldható meg a 13. feladatnak az az általánosítása, amelyet úgy nyerünk belőle, hogy 7 helyett k-t, 8 helyett pedig $k+1$-et mondunk. Ha most a szóban forgó személyeknek egy-egy gráfpontot feleltetünk meg, és két pontot szomszédosnak tekintünk, ha a két megfelelő személy találkozott egymással, akkor a kapott egyszerű G gráfra vonatkozóan *a)* azt jelenti, hogy nincs G-ben $k+1$ független pont, vagyis, hogy G-re $fp_{\max} \leqq k$, *b)* azt jelenti, hogy nincs G-ben háromszög, a bizonyítandó állítás pedig az, hogy G egyetlen pontjának foka sem nagyobb k-nál. Ugyanezzel a gondolattal az is adódik, hogy G egyetlen pontjának foka sem lehet nagyobb $fp_{\max}$-nál, hiszen G bármely pontjának szomszédjai független ponthalmazt alkotnak, mert G-ben nincs háromszög (vö. a 11. gyakorlatra adott válasszal).

Ezzel a következő, később is többször felhasználható állítást nyertük:

17. *Háromszöget nem tartalmazó egyszerű gráf minden pontjára:*

$$\varphi(p) \leqq fp_{\max}.$$

A 14. feladatban értelmezett gráfok közül H_1 egy élből és annak 2 végpontjából áll, H_2 5-szög (l. a 16. ábrán a bal oldali gráfot), H_3 pedig a 159. ábrán látható. Jelöljük a K körbe írt szabályos háromszög oldalának hosszát h-val. K-nak h-nál hosszabb húrjához tartozó mindkét íve hosszabb, mint K kerületének harmada. Ebből következik, hogy K-ba írt bármely háromszögnek van olyan oldala, amely nem hosszabb h-nál. Ennélfogva a H_k gráfok egyike sem tartalmaz háromszöget.

Jelöljük H_k pontjait k bejárását követő sorrendben így:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{3k-1}, a_{3k} = a_1.$$

Gráfunk szimmetriája következtében minden pont szerepel valamely maximális független ponthalmazban. Hány pontot tartalmaz egy olyan, amelyben a_1 szerepel? Könnyű belátni, hogy (amint a $k=3$ esetben a 159. ábrán látható) a_1 szomszédjai: $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{2k}$. Tehát az a_1-gyel nem szomszédos pontok:

$$\begin{array}{lll} a_2, & a_3, & \ldots, a_k, \\ a_{2k+1}, & a_{2k+2}, & \ldots, a_{3k-1}. \end{array}$$

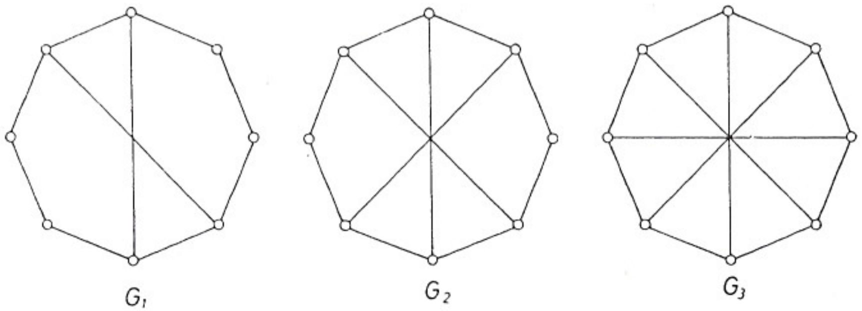
Az egy sorhoz tartozó pontok függetlenek. Az egy oszlopban elhelyezkedő párok távolságai megegyeznek a_1-nek a_{2k}-tól vett távolságával, tehát e párok mind szomszédosak. Ennélfogva az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pontok H_k egy maximális független ponthalmazát alkotják, és így H_k-ra $fp_{\max}=k$.

Megállapítottuk, hogy a $3k-1$-pontú H_k gráfban nincs sem teljes 3-gráf, sem $k+1$ független pont. Ennélfogva $n(3, k+1) \geqq 3k$. Ha ebbe k helyett $k-1$-et írunk, a 15. feladat kérdésére a következő választ nyerjük:

18. *Minden természetes k szám mellett*

$$n(3, k) \geqq 3(k-1).$$

Ennek alapján a 16. feladathoz csupán azt kell belátnunk, hogy bármely piros-kék teljes 9-gráf tartalmaz piros háromszöget vagy kék teljes 4-gráfot. Jelöljünk egy piros-kék teljes 9-gráfot T-vel és egy T-beli pontot p-vel. A p-hez illeszkedő 8 él mindegyike piros vagy kék, tehát e 8 él között van legalább 4 azonos színű. A 9. állítás alapján feltehetjük, hogy p-hez 4 piros él illeszkedik; jelöljük T'-vel T-nek e 4 piros él p-től különböző végpontjai feszítette részgráfját. Ha van T'-nek piros éle, akkor van T-ben p-t tartalmazó piros háromszög. Ha T' minden éle kék, akkor T tartalmazza a kék T' teljes 4-gráfot. Ezzel megoldottuk a 16. feladatot.



160. ábra

A 160. ábrán látható három 8-pontú gráf közül G_1-ből úgy hozható létre G_2, ill. G_3, hogy G_1-et 1, ill. 2 éllel bővítjük. Belátható, hogy G_3 izomorf a 159. ábrával.

De közvetlenül is könnyen látható, hogy G_3 nem tartalmaz háromszöget, és így G_2 és G_1 sem. Könnyű ellenőrizni, hogy G_1-ben nincs 4 független pont; ebből következik, hogy G_2-ben és G_3-ban sincs. Ennélfogva mindhárom $n(3, 4)-1 = 8$-pontú gráf extrém gráf. Be lehet látni, hogy nincs ide tartozó más extrém gráf, azonban ezt nem részletezzük, mert hosszadalmas lenne.

Most már rátérünk az $n(m, k)$ számok létezésének bizonyítására. Az előzőek szerint $n(3, 4)=9$, $n(2,4)=4$ és $n(3, 3)=6$. Tehát

$$n(3, 4) < n(2, 4)+n(3, 3).$$

Bebizonyítjuk ennek az egyenlőtlenségnek a következő két állításban megfogalmazott általánosítását:

19. *Ha $n(m-1, k)$ és $n(m, k-1)$ létezik, akkor $n(m, k)$ is létezik és*

$$n(m, k) \leqq n(m-1, k)+n(m, k-1).$$

20. *Ha $n(m-1, k) = 2p$ és $n(m, k-1) = 2q$ (p és q természetes számok), akkor*

$$n(m, k) < 2p+2q.$$

A 19. állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $n(m-1, k)$ és $n(m, k-1)$ létezik, és jelöljük a tetszőlegesen színezett piros-kék teljes $n(m-1, k)+n(m, k-1)$-gráfot T-vel. Azt kell megmutatnunk, hogy T tartalmaz piros teljes m-gráfot vagy kék teljes k-gráfot.

Jelöljük T egy pontját r-rel, T-nek az r-hez illeszkedő piros, ill. kék élek r-től különböző végpontjai feszítette részgráfját T_1-gyel, ill. T_2-vel és e gráfok pontjainak számát n_1-gyel, ill. n_2-vel. Ekkor

$$n_1+n_2+1 = n(m-1, k)+n(m, k-1).$$

Tegyük fel először, hogy $n_1 < n(m-1, k)$. Ekkor $n_2 \geqq n(m, k-1)$, és így T_2 tartalmaz piros teljes m-gráfot — amelyet T is tartalmaz —, vagy tartalmaz kék teljes $k-1$-gráfot, amelyhez r-et és szükség szerint kék éleket hozzávéve, T-beli kék teljes k-gráfot nyerünk.

Ha $n_1 \geqq n(m-1, k)$, akkor is a fentihez hasonló okoskodással (T_2 helyett T_1-re fordítva figyelmünket) látható be, hogy van T-ben piros teljes m-gráf vagy kék teljes k-gráf. Ennélfogva a 19. állítás bizonyított.

A 20. állítás bizonyításához jelöljük a tetszőlegesen színezett piros-kék teljes $2p+2q-1$-gráfot T-vel. Azt kell megmutatnunk, hogy T tartalmaz piros teljes m-gráfot vagy kék teljes k-gráfot. Jelöljük T egy pontját r-rel. Erre:

$$\varphi(r) = 2p+2q-2,$$

és így az alábbi 3 eset valamelyike áll fenn:

(a) Az r-hez illeszkedő élek közül legalább $2p$ piros.

(b) Az r-hez illeszkedő élek közül legalább $2q$ kék.

(c) Pontosan $2p-1$ piros és $2q-1$ kék él illeszkedik r-hez.

pontjai feszítette részgráfját T_1-gyel. T_1 pontjainak száma legalább $n(m-1, k)$. Ebből következik, hogy van T_1-ben piros teljes $m-1$-gráf vagy kék teljes k-gráf. Ebből a fentiekhez hasonlóan adódik, hogy van T-ben piros teljes m-gráf vagy kék teljes k-gráf.

