és a legkisebb G-beli fokszám φ_0, akkor

$$\varphi_0 \leqq \frac{f+d}{2}.$$

102. Igazoljuk, hogy ha a háromszöget nem tartalmazó n-pontú egyszerű G gráf nem páros gráf, akkor G éleinek $é$ számára

$$é \leqq \frac{(n-1)^2}{4}+1.$$

103. Igazoljuk, hogy egy gráf bármely két tagjának legfeljebb egy közös pontja lehet.

104. Bizonyítsuk be, hogy ha a hurokélt nem tartalmazó $2m+1$-pontú ($m \geqq 1$ egész) gráf éleinek száma legalább $3m+1$, akkor tartalmaz a gráf páros kört.

105. Bizonyítsuk be, hogy ha egy legalább 4-pontú összefüggő egyszerű gráf minden pontjának foka legalább 2, és nincs a gráfnak elvágó pontja, akkor van a gráfban legalább 4 hosszúságú kör.

106. A 71. állítás szerint az ott szereplő $\frac{n \cdot k}{2}$ élszámkorlát csak olyan n-ek mellett érhető el, amelyek oszthatók $k+1$-gyel. Keressük meg a $k=1$ és 2 esetben a minden n mellett elérhető élszámkorlátot, és kutassunk fel minden extrém gráfot.

107. Bizonyítsuk be, hogy ha az n-pontú ($n \geqq 10$) egyszerű G gráfnak van négy, legalább $n-2$-edfokú pontja, akkor van G-ben két pontfüggetlen négyszög.

108. Keressük meg a 76. feladathoz tartozó extrém gráfokat.

109. Bizonyítsuk be a következőt: Ha az n-pontú ($n \geqq 4$) és $é$-élű egyszerű gráfban nincs átlót tartalmazó kör, akkor

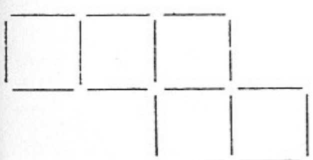
$$é \leqq 2n-4;$$

extrém gráfok (amelyekre az egyenlőség áll) a $\langle 2, n-2\rangle$ gráfok és $n=4$, ill. 5 mellett még a 191. ábrán látható két összefüggő gráf; más extrém gráf nincs.

110. Bizonyítsuk be a következőt: Ha a $2m$-pontú ($m \geqq 2$ egész) és $é$-élű egyszerű gráfban nincs átlót tartalmazó négyszög, akkor

$$é \leqq m^2;$$

extrém gráfok (amelyekre az egyenlőség áll) az $\langle m, m\rangle$ gráfok és $m=2$, ill. 3 mellett még a 190. ábrán látható két összefüggő gráf; más extrém gráf nincs.



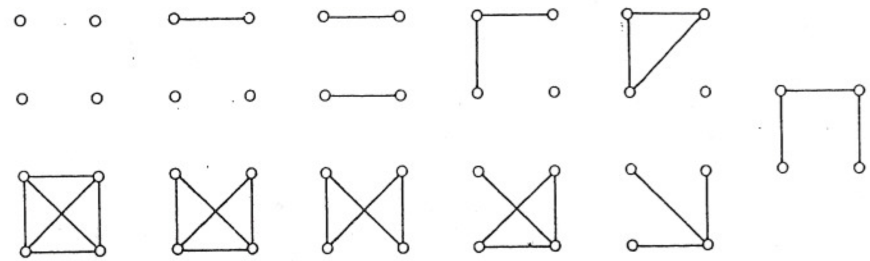
193. ábra

111. Rakjuk ki a 193. ábrán látható 5 négyzetet gyufaszálakból: minden négyzetoldal egy-egy gyufaszál. Lehetséges-e a négyzetek számát 2 gyufaszál áthelyezésével 4-re csökkentenünk úgy, hogy gyufaszálakat egymásra vagy egymás mellé nem helyezünk, de valamennyi gyufaszálat szerepeltetünk a 4 négyzetben is egy-egy oldalként? Hány megoldás van?

7. A GYAKORLATOK ÉS FELADATOK MEGOLDÁSAI

1. fejezet

27. Keressük először a 0, 1, ill. 2 élt tartalmazó gráfokat. Minthogy a teljes 4-gráfnak 6 éle van, az előbb adódott gráfok komplementerei rendre a 6, 5, ill. 4 élt tartalmazó gráfokat adják. Ezután már csak a 3 élt tartalmazó gráfokat kell keresnünk.

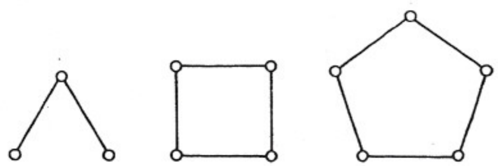


194. ábra

Közülük kört csak egyetlen gráf tartalmazhat, mégpedig az, amelyben háromszög van. Ennek komplementerét is megrajzolva, már csak egyetlen megfelelő gráfot találunk: egy 3 hosszúságú utat. A gyakorlat eredményeként 11 gráf adódik; ezeket a 194. ábrán láthatjuk. Közülük bármely kettő nem izomorf, és bármely 4-pontú egyszerű gráf izomorf valamelyikükkel. Az egy oszlopban levő gráfpárok komplementerek.

28. Ha a 27. gyakorlatot a fenti útmutatás alapján hajtottuk végre, azonnal láthatjuk, hogy a 194. ábrán pár nélkül maradt gráf az egyetlen 4-pontú egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével.

29. A gyakorlat első részére a 195. ábra gráfjaival adhatunk választ. A második részhez tegyük fel, hogy az egyszerű G gráfnak 6-nál több pontja van. Válasszuk ki tetszőlegesen G-nek 6 pontját, és töröljük a többit a hozzájuk illeszkedő élekkel együtt. Az így megmaradt G' gráfban a 14. feladat szerint vagy van háromszög, és akkor az G-

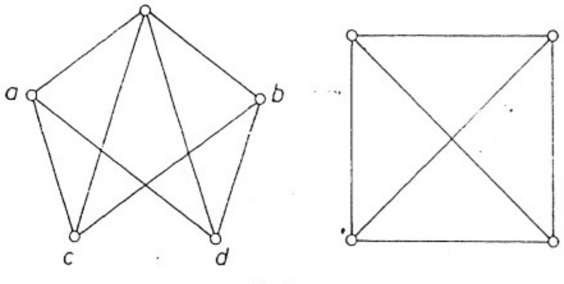


195. ábra

nek is részgráfja volt, vagy van G'-ben 3 olyan pont, amelyek egymással nem szomszédosak, és akkor e 3 pont egymás közt G-ben sem volt szomszédos, hiszen G-nek olyan élét nem töröltük, amelynek mindkét végpontja G'-ben van.