A (b) esetben az r-hez illeszkedő kék élek végpontjait tekintve, az (a) esethez hasonlóan okoskodhatunk.

Az nem fordulhat elő, hogy T minden pontjára a (c) eset álljon fenn, mert akkor a páratlan számú pontot tartalmazó T-beli piros gráfban minden pont foka $2p-1$, vagyis páratlan volna; ez azonban 1.9 szerint lehetetlen. Tehát választhatjuk r-et úgy, hogy az (a) vagy a (b) eset teljesüljön. Ezzel a 20. állítás is bizonyított.

Most a 19. állítás alapján be fogjuk bizonyítani, hogy az $n(m, k)$ számok léteznek, és e számokra felső korlátot is adunk. Előbb egy állításokra vonatkozó általános állítást bizonyítunk, majd ezt a mi eseteinkre alkalmazva nyerjük a kívánt eredményeket. Általános állításunk a következő:

21. *$A(m, k)$ minden természetes m és k szám mellett értelmezett állítást jelöl: Tegyük fel, hogy $A(1, k)$ és $A(m, 1)$ bármely k és m mellett igaz; továbbá $m>1$ és $k>1$ esetén abból, hogy $A(m-1, k)$ és $A(m, k-1)$ igaz, következik, hogy $A(m, k)$ is igaz. Ekkor $A(m, k)$ minden természetes m és k szám mellett igaz.*

Állításunkat m-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Feltevés szerint $A(1, k)$ igaz bármely k mellett. Tegyük most fel, hogy $A(m, k)$ igaz valamely m és bármely k mellett. Bebizonyítjuk, hogy akkor $A(m+1, k)$ is igaz bármely k mellett. Ezt az utóbbi állítást k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

Tudjuk, hogy $A(m+1, 1)$ igaz a szóban forgó m mellett is. Tegyük fel, hogy ezen m és valamely k mellett $A(m+1, k)$ igaz. Bebizonyítjuk, hogy akkor $A(m+1, k+1)$ is igaz (és ezért bármely k mellett $A(m+1, k)$ is igaznak bizonyul). Minthogy előző indukciós feltevésünk szerint $A(m, k)$ igaz a szóban forgó m és bármely k mellett, a második indukciós feltevésben szereplő k-val a két feltevés szerint igaz $A(m, k+1)$ és $A(m+1, k)$; ennélfogva a 21. állításban szereplő feltevés szerint igaz $A(m+1, k+1)$ is.

Ezzel bebizonyítottuk a 21. állítást.

Ha $A(m, k)$ azt jelenti, hogy $n(m, k)$ létezik, akkor a 10. állítás első fele és a 19. állítás szerint teljesülnek a 21. állítás feltételei, és így a következő állítást nyerjük:

22. *$n(m, k)$ minden természetes m és k szám mellett létezik.*

Jelentse most $A(m, k)$ azt, hogy

$$n(m,k) \leqq \binom{m+k-2}{m-1}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy teljesülnek-e ebben az esetben a 21. állítás feltételei. Minthogy $m=1$ vagy $k=1$ esetén a fenti egyenlőtlenség jobb oldala egyaránt 1, a 10. állítás első fele szerint igaz $A(1, k)$ és $A(m, 1)$ minden m és k mellett. Tegyük most fel,

$$n(m-1, k) \leqq \binom{m+k-3}{m-2} \quad \text{és} \quad n(m, k-1) \leqq \binom{m+k-3}{m-1}.$$

Ekkor a 8. gyakorlatban szereplő egyenlőség alkalmazásával a 19. állítás szerint

$$n(m, k) \leqq n(m-1, k)+n(m, k-1) \leqq \binom{m+k-3}{m-2}+\binom{m+k-3}{m-1} = \binom{m+k-2}{m-1},$$

ebből pedig kiderül, hogy $A(m, k)$ igaz.

Tehát $A(m, k)$ mostani jelentése esetén teljesülnek a 21. állítás feltételei, és így érvényes a következő állítás:

23. *Minden természetes m és k szám mellett*

$$n(m, k) \leqq \binom{m+k-2}{m-1}.$$

Ebből $n(3, k)$-ra a $\binom{k+1}{2} = \frac{(k+1)k}{2}$ felső korlát adódik. Ha $k \geqq 4$, akkor ennél „valamivel jobb", vagyis kisebb felső korlátot is tudunk adni az $n(3, k)$ számokra, ugyanis bebizonyítjuk a következő állítást:

24. *Minden természetes k szám mellett*

$$n(3, k) \leqq \binom{k+1}{2} - \left[\frac{k}{2}\right] + 1.$$

Állításunkat k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $k=1, 2$ és 3, akkor a 24. állítás a 23-nak következménye. Tegyük fel, hogy valamely 1-nél nagyobb k mellett

$$n(3, k-1) \leqq \binom{k}{2} - \left[\frac{k-1}{2}\right] + 1.$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy háromszöget nem tartalmazó bármely $n = \binom{k+1}{2} - \left[\frac{k}{2}\right] + 1$-pontú egyszerű gráfban van k független pont. Indirekt okoskodásunkhoz tegyük fel, hogy egy háromszöget nem tartalmazó n-pontú egyszerű G gráfra $fp_{\max} \leqq k-1$. A 17. állítás szerint minden G-beli p pontra

$$\varphi(p) \leqq k-1.$$

Először tegyük fel, hogy k páros: $k=2s$. Ha minden pont foka $k-1$ volna, akkor 1.9 szerint n-nek szükségképpen párosnak kellene lennie; ámde

$$n = \binom{2s+1}{2} - \left[\frac{2s}{2}\right] + 1 = \frac{(2s+1)2s}{2} - s + 1 = 2s^2+1,$$

vagyis n páratlan. Tehát van olyan G-beli q pont, amelyre

$$\varphi(q) \leqq k-2.$$

Jelöljük G-nek a q-val nem szomszédos, q-tól különböző pontjai feszítette részgráfját G_0-val. A háromszöget nem tartalmazó G_0 pontjainak száma (a 8. gyakorlatban szereplő egyenlőséget figyelembe véve) legalább

$$n-(k-2)-1 = n-k+1 = \binom{k+1}{2} - \left[\frac{k}{2}\right] + 1 - k + 1 =$$

$$= \left(\binom{k+1}{2} - \binom{k}{1}\right) - \left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right) + 1 = \binom{k}{2} - \left[\frac{k-1}{2}\right] + 1.$$

Ennélfogva indukciós feltevésünk szerint van G_0-ban $k-1$ független pont. Ehhez q-t hozzávéve k számú G-beli független pontot kapunk; ez pedig ellentmondás.

Most tegyük fel, hogy k páratlan. Értelmezzük a G_0 gráfot a fentiekhez hasonlóan, q helyett egy legfeljebb $k-1$-edfokú pontot véve. Most G_0 pontjainak száma legalább

$$n-(k-1)-1 = \binom{k+1}{2} - \left[\frac{k}{2}\right] + 1 - k = \left(\binom{k+1}{2} - \binom{k}{1}\right) - \left[\frac{k}{2}\right] + 1 =$$

$$= \binom{k}{2} - \left[\frac{k-1}{2}\right] + 1.$$

Okoskodásunkat a fentihez hasonlóan folytatva, ismét ellentmondásra jutunk.

Ezzel bebizonyítottuk a 24. állítást.

Amint már említettük, csupán néhány $n(m, k)$ számnak ismerjük a pontos értékét. Az eddig előfordultakon kívül tudjuk pl., hogy $n(3, 5) = 14$ (l. a 97. feladatot), $n(3, 6) = 18$, $n(4, 4) = 18$.

Az $n(m, k)$ számokat meghatározó megfogalmazások közül (3) alapján a következőképpen általánosítható a probléma: A teljes gráfok éleit 2 szín helyett s számú színnel színezve kérdezhetjük, hogy melyik a legkisebb $n(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ szám, amely olyan, hogy bármely legalább $n(m_1, m_2, \ldots, m_s)$-pontú színezett teljes gráf tartalmaz első színű teljes m_1-gráfot vagy második színű teljes m_2-gráfot ..., vagy s-edik színű teljes m_s-gráfot. Ezen általánosabb probléma vizsgálatába nem bocsátkozunk, csupán megjegyezzük, hogy a felsoroltakon kívül mindössze néhány $n(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ számnak ismerjük a pontos értékét; pl. $n(3, 3, 3) = 17$.

Feladatok

25. Az irányított $\vec{G}$ gráf nem tartalmaz irányított kört. Jelöljük A_0-lal azoknak a $\vec{G}$-beli p pontoknak a halmazát, amelyekre

$$\varphi_{be}(p) = 0,$$

jelöljük továbbá A_i-vel $(i = 1, 2, \ldots)$ azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek mindegyike elérhető valamely A_0-beli pontból i hosszúságú (azaz $i-1$ élből álló) irányított úttal, de hosszabbal nem. Bizonyítsuk be a következőket:

a) $\vec{G}$ minden pontja szerepel valamelyik A_i-ben.

b) $\vec{G}$ minden élének kezdőpontja kisebb indexű A_i-be tartozik, mint a végpontja.

26. Jelöljük $f_s(n)$-nel azt a legnagyobb egész számot, amelyre fennáll a következő: Bárhogyan is színezzük a teljes n-gráf minden élét s számú szín valamelyikével, mindig található benne csupa azonos színű élből álló legalább $f_s(n)$-pontú összefüggő részgráf. Bizonyítsuk be, hogy bármely természetes n szám mellett

$$f_2(n) = n.$$

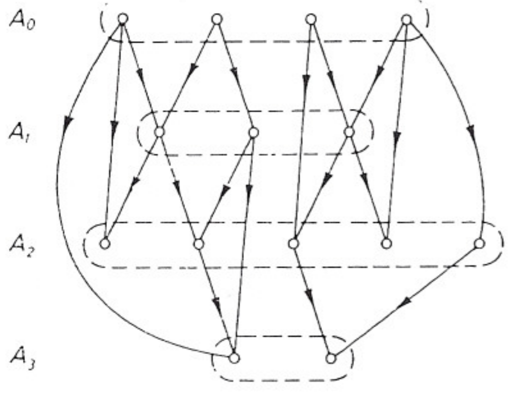
27. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív páros szám, akkor

$$f_{n-1}(n) = 2.$$

A 25. feladat *a)* állításához elegendő azt belátnunk, hogy $\vec{G}$-nek A_0-ba nem tartozó bármely q pontja elérhető irányított úttal valamely A_0-beli pontból (ilyennek létezése a bizonyítás során ki fog derülni), hiszen az ilyen utak közül egy leghosszabb meghatározza q helyét. Minthogy q nem A_0-beli, van $\vec{G}$-nek olyan éle, amelynek q végpontja. Ennélfogva q elérhető valamely $\vec{G}$-beli pontból irányított úttal. Jelöljünk $\vec{L}$-lel a q végpontú irányított utak közül egy maximális hosszút. Ha $\vec{L}$-nek az r-rel jelölt kezdőpontjára $\varphi_{be}(r) \neq 0$ volna, akkor volna $\vec{G}$-nek egy irányított (s, r) éle. Mármost ha s $\vec{L}$-hez tartoznék, akkor $\vec{G}$ tartalmazna irányított kört, ha pedig s nem tartoznék $\vec{L}$-hez, akkor az (s, r) éllel bővítve arra jutnánk, hogy $\vec{L}$ nem lehetett maximális. Tehát r be-foka szükségképpen 0, vagyis r A_0-beli, és így az *a)* állítás máris bizonyított.

A *b)* állítás bizonyításához jelölje (p_i, p_j) $\vec{G}$-nek egy élét, amelyre p_i A_i-be, p_j pedig A_j-be tartozik. Ha $i = 0$, akkor $j > i$, hiszen p_j, amelybe élünk befut, nem tartozhat A_0-ba. Tehát szorítkozhatunk az $i \neq 0$ esetre. Ekkor p_i elérhető valamely A_0-beli pontból az i hosszúságú $\vec{L}$ úttal. Mármost p_j nem tartozhat $\vec{L}$-hez, mert akkor G tartalmazna irányított kört. Így $\vec{L}$-et a (p_i, p_j) éllel bővítve adódik, hogy p_j i-nél hosszabb úttal is elérhető valamely A_0-beli pontból; ennélfogva $j > i$. Ezzel bebizonyítottuk a *b)* állítást is.

Tehát irányított kört nem tartalmazó $\vec{G}$ gráf szerkezete az $A_0, A_1, A_2, \ldots$ halmazok segítségével jól áttekinthető (l. pl. a 161. ábrát). A 25. feladat megoldásával azt is



161. ábra

nyertük, hogy G-nek minden A_i független ponthalmaza; továbbá ha az A_i halmazok száma k (azaz A_{k-1} a legnagyobb indexű A_i), akkor $\vec{G}$ leghosszabb irányított útjainak hossza $k-1$. Tehát ha nincs G-ben m független pont, akkor minden A_i legfeljebb $m-1$ pontot tartalmaz, és így $\vec{G}$ pontjainak száma legfeljebb $(m-1)k$. Ennélfogva bebizonyítottuk a következő állítást:

28. *Ha a természetes m és k szám mellett a G gráfnak legalább $(m-1)k+1$ pontja van, akkor G tartalmaz m független pontot, vagy G minden olyan irányításával nyert irányított gráf, amelyben nincs irányított kör, tartalmaz k hosszúságú irányított utat.*

Megjegyzések: 1. E problémához tartozó extrém gráf bármely m és k mellett pl. a következő $\vec{G}_0$ gráf: G_0 $m-1$ számú komponensből áll, valamenynyi komponens teljes k-gráf. Minden komponensből besorolunk egy-egy pontot A_0-ba, A_1-be, ..., A_{k-1}-be, majd a fentieknek megfelelő irányítással állítjuk elő a $\vec{G}_0$ gráfot.

2. A 28. állítás érdekes számelméleti alkalmazását nyerjük, ha különböző egész számokhoz az alábbi módon rendeljük a $\vec{G}$ gráfot: $\vec{G}$ pontjait a szóban forgó egész számoknak feleltetjük meg; az (a, b) irányított él pedig azt jelenti, hogy a b-nek megfelelő szám osztható az a-nak megfelelővel. Ekkor G bármely független ponthalmazának megfelelő számok közül egyik sem osztható a többiek egyikével sem, ha pedig $\vec{G}$ egy $\vec{L}$ útját irányt követően bejárva, rendre az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számoknak megfelelő pontokat érintjük, akkor a_{i+1} osztható a_i-vel ($i=1, 2, \ldots, k-1$). $\vec{G}$ nyilvánvalóan nem tartalmazhat irányított kört. Ennélfogva a 28. állítással a következőt is bizonyítottuk: *$(m-1)k+1$ különböző egész szám között vagy van m számú olyan, hogy közülük egyik sem osztható a többi $m-1$ egyikével sem, vagy kiválasztható közülük egy $k+1$ tagú sorozat úgy, hogy abban mindegyik osztható az előtte állóval.* Adott m és k mellett az 1.-ben szereplő extrém gráfnak megfelel pl. a következő: A_0 pontjainak $m-1$ számú különböző prímszámot feleltetünk meg; ezek négyzeteit, köbeit, ..., k-adik hatványait pedig rendre $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ pontjainak feleltetjük meg. Az így nyert $(m-1)k$ számú egészre nem teljesül a 28. állításnak megfelelő fenti állítás.

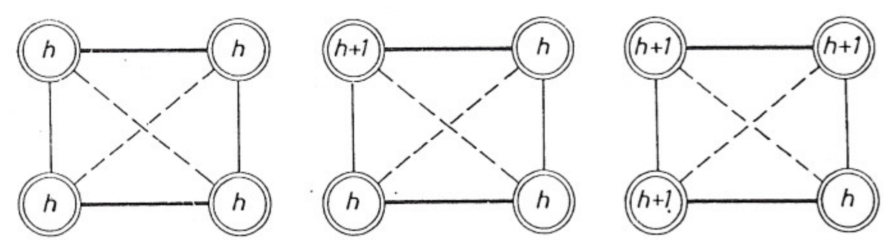
A G teljes n-gráf egy tetszés szerinti piros-kék színezésében nevezzük most piros gráfnak azt a részgráfot, amely G minden pontját és piros éleit tartalmazza. Ennek komplementere kék és ugyancsak n-pontú. A komplementerek egyike pedig az 1.42 feladat állítása szerint összefüggő. Ezzel megoldottuk a 26. feladatot.

Megjegyzés: Ez emlékeztet az $n(m, k)$ Ramsey-számok problémájára, hiszen itt arról van szó, hogy vagy G, vagy komplementere rendelkezik egy-egy rájuk kiszabo tulajdonsággal. Ugyanilyen értelemben mondhatjuk „Ramsey-típusú"-nak a 2 állítást is; hiszen abban az, hogy G tartalmaz m független pontot, így is kimondható G komplementere tartalmaz teljes m-gráfot.

A 27. feladathoz egyrészt bármely $n \geq 2$-re nyilván fennáll: $f_{n-1}(n) \geq 2$; másrész az 5.1 állítás szerint páros n-re a teljes n-gráf $n-1$ elsőfokú faktorra bontható fe Ha egy ilyen felbontásban az ugyanabba a faktorba tartozó éleket azonosra, a külön bözőbe tartozókat pedig különböző színűre festjük, akkor $n-1$ színt használtunk és az azonos színű élek függetlenek lesznek. Ebből következik, hogy páros n melle $f_{n-1}(n) \leq 2$. Ezzel megoldottuk a 27. feladatot.