30. Szóban forgó komponens lehet izolált pont, út vagy kör; más nem.

31. Gondoljuk meg, hogy a számításba jövő gráfok minden komponensének legalább 4 pontja van. A gyakorlat első részéhez csak az a gráf jön számításba, amely 2 komponensből áll, és mindkét komponens teljes 4-gráf. A második részhez 3 gráf adódik. Ezek közül egy a 196. ábra. A másik kettőt ebből úgy nyerjük, hogy az 5-pontú komponenst az $\{a, b\}$ éllel, ill. az $\{a, b\}$ és a $\{c, d)$ éllel kiegészítjük.



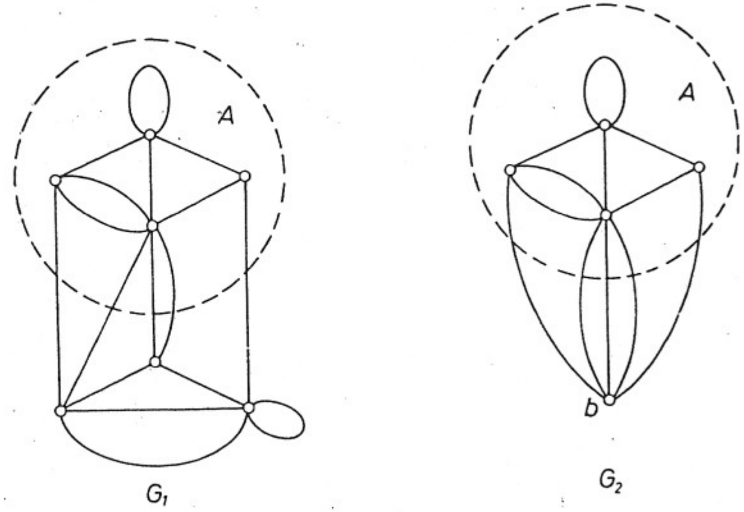
196. ábra

32. Legyen G egy kívánt tulajdonságú nem összefüggő gráf, és válasszuk külön ennek egy G_1 komponensét; G többi komponense együttesen alkossa a G_2 gráfot. G-beli élnek nem lehet egyik végpontja G_1-ben, a másik G_2-ben. Tehát az ilyen élek mind G komplementerében vannak, és számuk — aszerint, hogy hány pontja van G_1-nek — csak $1\cdot 6$ vagy $2\cdot 5$ vagy $3\cdot 4$ lehet. Ennélfogva G éleinek száma legalább ennyivel kevesebb a teljes 7-gráf $\frac{6\cdot 7}{2}=21$ élénél. A kívánt 15 élszám ennél 6-tal kevesebb. Így csak az első eset jöhet számításba, amikor is G_1 teljes 1-gráf és G_2 teljes 6-gráf.

33. E feladatot is megoldottuk, ha belátjuk a következőt: Ha egy n-pontú gráfnak legalább $n+1$ éle van, akkor van a gráfnak legalább 3-adfokú pontja. Ez pedig így van, hiszen ha egy n-pontú G gráf minden pontjának foka legfeljebb 2, akkor G-ben a fokszámok összege legfeljebb $2n$. Minthogy a fokszámok összegének fele minden gráfban az élek számát adja, G-nek legfeljebb n éle lehet a feltevéssel ellentétben.

Megjegyezzük, hogy az n-pontú és n-élű gráfnak nem feltétlenül van 3-adfokú pontja. Példa erre az n hosszúságú kör.

34. Ha A a szóban forgó G_1 gráf minden pontját tartalmazza, akkor $k=0$, amely esetben a 9. állításból adódik a megoldás. Tehát feltehetjük, hogy A nem tartalmazza G_1 minden pontját. Töröljük G_1-nek azokat az éleit, amelyeknek egyik végpontja sem tartozik A-ba, majd „forrasszuk össze" az A-ba nem tartozó pontjait egyetlen, b-vel jelölt ponttá. Az így kapott gráfot G_2-vel jelöljük. (Példaként tekintsük a 197. ábrát.) Ekkor bármely A-ba tartozó pontnak ugyanaz a foka G_1-ben, mint G_2-ben, továbbá G_2-ben $\varphi(b)=k$, és ez megegyezik a b ponthoz illeszkedő élek számával. Mint minden gráfban, G_2-ben is páros a páratlan fokú pontok száma;



197. ábra

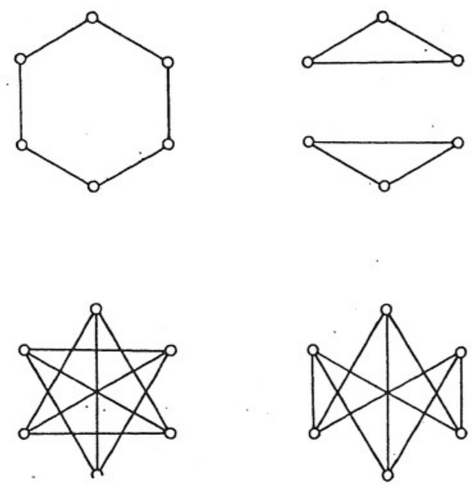
tehát ha az A-beli páratlan fokú pontok száma páros, akkor $\varphi(b)$ szükségképpen páros, ellenkező esetben viszont páratlan.

35. Keressünk a feladathoz alkalmas gráfot. Tekintsük a $2n$ számú pontot gráfpontnak. Két pontot akkor kössünk össze éllel, ha van olyan körlap, amely mindkét pontot fedi. Ekkor gráfunk egyszerű, $2n$ számú pontja van, és minden pont foka legalább n. Minthogy minden él megrajzolható úgy is, hogy körlappal fedett legyen, feladatunk megoldásához elegendő bizonyítanunk, hogy gráfunk összefüggő; ezt viszont a 19. feladat megoldása kapcsán megtettük.