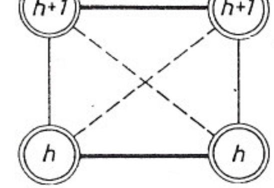
Vizsgáljuk most $f_s(n)$-et páratlan s esetén. E célból jelöljük páratlan s esete a teljes $s+1$-gráf pontjait így: $a_1, a_2, \ldots, a_{s+1}$. Bontsuk fel gráfunkat elsőfok faktorokra, és színezzük ezeket a fenti módon s színnel. Most az s-nél nagyobb tetsző leges természetes n szám mellett a következő módon hozzuk létre az ugyancsa s színűre festett teljes n-gráfot: Osszuk el n-et $s+1$-gyel; jelöljük a hányadost h-va és a maradékot m-mel. Ekkor

$$n = (s+1)h+m \qquad (0 \leq m < s+1).$$

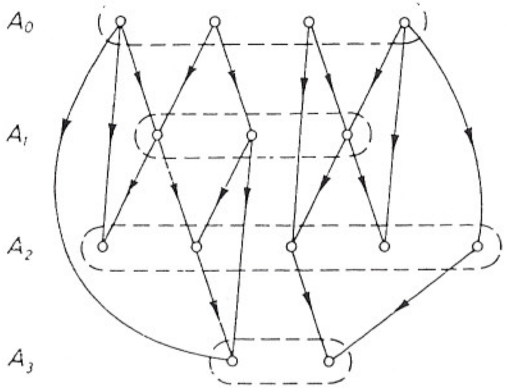


162. ábra

Töröljük a teljes $s+1$-gráf pontjait, és iktassunk be helyükre egy-egy, a színkés letünkkel tetszőlegesen színezett teljes gráfot, mégpedig m számú törölt pont helyé egy-egy teljes $h+1$-gráfot, a többi $s+1-m$ számú pont helyére pedig egy-egy telj h-gráfot. Jelöljük az a_i helyére került teljes gráfot G vel. Tegyük szomszédossá G_i minden pontját G_j mi den pontjával, mégpedig $\{a_i, a_j\}$ színével megegye színű élekkel. Így egy s-színűre festett teljes n-gráfot ny rünk. Az $s=3$ esetben a 162., ill. a 163. ábrán szemlélt tünk aszerint, hogy $m=0$ vagy 1, vagy 3, ill. 2. A tetszől gesen színezett teljes gráfokat csak egy-egy dupla karik és azokba írt pontszám képviseli; két dupla karikát ös szekapcsoló vonal h^2, ill. $h(h+1)$, ill. $(h+1)^2$ szám



163. ábra



161. ábra

nyertük, hogy G-nek minden A_i független ponthalmaza; továbbá ha az A_i halmazok száma k (azaz A_{k-1} a legnagyobb indexű A_i), akkor $\vec{G}$ leghosszabb irányított útjainak hossza $k-1$. Tehát ha nincs G-ben m független pont, akkor minden A_i legfeljebb $m-1$ pontot tartalmaz, és így $\vec{G}$ pontjainak száma legfeljebb $(m-1)k$. Ennélfogva bebizonyítottuk a következő állítást:

28. *Ha a természetes m és k szám mellett a G gráfnak legalább $(m-1)k+1$ pontja van, akkor G tartalmaz m független pontot, vagy G minden olyan irányításával nyert irányított gráf, amelyben nincs irányított kör, tartalmaz k hosszúságú irányított utat.*

Megjegyzések: 1. E problémához tartozó extrém gráf bármely m és k mellett pl. a következő $\vec{G}_0$ gráf: G_0 $m-1$ számú komponensből áll, valamenynyi komponens teljes k-gráf. Minden komponensből besorolunk egy-egy pontot A_0-ba, A_1-be, ..., A_{k-1}-be, majd a fentieknek megfelelő irányítással állítjuk elő a $\vec{G}_0$ gráfot.

2. A 28. állítás érdekes számelméleti alkalmazását nyerjük, ha különböző egész számokhoz az alábbi módon rendeljük a $\vec{G}$ gráfot: $\vec{G}$ pontjait a szóban forgó egész számoknak feleltetjük meg; az (a, b) irányított él pedig azt jelenti, hogy a b-nek megfelelő szám osztható az a-nak megfelelővel. Ekkor G bármely független ponthalmazának megfelelő számok közül egyik sem osztható a többiek egyikével sem, ha pedig $\vec{G}$ egy $\vec{L}$ útját irányt követően bejárva, rendre az $a_1, a_2, \dots, a_k$ számoknak megfelelő pontokat érintjük, akkor a_{i+1} osztható a_i-vel $(i=1, 2, \dots, k-1)$. $\vec{G}$ nyilvánvalóan nem tartalmazhat irányított kört. Ennélfogva a 28. állítással a következőt is bizonyítottuk: $(m-1)k+1$ *különböző egész szám között vagy van m számú olyan, hogy közülük egyik sem osztható a többi $m-1$ egyikével sem, vagy kiválasztható közülük egy $k+1$ tagú sorozat úgy, hogy abban mindegyik osztható az előtte állóval.* Adott m és k mellett az 1.-ben szereplő extrém gráfnak megfelel pl. a következő: A_0 pontjainak $m-1$ számú különböző prímszámot feleltetünk meg; ezek négyzeteit, köbeit, ..., k-adik hatványait pedig rendre $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ pontjainak feleltetjük meg. Az így nyert $(m-1)k$ számú egészre nem teljesül a 28. állításnak megfelelő fenti állítás.

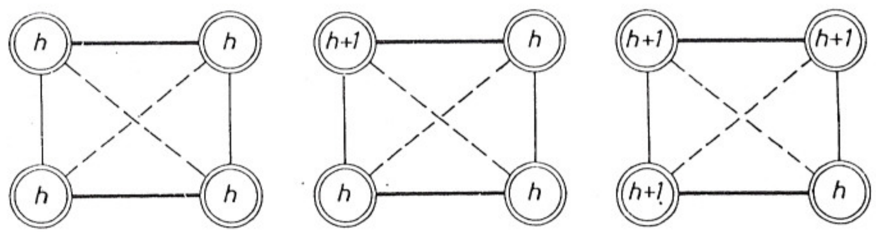
A G teljes n-gráf egy tetszés szerinti piros-kék színezésében nevezzük most piros gráfnak azt a részgráfot, amely G minden pontját és piros éleit tartalmazza. Ennek komplementere kék és ugyancsak n-pontú. A komplementerek egyike pedig az 1.42 feladat állítása szerint összefüggő. Ezzel megoldottuk a 26. feladatot.

Megjegyzés: Ez emlékeztet az $n(m, k)$ Ramsey-számok problémájára, hiszen itt is arról van szó, hogy vagy G, vagy komplementere rendelkezik egy-egy rájuk kiszabott tulajdonsággal. Ugyanilyen értelemben mondhatjuk „Ramsey-típusú"-nak a 28. állítást is; hiszen abban az, hogy G tartalmaz m független pontot, így is kimondható: G komplementere tartalmaz teljes m-gráfot.

A 27. feladathoz egyrészt bármely $n \geqq 2$-re nyilván fennáll: $f_{n-1}(n) \geqq 2$; másrészt az 5.1 állítás szerint páros n-re a teljes n-gráf $n-1$ elsőfokú faktorra bontható fel. Ha egy ilyen felbontásban az ugyanabba a faktorba tartozó éleket azonosra, a különbözőbe tartozókat pedig különböző színűre festjük, akkor $n-1$ színt használtunk, és az azonos színű élek függetlenek lesznek. Ebből következik, hogy páros n mellett $f_{n-1}(n) \leqq 2$. Ezzel megoldottuk a 27. feladatot.

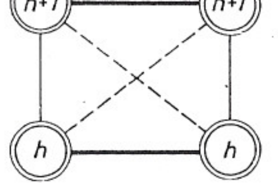
Vizsgáljuk most $f_s(n)$-et páratlan s esetén. E célból jelöljük páratlan s esetén a teljes $s+1$-gráf pontjait így: $a_1, a_2, \dots, a_{s+1}$. Bontsuk fel gráfunkat elsőfokú faktorokra, és színezzük ezeket a fenti módon s színnel. Most az s-nél nagyobb tetszőleges természetes n szám mellett a következő módon hozzuk létre az ugyancsak s színűre festett teljes n-gráfot: Osszuk el n-et $s+1$-gyel; jelöljük a hányadost h-val és a maradékot m-mel. Ekkor

$$n = (s+1)h + m \qquad (0 \leqq m < s+1).$$



162. ábra

Töröljük a teljes $s+1$-gráf pontjait, és iktassunk be helyükre egy-egy, a színkészletünkkel tetszőlegesen színezett teljes gráfot, mégpedig m számú törölt pont helyére egy-egy teljes $h+1$-gráfot, a többi $s+1-m$ számú pont helyére pedig egy-egy teljes h-gráfot. Jelöljük az a_i helyére került teljes gráfot G_i-vel. Tegyük szomszédossá G_i minden pontját G_j minden pontjával, mégpedig $\{a_i, a_j\}$ színével megegyező színű élekkel. Így egy s-színűre festett teljes n-gráfot nyerünk. Az $s=3$ esetben a 162., ill. a 163. ábrán szemléltetünk aszerint, hogy $m=0$ vagy 1, vagy 3, ill. 2. A tetszőlegesen színezett teljes gráfokat csak egy-egy dupla karika és azokba írt pontszám képviseli; két dupla karikát összekapcsoló vonal h^2, ill. $h(h+1)$, ill. $(h+1)^2$ számú



163. ábra

azonos színű élt pótol; e vonalak vastagok, vékonyak, ill. szaggatottak a 3 színnek megfelelően.

A fentiek szerint bármely két i, j-re G_i bármely pontjából G_j bármely pontjába el lehet jutni olyan úton, amelynek minden éle G_i egy pontját G_j egy pontjával köti össze; egy ilyen út élei pedig mind egyszínűek. Másrészt sem G_i, sem G_j pontjait nem kötheti össze ilyen színű él valamely mindkettőjüktől különböző G_k pontjaival. A G_i és G_j gráfok összpontszáma pedig

$$\text{az } m=0 \text{ esetben legfeljebb } 2h = \frac{2n}{s+1},$$

$$\text{az } m=1 \text{ esetben legfeljebb } 2h+1 = \frac{2n}{s+1}+\frac{s-1}{s+1},$$

$$\text{egyébként legfeljebb } 2h+2 = \frac{2n}{s+1}+2-\frac{2m}{s+1}.$$

Ebből következik az alábbi állítás:

29. *Ha s pozitív páratlan szám, h és n természetes számok, továbbá* $n=(s+1)h+m$ $(0 \leqq m < s+1)$, *akkor*

$$\textit{az } m=0 \textit{ esetben } f_s(n) \leqq \frac{2n}{s+1},$$

$$\textit{az } m=1 \textit{ esetben } f_s(n) \leqq \frac{2n}{s+1}+\frac{s-1}{s+1},$$

$$\textit{egyébként pedig } f_s(n) \leqq \frac{2n}{s+1}+2-\frac{2m}{s+1}.$$

A továbbiakban az $s=3$ esetre szorítkozunk, n különböző értékei mellett. Ha $n=4h+m$ $(m=0, 1, 2, 3)$, akkor a 29. állítás szerint

$$\text{az } m=0,\ 1 \text{ és } 3 \text{ esetekben } f_3(n) \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

$$\text{az } m=2 \text{ esetben pedig } f_3(n) \leqq \frac{n}{2}+1.$$

Most bebizonyítjuk, hogy fennállnak a következő egyenlőtlenségek is:

$$(1)\ \text{az } m=0,\ 1 \text{ és } 3 \text{ esetekben } f_3(n) \geqq \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

$$(2)\ \text{az } m=2 \text{ esetben pedig } f_3(n) \geqq \frac{n}{2}+1 = \left[\frac{n+1}{2}\right]+1.$$

Színezzük tetszőlegesen pirosra, kékre és zöldre a G-vel jelölt teljes n-gráf éleit. Elegendő azt megmutatnunk, hogy G piros, kék vagy zöld összefüggő részgráfjai között van olyan, amelyben a pontok száma (1) esetén legalább $\frac{n}{2}$, (2) esetén pedig legalább $\frac{n}{2}+1$.

Válasszunk ki G piros, kék és zöld összefüggő részgráfjai közül egy-egy maximálisan sok pontot tartalmazót (ezeket I. max. jellegűeknek nevezzük). Jelöljünk e 3 gráf közül G_p-vel egy olyant, amelynek a lehető legtöbb pontja van (II. max. jellegű), és jelöljük G_p pontjainak számát n_p-vel. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy G_p piros. Minthogy $n \geqq 2$ mellett $n \geqq \frac{n}{2}+1$, szorítkozhatunk az $1 \leqq n_p < n$ esetre. A G_p gráf I. max. jellegéből következik, hogy minden él, amelynek egyik végpontja G_p-beli, a másik pedig nem, kék vagy zöld. Jelöljünk egy G_p-be nem tartozó pontot a-val. Minthogy az a pont G_p-nek mind az n_p számú pontjával kék vagy zöld él révén szomszédos, az ilyen élek közül az egyikből — mondjuk kékből — van legalább $\frac{n_p}{2}$. Jelöljük P-vel azoknak a G_p-beli pontoknak a halmazát, amelyek kék élek révén szomszédosak a-val. Tehát P pontjainak q száma legalább $\frac{n_p}{2}$. Jelöljünk az a pontot tartalmazó kék összefüggő gráfok közül egy maximálisan sok pontot (és így minden P-beli pontot is) tartalmazót G_k-val, és legyen G_k pontjainak száma n_k. Szorítkozhatunk arra az esetre, amikor van G-nek sem G_p-be, sem G_k-ba nem tartozó b pontja, mert különben G_k — amely G_p pontjainak legalább felét és a G_p-be nem tartozó valamennyi pontot tartalmazza — máris több pontú lenne $\frac{n}{2}$-nél. G_p I. max. és G_k maximális jellegéből következik, hogy minden olyan él zöld, amelynek egyik végpontja b, a másik pedig P-beli. Jelöljünk a b pontot tartalmazó zöld összefüggő gráfok közül egy maximálisan sok pontot (és így minden P-beli pontot is) tartalmazót G_z-vel, és legyen G_z pontjainak száma n_z. A G_p I. max. és a G_k és G_z gráfok maximális tulajdonságából és abból, hogy P mindhármukban szerepel, következik, hogy egyikükhöz sem tartozó G-beli pont sem piros, sem kék, sem zöld él révén nem lehetne szomszédos P-beli ponttal, tehát e gráfok együttesen kimerítik G pontjait. Minthogy P mindhármukban szerepel,

$$n \leqq n_p+n_k+n_z-2q.$$

Ebben nem állhat egyenlőség, ha van P-be nem tartozó olyan pont, amely a három gráf közül kettőben is szerepel. Minthogy $q \geqq \frac{n_p}{2}$,

$$n_p+n_k+n_z-2q \leqq n_p+n_k+n_z-2\frac{n_p}{2} = n_k+n_z.$$

Tehát
$$n \leqq n_k + n_z,$$
és ebben az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha G-nek bármely nem P-beli pontja a három gráf közül pontosan egybe tartozik, továbbá ha $q = \frac{n_p}{2}$, vagyis n_p páros.

A legutóbbi egyenlőtlenségből következik, hogy n_k és n_z közül legalább az egyik legalább $\frac{n}{2}$; ez pedig bizonyítja állításunkat az (1) esetben.

Most tegyük fel, hogy a (2) eset áll. Ha n_k vagy n_z nagyobb, mint $\frac{n}{2}$, akkor állításunk máris bizonyított. Ez fennáll, ha a legutóbbi egyenlőtlenségünkben nem az egyenlőség érvényes. Ennélfogva szorítkozhatunk arra az esetre, amelyben $n = n_k + n_z$ és n_k, n_z egyike sem nagyobb mint $\frac{n}{2}$, tehát $n_k = n_z = \frac{n}{2} = \frac{4h+2}{2} = 2h+1$. A fentiek szerint pedig n_p páros; ámde G_p II. max. jellegéből következik, hogy n_p legalább $2h+1$. Tehát
$$n_p \geqq 2h+2 = \frac{n}{2}+1.$$

Eredményünket a korábbiakkal egybevetve a következő állításra jutottunk:

30. *Ha n és h természetes számok, továbbá $n = 4h+m$ $(m = 0, 1, 2, 3)$, akkor*
$$az\ m = 0,\ 1\ és\ 3\ esetekben \quad f_3(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right],$$
$$az\ m = 2\ esetben\ pedig \quad f_3(n) = \frac{n}{2}+1 = \left[\frac{n+1}{2}\right]+1.$$

A Ramsey-számok problémájában szerepe volt annak, hogy egy egyszerű gráf tartalmaz-e teljes k-gráfot. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy ez milyen minimális fokszám vagy élszám mellett következik be.

Gyakorlat

31. Igazoljuk, hogy minden természetes n számra
$$\left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

Feladatok

32. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2k$-pontú ($k \geqq 2$) egyszerű gráf minden p pontjára
$$\varphi(p) > k,$$

akkor tartalmaz a gráf háromszöget. Melyek az e problémához tartozó extrém gráfok?

33. n számú játékost két csapatra osztunk. Két játékos pontosan akkor mérkőzik egymás ellen — mégpedig egyszer —, ha különböző csapatba tartozik. Hogyan osszuk szét a játékosokat két csapatra, hogy a lehető legtöbb játszmára kerüljön sor?

34. Maximálisan hány élük lehet azoknak a háromszöget nem tartalmazó n-pontú egyszerű gráfoknak, amelyekre $fp_{\max}$ előírt?

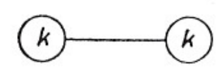
35. Igazoljuk, hogy háromszöget nem tartalmazó egyszerű gráf éleinek $é$ számára
$$é \leqq lp_{\min} \cdot fp_{\max}.$$
A szóban forgó gráfok közül melyekre áll az egyenlőség?

36. Oldjuk meg a 33. feladatnak azt az általánosítását, amelyben az n számú játékost k számú csapatra osztjuk szét.

37. Igazoljuk, hogy ha az előbbi feladatban szereplő n-et k-val osztva maradékul m-et kapunk, akkor a játszmák maximális száma
$$\frac{1}{2}(n^2-m^2)\frac{k-1}{k}+\binom{m}{2}.$$

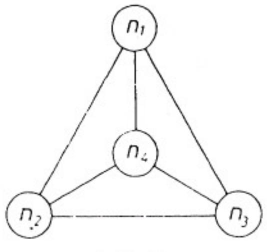
A 31. gyakorlatban szereplő egyenlőség páros n-re nyilvánvaló. Ha viszont $n = 2k+1$, akkor az egyenlőség bal és jobb oldala egyaránt k^2+k.