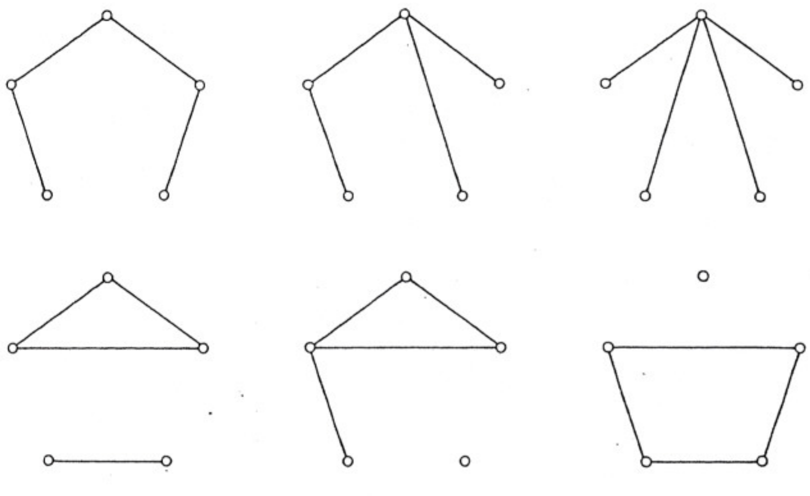
36. A bizonyítás a gráf éleinek bejárásával adódik.

37. Egyetlen megfelelő gráf van. Ez két komponensből áll, mindkét komponens háromszög.

38. A feladat első részéhez megfelelő gráfok komponensei a 36. feladat szerint mind körök; a 37. feladat megoldását is felhasználva, két gráf jön számításba. A feladat második részéhez számításba jövő gráfok ezeknek a komplementerei. Tehát összesen 4 gráfról van szó, ezeket láthatjuk a 198. ábrán.

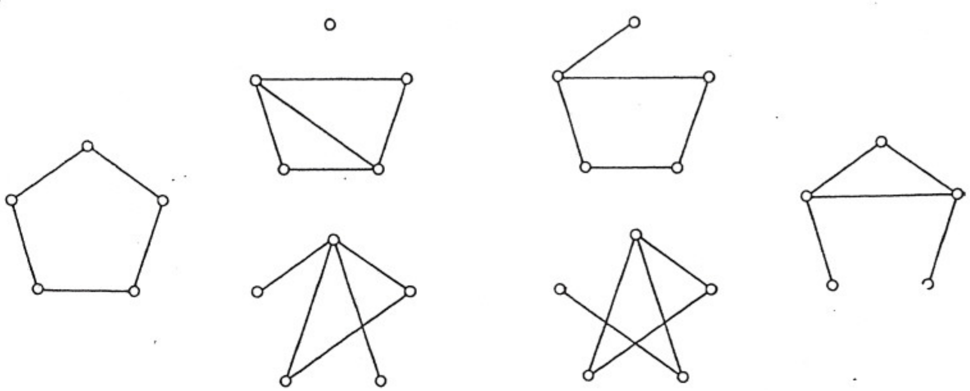

198. ábra

39. Láthatjuk, hogy a második részhez adódó gráfok az első résszel kapcsolatban szóba jövők komplementerei. A 4 élt tartalmazók közül keressük először azokat, amelyekben nincs kör. Ilyen pl. a 4 hosszúságú út is. Most keressük azokat, amelyekben nincs 3-nál hosszabb út, majd 2-nél hosszabb út. Ezután vizsgáljuk a háromszöget, majd a 4-szöget tartalmazókat. Az első résznek megfelelő 6 gráfot a 199. ábrán láthatjuk. Ezek komplementerei a 6 élt tartalmazó 5-pontú egyszerű gráfok.



199. ábra

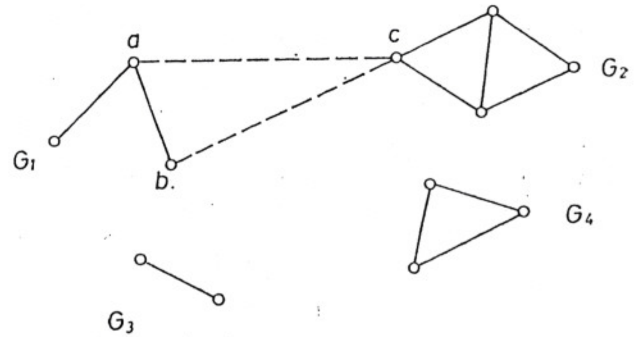
40. A megfelelő gráfok nyilván mind 5-élűek. A következő feladatra gondolva érdemes megkeresnünk az összes 5-élű gráfot. Keressük rendre az 5, 4, 3 hosszúságú köröket tartalmazókat. A 200. ábrán valamennyi 5-pontú és 5-élű egyszerű gráfot láthatjuk. Az egy oszlopban levők komplementerek; e feladathoz a két szélső jön számításba.



200. ábra

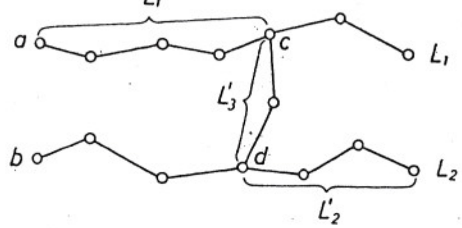
41. A 39. és 40. feladatot, valamint a 12. gyakorlatot figyelembe véve, már csak a 0, 1 és 2 élt tartalmazó 5-pontú egyszerű gráfokat kell megkeresni, ugyanis ezek komplementerei rendre a 10, 9, ill. 8 élt tartalmazók. Az előbbiekből 4 van, és így az utóbbiakból is. Mindezeket számításba véve adódik, hogy a lényegben különböző 5-pontú egyszerű gráfok száma 34.

42. A feladat állításának bizonyításához tegyük fel, hogy az egyszerű G gráf nem összefüggő. Ezt szemlélteti egy esetben a 201. ábra; G komponensei: G_1, G_2, G_3 és G_4. (A szaggatott vonalakat egyelőre ne vegyük figyelembe.) Jelöljük G komplementerét G^*-gal. Azt kell bizonyítanunk, hogy G^* összefüggő, azaz G bármely két pontja egymásból G^*-ban úttal elérhető. Ha nem ugyanabba a G_i-be tartozó két pontot szemelünk ki, akkor azokat G^*-ban él köti össze, és ez bizonyítja, hogy a két pont G^*-ban egymásból úttal elérhető. Ha a és b ugyanabba a G_i-be tartozó két pont (az ábrán $i=1$), akkor legyen c G-nek egy tetszőleges, de G_i-be nem tartozó pontja (ábránkon c G_2-beli). G^*-nak biztosan éle $\{a, c\}$ és $\{c, b\}$ (az ábrán szaggatott vonalak jelzik), ez viszont bizonyítja, hogy a és b G^*-ban egymásból úttal elérhető.