A 32. feladat állítása így is fogalmazható: Háromszöget nem tartalmazó $2k$-pontú egyszerű G gráfban a legkisebb fokszám legfeljebb k. Valóban: Ha az m-edfokú p pont a G gráfban minimális fokszámú, és q szomszédja p-nek, akkor q-nak is van legalább m szomszédja, de p-vel közös szomszédja nem lehet, mert G nem tartalmaz háromszöget; ennélfogva $2(m-1)+2 = 2m \leqq 2k$, és ez bizonyítja állításunkat. Extrém gráfok itt azok a háromszöget nem tartalmazó $2k$-pontú egyszerű gráfok, amelyekben a legkisebb fokszám k. Tegyük fel, hogy G_0 e problémához tartozó extrém gráf. Ekkor G_0-nak van olyan a_1 pontja, amelyre $\varphi(a_1) = k$. Jelöljük a_1 szomszédjait így: $b_1, b_2, \ldots, b_k$, és e pontok halmazát B-vel. Minthogy a_1 foka minimális, $\varphi(b_1) \geqq k$. Minthogy G_0 nem tartalmaz háromszöget, B G_0-nak független ponthalmaza. Tehát b_1-nek egyetlen szomszédja sem B-beli, és ezért b_1-nek pontosan k szomszédja van; alkossák ezek az A halmazt. A k számú pontból álló A halmaz G_0-nak szintén független ponthalmaza. Most már egyszerűen adódik, hogy G_0 csak az a $G_0(A, B)$ páros gráf lehet, amelyben minden A-beli pont minden B-belivel szomszédos. Használjuk e gráfra a $\langle k, k\rangle$ jelölést is és a 164. ábrán látható szemléltetést is.



164. ábra

Általában $\langle n_1, n_2, \ldots, n_m\rangle$ olyan egyszerű gráfot jelent, amelynek ponthalmazát a páronként közös pontot nem tartalmazó $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ponthalmazok alkotják, A_i pontjainak száma n_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, gráfunknak minden A_i független ponthalmaza és különböző A_i-, ill. A_j-be tartozó bármely két pont szomszédos. E gráfokra írva az A_i pontszámát jelentő n_i számot, és bármely két különböző A_i és A_j karikáját összekötjük egy vonallal, amely mintegy képviseli az $n_i \cdot n_j$ számú élt. Tehát $\langle n_1 \rangle$ egy n_1-pontú él nélküli gráfot jelent; m számú 1-essel $\langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle$ pedig egy teljes m-gráfot. A 165. ábra $\langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$-re utal.

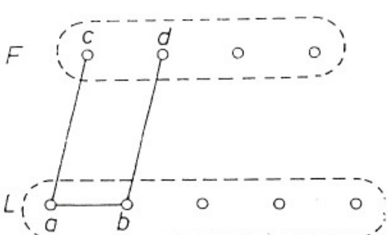


165. ábra

A 32. feladatban páros pontszámú gráfokról esik szó. A fentiekhez hasonló módon mutatható meg, hogy háromszöget nem tartalmazó $2k+1$-pontú ($k \geqq 0$ egész) egyszerű G gráfban a legkisebb fokszám legfeljebb k. Viszont valamennyi extrém gráf fellelése most kissé több megfontolást kíván. Tegyük fel, hogy G_1 itt extrém gráf. Van tehát G_1-nek olyan a_1 pontja, amelyre $\varphi(a_1) = k$. Minthogy G_1 nem tartalmaz háromszöget, a_1-nek (és persze bármely pontnak is) a szomszédjai G_1-nek egy független ponthalmazát alkotják. Jelöljük F-fel G_1 egy maximális független ponthalmazát, f-fel F pontjainak számát, L-lel az F-be nem tartozó pontok halmazát és l-lel L pontjainak számát. Nyilván $f \geqq k$. De $f \leqq k+1$ is áll, mert G_1 bármely pontjának legalább k szomszédja van, és F-beli pont szomszédjai mind L-beliek.

Tegyük fel először, hogy $f = k+1$. Ekkor $l = k$. Minthogy a legkisebb fokszám k, minden F-beli pont szomszédos minden L-belivel. Így azonban G_1 háromszögmentessége miatt L is független ponthalmaz, tehát G_1 egy $\langle k, k+1 \rangle$ gráf.

Most legyen $f = k$. Ekkor $l = k+1$. Minthogy F maximális, G_1-nek L feszítette részgráfja tartalmaz egy $\{a, b\}$ élt, és a-nak is b-nek is van egy-egy F-beli szomszédja; jelöljön ilyen pontokat c, ill. d. Tartsuk szem előtt, hogy G_1 nem tartalmaz háromszöget. Így tehát $c \neq d$ és c nem lehet szomszédos b-vel, d pedig a-val (166. ábra). De c foka is, d foka is legalább k, tehát c szomszédos valamennyi b-től különböző, d pedig valamennyi a-tól különböző L-beli ponttal. Ennélfogva a-nak csak b, b-nek pedig csak a lehet L-beli szomszédja. Így a-nak is, b-nek is van legalább $k-1$ számú F-beli szomszédja; közös szomszédjuk azonban nem lehet, tehát $k-1+k-1 \leqq k$, azaz $k \leqq 2$. De c és d létezik, és így $k = 2$. Ebből adódik, hogy L az a és b pontokon kívül éppen még egy pontot tartalmaz, amely c-vel is és d-vel is szomszédos; G_1 tehát ötszög.



166. ábra

Okoskodásunk eredményét a 32. feladat megoldásával egybevetve, az alábbi állítást nyertük:

38. *Ha a háromszöget nem tartalmazó n-pontú egyszerű gráfban a legkisebb fokszám* φ_0, *akkor*

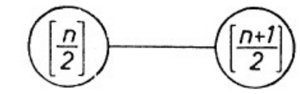
$$\varphi_0 \leqq \left[\frac{n}{2}\right].$$

az ötszög; más extrém gráf nincs.

Érdekes, hogy az extrém gráfok (167. és 168. ábra) között az ötszög az egyetlen nem páros gráf.

A 33. feladatban szereplő játékosokat osszuk az n_1 játékost számláló A_1, ill. az n_2 játékost számláló A_2 csapatba. Ekkor a játszmák száma $n_1 \cdot n_2$. Ha áthelyezünk egy játékost az A_1 csapatból az A_2-be, akkor a játszmák száma

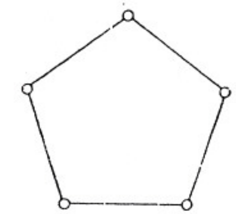
$$(n_1 - 1)(n_2 + 1) = n_1 \cdot n_2 + n_1 - n_2 - 1,$$



167. ábra

és ez nagyobb, ill. kisebb $n_1 \cdot n_2$-nél, ha $n_1 - n_2 > 1$, ill. $n_1 - n_2 < 1$, és egyenlő $n_1 \cdot n_2$-vel, ha $n_1 - n_2 = 1$. Tehát mindaddig, amíg a csapatok létszámának eltérése 1-nél nagyobb, növelhető a játszmák száma azzal, hogy a nagyobb létszámú csapatból egy játékost áthelyezünk a másikba. Ebből következik, hogy a lehető legtöbb játszmára akkor kerül sor, ha a két csapat n_1, ill. n_2 létszámára a következő áll fenn:

$$|n_1 - n_2| \leqq 1.$$



168. ábra

Könnyen belátható, hogy ekkor a csapatok létszámának a különbsége minimális, vagyis páros n esetén a két csapatba ugyanannyi játékos kerül, páratlan n esetén pedig az egyikbe eggyel több. Más szóval: a lehető legtöbb játszmára akkor kerül sor, ha az egyik csapat $\left[\frac{n}{2}\right]$, a másik pedig $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ játékost számlál.

Feladatunk megoldása egyúttal azt is jelenti, hogy az n-pontú $\langle n_1, n_2 \rangle$ gráfok közül a 167. ábrával meghatározottnak van a legtöbb éle. E gráf éleinek száma a 31. gyakorlat szerint $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

A 34. feladat kérdésére a 17. állítás és 1.8 alapján azonnal válaszolhatunk.