201. ábra

43. A feladat állításának indirekt bizonyításához tegyük fel, hogy L_1 és L_2 az összefüggő G gráf közös pont nélküli m hosszúságú útja (okoskodásunkat a 202. ábrán szemléltetjük). Jelöljük L_1 és L_2 egy-egy végpontját a-val, ill. b-vel. Minthogy G összefüggő, van G-ben az a és b pontot összekötő L_3 út. A továbbiakban hasznosítjuk mind az először, mind az utoljára érintett pontnak a fejezet végén kiemelt szerepét. Az a pontból indulva, és L_3 élein haladva, jelöljük c-vel L_1 utoljára érintett pontját, és az ezt követő pontok közül d-vel L_2 először érintett pontját.



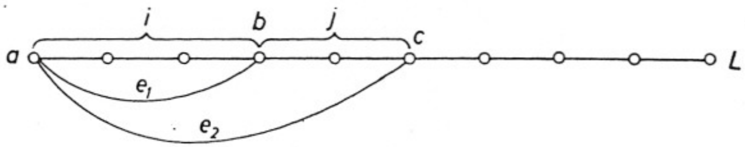
202. ábra

(A „leghosszabb út módszeré"-ben elmondottak szerint c és d nem tartozhat L_1 és L_2 végpontjai közé.) Utunk c és d között bejárt része szintén út; ezt jelöljük L_3'-vel. A c ponttal kettéosztott L_1 útnak az egyik része legalább $\frac{m}{2}$ hosszú; L_1'-vel L_1-nek ilyen részét jelöljük. Hasonlóan L_2' a d-vel kettéosztott L_2-nek legalább $\frac{m}{2}$ hosszúságú része. Mármost az L_1', L_3' és L_2' együttvéve G-nek egy útja, és hossza — minthogy L_3' hossza legalább 1 — legalább

$$\frac{m}{2}+1+\frac{m}{2}=m+1,$$

ami lehetetlen, hiszen nincs G-ben m-nél hosszabb út. Tehát nem lehet, hogy G két m hosszúságú útjának ne legyen közös pontja.

44. Alkalmazzuk a leghosszabb út módszerét. Legyen L a szóban forgó gráf egy leghosszabb útja. Jelöljük a-val L egyik végpontját. Minthogy $\varphi(a) \geqq 3$, van két a-hoz illeszkedő és L-be nem tartozó él. Legyen e_1 és e_2 két ilyen él, ezek a-tól különböző végpontja b, ill. c. Ha $b=c$, akkor e_1 és e_2 egy 2 hosszúságú kör éleit szolgáltatja. Tehát csak a $b \neq c$ esetet kell vizsgálnunk. b és c feltétlenül L-en levő pont.



203. ábra

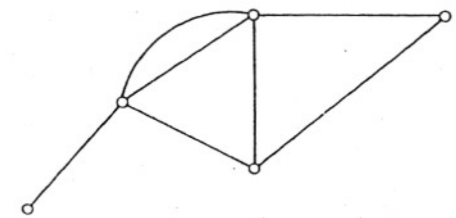
A továbbiakat a 203. ábrán szemléltetjük. Az L út a és b közötti részének hosszát i-vel, b és c közötti részének hosszát pedig j-vel jelöltük. Ha i páratlan, akkor L-nek a és b közötti része e_1-gyel együtt páros hosszúságú kört ad. Ha j páros, akkor L-nek b és c közötti része e_1-gyel és e_2-vel együtt ad páros hosszúságú kört. Ha pedig i páros és j páratlan, akkor $i+j$ páratlan, tehát L-nek a és c közötti része e_2-vel együtt páros hosszúságú kört ad. Ezzel megoldottuk a feladatot.

45. A feladat állítása nyilván igaz olyan gráfra, amely hurokélt vagy többszörös éleket tartalmaz, hiszen 2-nél nagyobb szám nem lehet osztója 1-nek vagy 2-nek. Tehát szorítkozhatunk egyszerű gráfokra. Alkalmazzuk ismét a leghosszabb út módszerét. Így beláthatjuk, hogy a 203. ábra mint részgráf előfordul a szóban forgó gráfban. Ebből adódik, hogy van gráfunkban 3 olyan kör, amelyek hossza $i+1, j+2$ és $i+j+1$. Ha $i+1$ és $j+2$ osztható egy 2-nél nagyobb egész k számmal, akkor ezek összege: $i+j+3$ is osztható k-val, és így az ennél 2-vel kisebb $i+j+1$ nem lehet k-val osztható.

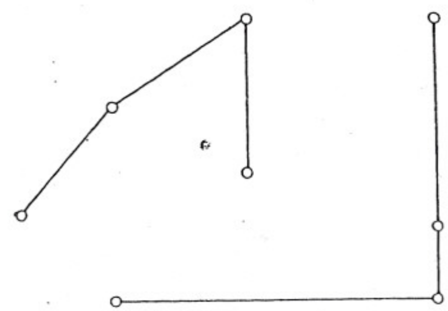
20. Ha a rajzolt fagráf nem egyetlen izolált pontból áll, azt tapasztaljuk, hogy a kérdéses különbség mindig 2. (Ennek általános érvénye látható a 25. feladatban.)

21. Lehetséges válaszok:

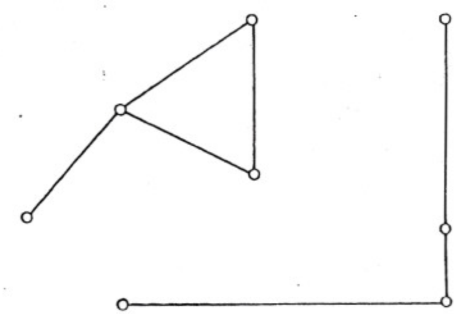
1. Egy nem hurokél és két végpontja.
2. Az adott gráf.
3. Izomorf a 204. ábrával,
4. a 205. ábrával és
5. a 206. ábrával.



204. ábra

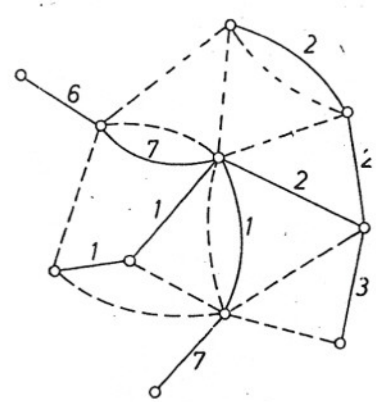


205. ábra

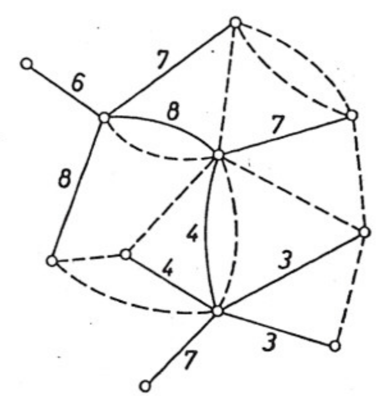


206. ábra

22. Egy minimális favázat a 207. ábrán, egy maximálisat pedig a 208. ábrán jelöltünk ki. Az előbbi értéke 32, az utóbbié pedig 57.



207. ábra



208. ábra

23. Báziskörrendszert a p_1-hez illeszkedő három élből álló favázra vonatkozóan választunk. Kirchhoff csomóponti törvényét a p_1, p_2 és p_3 pontra alkalmazzuk. Tehát a három csomóponti és a két hurokegyenlet:

(1) $$-I_1 - I_2 + I_4 = 0,$$

(2) $$I_1 + I_3 = 0,$$

(3) $$I_2 - I_5 = 0,$$

① $$I_2 + 2I_4 + I_5 = 16,$$

② $$-I_1 + 2I_3 - 2I_4 = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $I_1 = -2$, $I_2 = 5$, $I_3 = 2$, $I_4 = 3$ és $I_5 = 5$.

24. Elegendő belátnunk, hogy minden, legalább két pontot tartalmazó fagráfban van 2 elsőfokú pont. Az 1. fejezetben említett leghosszabb út módszerét körmentes gráfra alkalmazva kapjuk, hogy bármely leghosszabb út két végpontja a körmentes gráfnak elsőfokú pontja.

25. Jelöljük f_k-val a szóban forgó gráf k-adfokú pontjainak számát. Ekkor a pontok száma

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots$$

Az élek száma minden gráfban a fokszámok összegének a fele (l. fejezet 8. állítás); esetünkben:

$$\frac{1}{2}(f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \dots).$$

Minthogy gráfunk fagráf, a 6. állítás szerint

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots = \frac{1}{2}(f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \dots) + 1.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots \geqq f_1 + 2f_2 + 3(f_3 + f_4 + f_5 + \dots).$$

Ennek felhasználásával az előbbi egyenlőségből kapjuk, hogy

$$f_1 \geqq f_3 + f_4 + f_5 + \dots + 2 = c + 2,$$

és azt is kapjuk, hogy

$$f_1 = c + 2$$

pontosan akkor áll, ha

$$f_4 = f_5 = \dots = 0,$$

azaz nincs fagráfunkban 3-nál nagyobb fokú pont (de elsőfokú van). Eredményünk a 20. gyakorlat kapcsán tapasztaltak általános érvényét is jelentik.

26. A 21. gyakorlatot figyelembe véve, a felsorolt négy tulajdonság közül kettő, csak a 2. és 4. lehet olyan, amely együtt a részgráfot mint favázat határozza meg. Megmutatjuk, hogy e kettő meg is határozza.

Az, hogy G' G-nek faváza, a következőt jelenti: G' rendelkezik az 1., 2. és 3. tulajdonsággal. Ennélfogva a 26. feladatot megoldjuk, ha a következőket bizonyítjuk (G'-vel G egy tetszőleges részgráfját jelöljük):

a) Ha G' összefüggő, körmentes és éleinek száma $n-1$, akkor pontjainak száma n.

b) Ha G' körmentes, és éleinek száma $n-1$, akkor összefüggő.

c) Ha G' összefüggő, pontjainak száma n, és éleinek száma $n-1$, akkor körmentes.

Az *a)* állítás nyilvánvaló, hiszen G' fagráf, és így a 6. állítás szerint pontjainak száma n.

A *b)* állítás bizonyításához jelöljük G' komponenseit $G'_1, G'_2, \dots, G'_k$-vel és G'_i pontjainak számát n'_i-vel. Azt kell kimutatnunk, hogy $k=1$. Minthogy G' G-nek részgráfja,

$$n'_1 + n'_2 + \dots + n'_k \leqq n.$$

A G'_i gráfok mind összefüggők és természetesen körmentesek, tehát mind fagráfok. Ennélfogva G'_i éleinek száma a 6. állítás szerint $n'_i - 1$ $(i = 1, 2, \dots, k)$. G' éleinek $n-1$ számát komponenseinek élszámösszege adja, tehát

$$n-1 = n'_1 - 1 + n'_2 - 1 + \dots + n'_k - 1 = n'_1 + n'_2 + \dots + n'_k - k.$$

Ha most figyelembe vesszük a fenti egyenlőtlenséget, valamint azt, hogy $k \geqq 1$, akkor a következőket nyerhetjük:

$$n'_1 + n'_2 + \dots + n'_k - k \leqq n - k \leqq n - 1.$$

Az utóbbi két összefüggésből adódik, hogy

$$n-1 \leqq n-k \leqq n-1,$$

és ebből $k=1$ következik.

A *c)* állítás az 5. állítás következménye.

27. A 4. feladat szerint az n-pontú és n-élű G gráfban van kör; jelöljünk egyet K-val. Töröljük G K-ba tartozó valamely élét. A G-ből így nyert G' gráf G-nek n-pontú, $n-1$-élű és a 3. feladat szerint összefüggő részgráfja. Ennélfogva az előző feladat megoldásában szereplő *c)* állítás szerint G' körmentes. Tehát G a K körön kívül más kört nem tartalmazhat.

28. Egy gráfot egyszerűnek nevezünk, ha sem hurokélt, sem többszörös éleket nem tartalmaz. Legyen az egyszerű G gráf pontjainak száma $n > 4$. Így G komplementere is n-pontú. Mindegyiküknek van ligetváza; ezek élszáma legfeljebb $n-1$ (pontosan $n-1$ akkor, ha az összefüggőség is fennáll). Ha be tudjuk bizonyítani, hogy G-nek vagy a komplementerének legalább n éle van, akkor a 14. feladat szerint G-ben vagy a komplementerében kör is van. A G gráfnak és komplementerének együttvéve annyi éle van, mint a teljes n-gráfnak, vagyis $\frac{n(n-1)}{2}$. Tehát G-nek vagy a komplementerének van legalább félennyi, azaz $\frac{n(n-1)}{4}$ éle. Ennélfogva feladatunk megoldásához már csak azt kell belátnunk, hogy $n>4$ esetén

$$\frac{n(n-1)}{4}>n-1,$$

azaz

$$n^2-5n+4>0,$$

vagyis

$$(n-1)(n-4)>0.$$

Az utóbbi viszont valóban fennáll, ha $n>4$.