39. *Háromszöget nem tartalmazó n-pontú és é-élű egyszerű gráfra*

$$é \leqq \frac{n \cdot fp_{\max}}{2}.$$

A 35. feladathoz jelöljük a háromszöget nem tartalmazó egyszerű G gráf egy maximális független ponthalmazát F-fel, az F-be nem tartozó pontok halmazát pedig L-lel. Az 5.23 feladat szerint L G-nek egy minimális lefogó ponthalmaza. Tehát G minden élének legalább az egyik végpontja L-ben van. Ennélfogva a 17. állítás alapján G éleinek $é$ számára máris adódik:

$$é \leqq lp_{\min} \cdot fp_{\max}.$$

10*

Ebben az egyenlőség csak akkor állhat, ha minden L-beli pont foka $fp_{\max}$, továbbá ha L pontjainak fokszámait összeadva minden élt csak egyszer számolunk, azaz L G-nek független ponthalmaza. Tehát G éleinek száma akkor maximális, ha G ilyen:

$$\langle lp_{\min}, \quad fp_{\max}\rangle.$$

Ennélfogva a 33. feladat megoldásának felhasználásával a következő állítást nyerjük:

40. *Háromszöget nem tartalmazó n-pontú és é-élű egyszerű gráfra*

$$é \leqq \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

Extrém gráf (amelyre az egyenlőség áll): $\left\langle\left[\frac{n}{2}\right], \quad \left[\frac{n+1}{2}\right]\right\rangle$; *más extrém gráf nincs.*

Megjegyzés: Ebből az állításból is következik a 38. állításban szereplő egyenlőtlenség, ugyanis ha a szóban forgó gráf minden pontjának foka legalább $\left[\frac{n}{2}\right]+1$, akkor éleinek száma legalább $\frac{1}{2}\,n\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$, márpedig ez nagyobb $\left[\frac{n^2}{4}\right]$-nél.

A 40. állítást általánosítjuk arra az esetre, amelyben háromszög helyett teljes k-gráf szerepel. Ehhez felhasználjuk a 36. és a 37. feladat megoldását és a 17. állítás alább szereplő általánosítását.

A 36. feladat adott n és k mellett a maximális számú élt tartalmazó n-pontú $\langle n_1, n_2, \ldots, n_k\rangle$ gráfok meghatározását kívánja. Jelöljük az n_i számú játékosból álló csapatot A_i-vel ($i=1, 2, \ldots, k$). Ha egy x játékost A_i-ből A_j-be helyezünk át, akkor csak e két csapat között lezajló játszmák száma módosul, hiszen x-nek továbbra is mérkőznie kell az A_i-től és A_j-től különböző csapatba tartozó bármely játékossal. Ennélfogva a 33. feladat megoldásából adódik, hogy a játszmák számát játékos áthelyezéssel növelni tudjuk, ha van két olyan csapat, amelyek közül az egyikben legalább kettővel több játékos van mint a másikban; és a lehető legtöbb játszmára csak akkor kerülhet sor, ha minden i és j mellett

$$|n_i-n_j| \leqq 1.$$

Osszuk el n-et k-val, és jelöljük a hányadost h-val, a maradékot pedig m-mel. Tehát

$$n = h\cdot k+m \quad \text{és} \quad 0 \leqq m < k.$$

Azt állítjuk, hogy ha maximális számú játszmára kerül sor, akkor az n_i számok közül m számúnak $h+1$, a többi $k-m$-nek pedig h az értéke, vagyis a játékosokat a lehető legegyenletesebben osztottuk szét k csapatra.

Állításunk bizonyításához tegyük fel, hogy minden i és j mellett $|n_i-n_j| \leqq 1$. Ha volna h-nál kevesebb játékost számláló csapat, akkor nem lehetne h-nál többet

számláló, és így a játékosok száma legfeljebb $h-1+(k-1)h$ volna, ez pedig kisebb mint n; ha pedig volna $h+1$-nél több játékost számláló csapat, akkor nem lehetne $h+1$-nél kevesebbet számláló, és így a játékosok száma legalább $h+2+(k-1)(h+1)$ volna, és ez nagyobb mint n.

Ha pedig az n_i számok közül l számúnak $h+1$ és a többi $k-l$ számúnak h az értéke, akkor

$$n = l(h+1)+(k-l)h = kh+l,$$

tehát $l=m$.

A fentiek szerint a 37. feladatban említett $é_{\max}$ maximális élszámot gráfokban gondolkodva úgy nyerhetjük, hogy a teljes n-gráf éleinek számából levonjuk m számú teljes $h+1$-gráf és $k-m$ számú teljes h-gráf összélszámát. Tehát felhasználva, hogy

$$h = \frac{n-m}{k}, \; h-1 = \frac{n-m-k}{k} \quad \text{és} \quad h+1 = \frac{n-m+k}{k},$$

$$é_{\max} = \binom{n}{2} - m\binom{h+1}{2} - (k-m)\binom{h}{2} = \binom{n}{2} - \frac{m(h+1)h}{2} - \frac{(k-m)h(h-1)}{2} =$$

$$= \binom{n}{2} - \frac{m(n-m+k)(n-m)}{2k^2} - \frac{(k-m)(n-m)(n-m-k)}{2k^2} =$$

$$= \binom{n}{2} - \frac{n-m}{2k^2}(m(n-m)+mk+kn-km-k^2-m(n-m)+mk) =$$

$$= \binom{n}{2} - \frac{n-m}{2k}(n-k+m) = \binom{n}{2} - \frac{n^2-m^2}{2k} + \frac{n-m}{2} =$$

$$= \frac{n^2-n}{2} - \frac{n^2-m^2}{2k} + \frac{n-m}{2} - \frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} = \frac{n^2-m^2}{2} - \frac{n^2-m^2}{2k} + \frac{m^2-m}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(n^2-m^2)\frac{k-1}{k} + \binom{m}{2}.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Ha az $\langle n_1, n_2, \ldots, n_k\rangle$ gráfra minden i és j mellett $|n_i-n_j| \leqq 1$, akkor a gráfot *lehető legegyenletesebb felosztású*nak nevezzük.

A 36. és 37. feladat megoldásával a következő állítást is igazoltuk:

41. *Minden természetes n és k szám mellett az n-pontú* $\langle n_1, n_2, \ldots, n_k\rangle$ *gráfok közül a lehető legegyenletesebb felosztásúaknak van a legtöbb élük. E maximális élszám az* $n = hk+m\,(0 \leqq m < k)$ *esetben:*

$$\frac{1}{2}(n^2-m^2)\frac{k-1}{k} + \binom{m}{2}.$$

A 17. állítás így is fogalmazható: Ha a teljes 3-gráfot nem tartalmazó egyszerű G gráfban a teljes 2-gráfot nem tartalmazó feszített részgráfok közül a maximálisan sok pontból állók m-pontúak, akkor G minden p pontjára

$$\varphi(p) \leqq m.$$

Minthogy teljes $k+1$-gráfot nem tartalmazó gráf bármely pontjának szomszédjai sem feszíthetnek a gráfban teljes k-gráfot tartalmazó részgráfot, érvényes a 17. állítás következő általánosítása:

42. *Ha a teljes $k+1$-gráfot nem tartalmazó egyszerű G gráfban a teljes k-gráfot nem tartalmazó feszített részgráfok közül a maximálisan sok pontból állók m-pontúak, akkor G minden p pontjára:*

$$\varphi(p) \leqq m.$$

Most bizonyítjuk a 40. állítás említett általánosítását, amely így fogalmazható:

43. *Teljes $k+1$-gráfot nem tartalmazó n-pontú és $é$-élű egyszerű gráfra $n = hk+m$ $(0 \leqq m < k)$ mellett*

$$é \leqq \frac{1}{2}(n^2-m^2)\frac{k-1}{k}+\binom{m}{2}.$$

Extrém gráfok (amelyekre az egyenlőség áll) a lehető legegyenletesebb felosztású n-pontú $\langle n_1, n_2, \ldots, n_k\rangle$ gráfok; más extrém gráf nincs.

Először is belátjuk, hogy az $\langle n_1, n_2, \ldots, n_k\rangle$ gráfok nem tartalmaznak teljes $k+1$-gráfot: Bárhogyan is választjuk ki egy ilyen gráf $k+1$ számú pontját, a skatulyaelv szerint van közöttük kettő, amely ugyanabba az n_i-pontú független ponthalmazba tartozik, és így e két pont nem lehet szomszédos.

Mármost a 43. állítás igazolásához a 41. állítás szerint elegendő bebizonyítani, hogy minden természetes n és k szám mellett igaz a következő:

($\ast$) Ha a teljes $k+1$-gráfot nem tartalmazó n-pontú G gráfnak maximálisan sok éle van — azaz G esetünkben extrém gráf —, akkor G egy n-pontú $\langle n_1, n_2, \ldots, n_k\rangle$ gráf.

Ezt az állítást k-ra vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. ($\ast$) nyilvánvalóan igaz minden n mellett, ha $k=1$ ($k=2$-re pedig a 40. állításból következik).

Most legyen k 1-nél nagyobb rögzített egész szám, és tegyük fel, hogy $k-1$-re igaz a ($\ast$) állítás minden n mellett. Megmutatjuk, hogy ekkor ($\ast$) minden n mellett igaz k-ra is. Azt kell bizonyítanunk, hogy ha G teljes $k+1$-gráfot nem tartalmazó maximálisan sok élű n-pontú egyszerű gráf, akkor G gráfunk $\langle n_1, n_2, \ldots, n_k\rangle$ gráf. Jelöljünk G-nek teljes k-gráfot nem tartalmazó feszített részgráfjai közül egy maximális pontszámút G_0-val. Jelöljük továbbá G_0 pontjainak számát n_0-val és a G_0-ba nem tartozó G-beli pontok halmazát A-val. G és G_0 maximális tulajdonságából be fogjuk bizonyítani a következőket:

(1) G_0 a teljes k-gráfot nem tartalmazó n_0-pontú egyszerű gráfok között maximális élszámú, azaz extrém gráf.