29. Legyen G' az összefüggő G gráfnak egy körmentes részgráfja. Ha G körmentes, akkor G' kívánt bővítése maga G. Ha G tartalmaz egy K kört, akkor van K-nak G'-be nem tartozó e éle, mert G' körmentes. Töröljük G-ből az e élt. Minthogy e G'-nek nem éle, az így kapott G_1 gráfnak G' részgráfja. G_1 valamennyi pontját tartalmazza G-nek, és a 3. feladat szerint összefüggő. Ha G_1 tartalmaz egy K_1 kört, akkor van K_1-nek G'-be nem tartozó e_1 éle. Töröljük G_1-ből az e_1 élt. Az így kapott G_2 gráfnak G' részgráfja. G_2 ismét tartalmazza G valamennyi pontját és a 3. feladat szerint összefüggő. Törlési eljárásunkat addig folytatjuk, amíg a kapott gráf körmentes nem lesz. A végül kapott G_m gráf tehát körmentes, összefüggő, és tartalmazza G valamennyi pontját, tehát G-nek faváza. De G_m-nek is részgráfja G', azaz G'-nek G_m bővítése.

30. Az alapul vett F gráf fa. De fagráf G_1 is és G_2 is. Azt kell megmutatnunk, hogy G_3-ban létezik bármely két, p_1 és p_2 pontját összekötő út. p_1 és p_2 pontja G_1-nek is, G_2-nek is, F-nek is. A 9. feladat szerint p_1-ből p_2 G_1-ben is, G_2-ben is és F-ben is pontosan egy úttal érhető el. Ennélfogva a szóban forgó F-beli útnak azonosnak kell lennie mind a G_1-beli, mind a G_2-beli szóban forgó úttal; így ezek egymással is azonosak, minden élük közös, tehát G_3-ba tartozik.

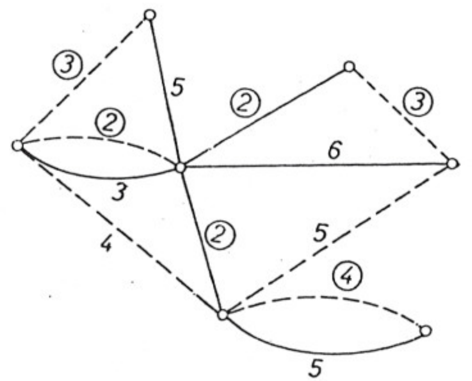
31. Jelöljük G_0-lal a G gráfból G' éleinek törlésével nyert gráfot. A G_0 gráf nem tartalmazhat kört, hiszen G minden körének legalább egy élét töröltük. Ennélfogva G_0 a 29. feladat szerint G ligetvázává bővíthető (ti. komponensenként favázzá bővíthető). Minthogy G bármely ligetvázának $n-k$ számú éle van, G_0 éleinek száma legfeljebb $n-k$. Tehát G' éleinek száma legalább $é-(n-k)=é-n+k$.

32. Alkalmazzuk a G gráf gazdaságos favázát kereső 2. módszert: Az első $s-1$ számú élt a szóban forgó K kör élei közül is választhatjuk. Ezt s-féleképpen tehetjük meg. Az így adódó s számú gazdaságos faváz közül K bármelyik éle pontosan egyben nem szerepel, a többiben viszont szerepel; tehát ezek a favázak mind különbözők.

33. A feladatot a 10. feladat megoldásához hasonló módon is megoldhatjuk. Most csak annyit jegyzünk meg, hogy — bár ezt a megoldásban nem kell felhasználni — az ebben a feladatban megadott G két éle metszheti egymást. Ilyen esetet

kapunk, ha pl. a síkon négy pontot a következő módon jelölünk ki: Vegyük fel a síkon egy négyzet négy csúcsát, és forgassuk el az egyik átellenes csúcspár mindegyikét a négyzet középpontja körül „kicsi", de más-más szöggel (kicsivel, hogy az átellenes pontokat összekötő szakaszok még messék egymást, és különböző szögekkel, hogy a pontpárok távolságai mind különbözők legyenek). Legyen az így kapott két pont és a négyzet nem mozgatott két csúcsa a négy adott pont.

34. Kérjünk minden építő vállalattól egy-egy építési költségtervet. Ezután rajzoljunk egy G gráfot a következőképpen: G pontjai a szóban forgó városokat jelölik. Minden vállalat minden tervezett vezetékének megfelelően felveszünk egy-egy élt, és ráírjuk az árajánlatot. Most kijelöljük G egy minimális értékű favázát, és e faváz éleinek megfelelő vezetékeket építtetjük meg, mégpedig mindegyiket azzal a vállalattal, amelyik azt tervezte.



209. ábra

A probléma azért érdekes, mert nem biztos, hogy a csőhálózat építtetése számunkra akkor a leggazdaságosabb, ha csak a legkisebb összköltségtervet mutató vállalattal építtetünk. A 209. ábrán két vállalat építési költségterve szerepel. A szaggatottan rajzolt az egyiké, a nem szaggatottan rajzolt a másiké. Az előbbi építési összköltsége 21, az utóbbié pedig 23. A számok bekarikázásával kijelölt minimális értékű favázat mindkét vállalat építi; ennek építési összköltsége csak 16.

35. Jelöljük n-nel hálózatunk csomópontjainak számát, a csomóponti egyenletek 0-ra redukált alakjainak bal oldalait pedig így: $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Ekkor a csomóponti egyenletek a következők:

$$f_1=0,$$

$$f_2=0,$$

$$\ldots \ldots \ldots,$$

$$f_{n-1}=0,$$

$$f_n=0.$$

Megmutatjuk, hogy $f_n=0$ következménye a többi egyenletnek. Ezzel megoldjuk feladatunkat, hiszen bármelyik bal oldal kaphatta volna az n indexet.