(2) G-ben minden A-beli pont minden G_0-beli ponttal szomszédos, és A G-nek független ponthalmaza.

Ekkor G_0 indukciós feltevésünk alapján (1) szerint $\langle n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}\rangle$ gráf, és így (2) figyelembevételével — az A pontjainak $n-n_0$ számát n_k-val jelölve — adódik, hogy G gráfunk $\langle n_1, n_2, \ldots, n_k\rangle$ gráf.

Az (1) és (2) fennállását a következőképpen igazoljuk: Jelöljük $é_0$-lal G_0 éleinek számát és $é_1$-gyel azoknak a G-beli éleknek a számát, amelyeknek legalább az egyik végpontjuk A-beli. Ekkor G éleinek száma

$$é_0+é_1.$$

A 42. állítás szerint G-ben minden A-beli pont foka is legfeljebb n_0. Ennélfogva

$$é_1 \leqq (n-n_0)n_0.$$

A 35. feladat megoldásában alkalmazott okoskodással látható be, hogy

$$é_1 = (n-n_0)n_0$$

pontosan a (2) esetben áll.

Jelöljük G_0 pontjainak halmazát A_0-lal. Értelmezzük az egyszerű G^* gráfot a következőképpen: G^* ponthalmaza azonos G ponthalmazával, G^*-nak A_0 feszítette részgráfja a teljes k-gráfot nem tartalmazó n_0-pontú egyszerű gráfok között extrém gráf, G^*-ban minden A-beli pont szomszédos minden A_0-beli ponttal és G^*-nak A független ponthalmaza.

A G^* gráf nem tartalmazhat teljes $k+1$-gráfot, mert egy ilyennek legfeljebb egy pontja lehet A-beli, és így G^*-nak A_0 feszítette részgráfjában kellene teljes k-gráfnak lennie. Ha a G^* gráf $é$ számú, G^*-nak A_0 feszítette részgráfja pedig $é_0^*$ számú élt tartalmaz, akkor mindenesetre

$$é_0 \leqq é_0^* \quad \text{és} \quad é_0^*+(n-n_0)n_0 = é.$$

Minthogy G maximális, éleinek $é_0+é_1$ száma legalább $é$. Ez viszont az eddigiek szerint csak akkor lehetséges, ha $é_0=é_0^*$ és $é_1 = (n-n_0)n_0$; ekkor azonban (1) és (2) szükségképpen fennáll.

Ezzel bebizonyítottuk ($\ast$)-ot, és így a 43. állítást is. Több bizonyítása ismeretes ennek az állításnak, amely széles körű gráfelméleti vizsgálódásoknak vált kiinduló pontjává.

A 43. állításban szereplő extrém gráfok éleinek $é_{\max}$ számára $n = hk+m$ $(0 \leqq m < k)$ mellett:

$$é_{\max} = \frac{1}{2}(n^2-m^2)\frac{k-1}{k}+\binom{m}{2} = \frac{1}{2}n^2\frac{k-1}{k}-\frac{1}{2}m^2\frac{k-1}{k}+\frac{m^2-m}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}n^2\frac{k-1}{k}-\frac{1}{2k}(m^2k-m^2-m^2k+mk) = \frac{1}{2}n^2\frac{k-1}{k}-\frac{1}{2k}m(k-m).$$

Minthogy $m \geqq 0$ és $k > m$,

$$\acute{e}_{\max} \leqq \frac{1}{2} n^2 \frac{k-1}{k}.$$

Ha tehát egy n-pontú egyszerű G gráf minden p pontjára

$$\varphi(p) > n \frac{k-1}{k},$$

akkor G éleinek száma, amely az 1.8 állítás következtében nagyobb mint

$$\frac{1}{2} n^2 \frac{k-1}{k},$$

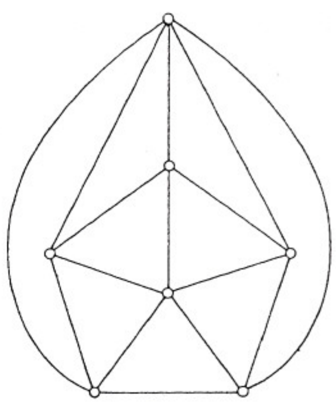
$\acute{e}_{\max}$-nál nagyobb, és így G a 43. állítás szerint feltétlenül tartalmaz teljes $k+1$-gráfot. Minthogy $\varphi(p)$ egész szám, $\varphi(p) > n\frac{k-1}{k}$ pontosan akkor áll fenn, ha $\varphi(p) > \left[n\frac{k-1}{k}\right]$.

Tehát érvényes a 43. állítás alábbi következménye (a $k=2$ esetben l. a 38. állítást):

44. *Ha a teljes $k+1$-gráfot nem tartalmazó n-pontú egyszerű gráfban a legkisebb fokszám φ_0, akkor*

$$\varphi_0 \leqq \left[n\frac{k-1}{k}\right].$$

Megjegyzés: Itt extrém gráfok azok a teljes $k+1$-gráfot nem tartalmazó n-pontú egyszerű gráfok, amelyekben a legkisebb fokszám $\left[n\frac{k-1}{k}\right]$. Ilyen gráf sok van; pl. ellenőrizhető, hogy a 43. állításban szereplő extrém gráfok itt is extrémek, sőt azok maradnak akkor is, ha belőlük $m-1$ mellett olyan élt törlünk, amelynek végpontjai nem minimális fokúak. De nem lehet valamennyi ide tartozó extrém gráfot előállítani a lehető legegyenletesebb felosztású n-pontú $\langle n_1, n_2, \ldots, n_k\rangle$ gráfok bizonyos éleinek törlése révén. Erre példa a 38. állításban szereplő ötszög; vagy pl. $n=7$ és $k=3$ mellett a 169. ábrán látható extrém gráf, ugyanis könnyű belátni, hogy e teljes 4-gráfot nem tartalmazó gráfra $fp_{\max}=2$, márpedig a 7-pontú lehető legegyenletesebb felosztású $\langle n_1, n_2, n_3\rangle$ gráfra $fp_{\max}=3$, és így az ebből éltörlés révén nyert gráfokra $fp_{\max} \geqq 3$.



169. ábra

Alább rámutatunk a 43. állítás egy érdekes geometriai alkalmazására (49. feladat).

Feladatok

45. Bizonyítsuk be, hogy ha a derékszögű háromszög átfogóját a kisebbik (pontosabban: a másiknál nem nagyobb) befogóval elosztjuk, a hányados legalább $\sqrt{2}$.

46. Bizonyítsuk be, hogy tompaszögű és (egy egyenesen elhelyezkedő, csatlakozó szakaszokká) elfajuló háromszögekre is érvényes az előbbi feladat így fogalmazható állítása: ha a legnagyobb oldalt a legkisebbel elosztjuk, a hányados legalább $\sqrt{2}$.

47. Igazoljuk, hogy a sík bármely négy pontja között van három olyan, amely derékszögű, tompaszögű vagy elfajuló háromszöget határoz meg.

48. Igazoljuk, hogy ha a síkban elhelyezkedő négy pont közül bármely kettőnek távolsága legfeljebb 1, akkor van a négy pont között kettő, amelynek távolsága legfeljebb $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

49. A síkban $3s$ ($s \geqq 2$) számú pont helyezkedik el úgy, hogy közülük bármely kettőnek távolsága legfeljebb 1. Bizonyítsuk be, hogy a pontpárokat összekötő szakaszok közül legfeljebb $3s^2$ nagyobb $\frac{1}{\sqrt{2}}$-nél.

A 45. feladat megoldásához jelöljük a derékszögű háromszög befogóit a-val, ill. b-vel, átfogóját pedig c-vel, és tegyük fel, hogy $a \leqq b$. Ekkor $c^2 = a^2+b^2 \geqq 2a^2$. Ebből pedig adódik, hogy

$$\frac{c}{a} \geqq \sqrt{2}.$$

A 46. feladat megoldásához tegyük fel, hogy a tompaszögű vagy elfajuló háromszög oldalaira: $a \leqq b \leqq c$. Minthogy nagyobb oldallal szemben van nagyobb szög, a tompaszög (vagy a 180°-os szög) csúcsa C, szárai pedig a és b. Csökkentsük a tompaszöget 90°-ra úgy, hogy az a és b oldalt — hosszaik megtartásával — C körül forgatjuk. Így a c oldal helyett a rövidebb c' oldal jött létre. Ennélfogva

$$\frac{c}{a} > \frac{c'}{a},$$

a 45. feladat állítása szerint pedig

$$\frac{c'}{a} \geqq \sqrt{2};$$

tehát most is fennáll:

$$\frac{c}{a} \geqq \sqrt{2}.$$

Ha a 47. feladatban szereplő négy pont között van három egy egyenesen elhelyezkedő, akkor ezek elfajuló háromszöget határoznak meg. Most tegyük fel, hogy a négy