Az $f_1+f_2+\cdots+f_n$ összegben minden e_k élben folyó I_k áramerősség pontosan kétszer szerepel, mégpedig egyszer $-$, másszor $+$ előjellel, mert I_k az e_k élen annak iránya szerint e_k egyik végpontjából kifelé, a másikba pedig befelé folyik. Tehát a változók minden értéke mellett

$$f_1+f_2+\cdots+f_n = 0,$$

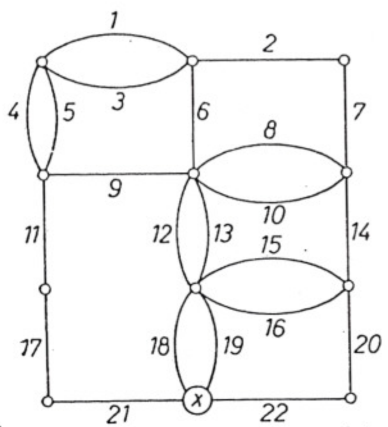
azaz

$$f_n = -(f_1+f_2+\cdots+f_{n-1}).$$

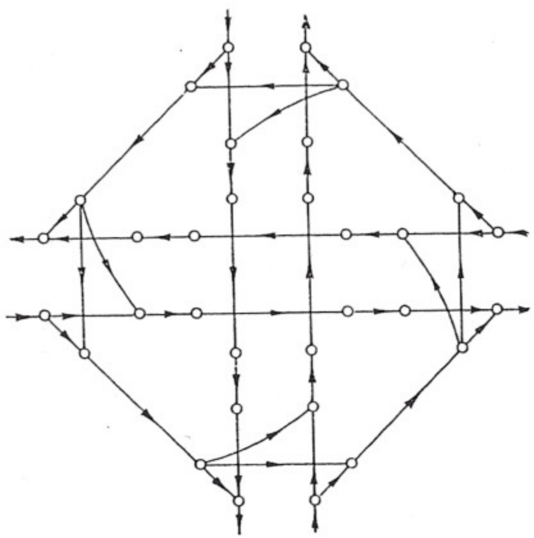
Ennélfogva az első $n-1$ egyenlet minden közös megoldása kielégíti az $f_n=0$ egyenletet is: az utolsó egyenlet valóban következménye a többinek.

3. fejezet

25. A bejárandó járdáknak gráféleket megfeleltetve, a 210. ábrán látható gráf éleit kell bejárnunk lehetőleg egyrétűen. Gráfunk összefüggő, minden pontjának foka páros, tehát van Euler-vonala. Bármely Euler-vonalat követő bejárás megfelel a követelménynek, pl. az élek alábbi sorrendjét követő is: 21, 17, 11, 9, 6, 3, 5, 4, 1, 2, 7, 8, 12, 13, 10, 14, 15, 16, 20, 22, 19, 18.



210. ábra

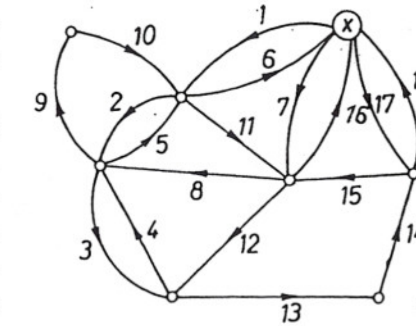


211. ábra

26. A megfelelő forgalmi gráf a 211. ábrán látható.

27. A 212. ábrán látható irányított gráf éleinek lehetőleg egyrétű irányt követő bejárását kell megtervezni. Minthogy minden pont ki-foka megegyezik a pont be-fokával, és az összefüggőség is teljesül, van a gráfnak Euler-vonala, és ez gazdasá-

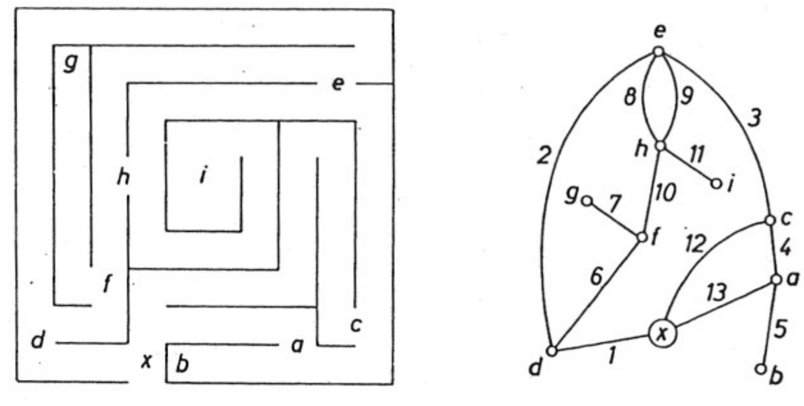
gos bejárási tervet szolgáltat. Az élek egy megfelelő sorrendjét az ábrán számozás jelzi.



212. ábra

28. Figyeljük meg, hogy az x-nél levő útkereszteződéstől eltekintve, bármely útkereszteződésből bármelyikbe eljuthatunk megjelölt egyirányú utcákon haladva, a közlekedési szabályok megsértése nélkül. Tehát a gyakorlat végrehajtásában csupán arra kell ügyelnünk, hogy a megfelelő forgalmi gráfban az x pont legalább egy irányított élnek legyen kezdőpontja és legalább egynek végpontja.

29. A labirintusnak megfelelő gráf a 213. ábrán látható. A 2. bejárási utasítás alapján járunk el, ha az éleken pl. az alábbi sorrendben megyünk végig: 1, 2, 3, 4, 5, 5, 13, 12, 12, 13, 4, 3, 9, 10, 6, 6, 7, 7, 10, 11, 11, 8, 8, 9, 2, 1.



213. ábra

30. A feladat állítása a $k=1$ esetben a 7. állítás első része; az ennek bizonyítását adó gondolattal a feladatot is megoldhatjuk. Párosítsuk a $2k$ számú páratlan fokú pontot, és a párokat kössük össze egy-egy új éllel. Az így kapott gráf is összefüggő, és minden pontjának foka páros, tehát van Euler-vonala. Ha Euler-vonalából töröljük az önkényesen felvett k számú élt, a feladat követelményeit kielégítő k számú nyitott élvonalat nyerünk.

31. A szóban forgó gráf minden komponensének van Euler-vonala. Minden komponensének páros sok éle van, ugyanis ha egy n-pontú gráf minden pontjának foka 4, akkor a gráf éleinek száma az 1. fejezet 8. állítása szerint $2n$. Ha az éleket Euler-vonal mentén haladva váltakozva színezzük pirosra, ill. kékre, akkor kívánt színezésre jutunk.

32. A kiválasztott lapocskák száma annyi, mint a teljes $n+1$-gráf éleinek száma, vagyis $\frac{(n+1)n}{2}$. Ezek akkor helyezhetők el egyetlen szabályos körláncba, ha a teljes $n+1$-gráfnak van Euler-vonala, különben nem. A teljes $n+1$-gráf minden pontjának foka n, tehát akkor van Euler-vonal, ha n páros, különben nincs.

33. Ha A pontjai $p_1, p_2, \ldots, p_m$, akkor

$$\varphi_{ki}(p_1)+\varphi_{ki}(p_2)+\ldots+\varphi_{ki}(p_m) = \varphi_{be}(p_1)+\varphi_{be}(p_2)+\ldots+\varphi_{be}(p_m).$$

Töröljük a gráfból azokat az éleket, amelyeknek kezdőpontjuk is és végpontjuk is A-ba tartozik. Ekkor a fenti összeg mindkét oldalát ugyanannyival csökkentjük, tehát a csökkentett összegek is egyenlők, és ez igazolja a feladat állítását.

34. A 17. állítás szerint

$$\varphi_{ki}(p_1)+\varphi_{ki}(p_2)+\ldots+\varphi_{ki}(p_n) = \varphi_{be}(p_1)+\varphi_{be}(p_2)+\ldots+\varphi_{be}(p_n),$$

azaz

$$(\varphi_{ki}(p_1)-\varphi_{be}(p_1))+(\varphi_{ki}(p_2)-\varphi_{be}(p_2))+\ldots+(\varphi_{ki}(p_n)-\varphi_{be}(p_n)) = 0.$$

Ebből következik, hogy ha a zárójelekbe tett különbségek közül a pozitívok összege k, akkor a negatívok összege $-k$, és így a feladatban megadott összeg $2k$.

35. Ha az utoljára felírt összegnek nem minden tagja 0, akkor a pozitív, ill. negatív tagokban szereplő gráfpontok két külön P, ill. N osztályba sorolhatók. A P-beli pontok mindegyike több élnek kezdőpontja, mint végpontja; együttvéve k-val többnek. Viszont az N-beli pontok mindegyike kevesebb élnek kezdőpontja, mint végpontja; együttesük k-val kevesebbnek. Tehát bővíthetjük a $\vec{G}$ gráfot k számú alkalmasan választott N-beli kezdőpontú és P-beli végpontú irányított éllel úgy, hogy ezek az eltérések megszűnjenek: a gráf minden pontjának ki-foka és be-foka megegyezzék. Ilyen bővítést végrehajtva, teljesülnek a 19. állítás első részének feltételei, tehát a bővített irányított gráfnak van Euler-vonala. Ha bármelyik Euler-vonalából töröljük az önkényesen felvett k számú irányított élt, a feladat követelményeit kielégítő k számú nyitott gráfvonalat nyerünk.

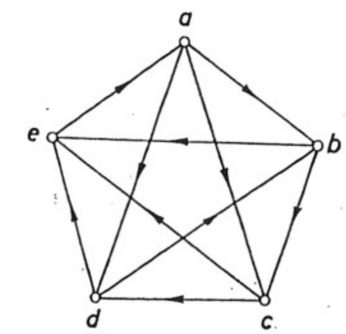
36. Jelöljük a hurokélt nem tartalmazó G gráf pontjait az $1, 2, \ldots, n$ számokkal, és irányítsuk úgy, hogy bármely élének két végpontja közül a kisebb számmal jelölt legyen a kezdőpontja. Az így nyert $\vec{G}$ gráf nem tartalmazhat irányított kört, ugyanis egy $\vec{G}$-beli irányított körnek bármely pontjából indulva és élei mentén haladva, csak egyre nagyobb számokkal jelölt pontokba juthatnánk, vissza soha.

37. A versenyzők egy teremben helyezkednek el. Az egyik versenyző kivezeti a teremből azokat, akiket legyőzött (esetleg senkit sem). Ha van még, aki a teremben marad, egyikük újból kivezeti azokat, akiket legyőzött a teremben maradottak közül. Ezt folytatják mindaddig, amíg valaki a termet ki nem üríti. A kiürítő legyőzte azokat, akiket kivezet, és azokat, akik korábban kivezetők voltak, hiszen a teremben maradhatott; ez utóbbiak viszont legyőzték az általuk kivezetetteket. A kiürítő tehát minden versenytársát megemlíti felsorolásában.

A feladat állítása megfogalmazható irányított gráfok segítségével is. Jelöljük a körmérkőzés résztvevőit egy-egy gráfponttal és minden mérkőzésnek feleltessünk meg egy irányított élt, amelynek kezdőpontja a győztest, végpontja pedig a vesztest jelölő pont. Így a feladat állításának egy megfogalmazása a 16. feladat állítása is.

Megjegyezzük, hogy a 16. feladatra adott első megoldás alapján az is látszik, hogy a (holtversenyben) győztesek bármelyike megfelel a 37. feladat követelményének. Nem igaz azonban, hogy csak győztes felelhet meg. Sőt még a vesztes is megfelelhet.

	a	b	c	d	e
a	–	1	1	1	0
b	0	–	1	0	1
c	0	0	–	1	1
d	0	1	0	–	1
e	1	0	0	0	–



214. ábra

Ezt a 214. ábrán látható eredménytáblázat, illetve a megfelelő irányított gráf bizonyítja. Az ábra arra is példa, hogy a verseny minden résztvevője megfelelhet a feladat követelményének.

38. Tegyük fel, hogy $k>0$ számú a kezdőpontú és b végpontú, páronként közös élt nem tartalmazó irányított út van $\vec{G}$-ben. Töröljük a gráfból egy ilyen útrendszer éleit. Az így létrejött $\vec{G}'$ gráfban

$$\varphi_{be}(a)-\varphi_{ki}(a) = \varphi_{ki}(b)-\varphi_{be}(b) = k,$$

bármely a-tól és b-től különböző p pontra pedig

$$\varphi_{ki}(p) = \varphi_{be}(p).$$

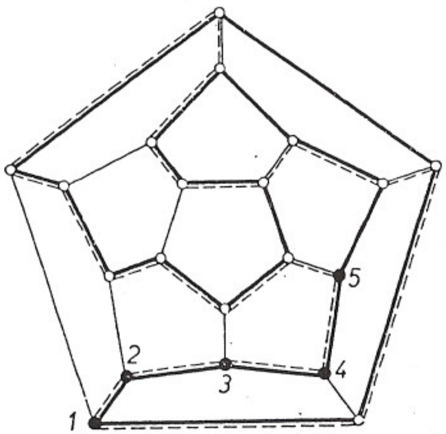
Ebből következik, hogy van a G' gráfnak olyan G'' komponense, amelynek a is, b is pontja, mert másképpen az egyiküket tartalmazó komponensben visszaállítva az irányítást, a be-fokok összege nem egyeznék meg a ki-fokok összegével, ellentétben a 17. állítással. G''-ben visszaállítva az eredeti irányítást, az így nyert $\vec{G}''$-ben a 35. feladat szerint kijelölhető k számú nyitott gráfvonal úgy, hogy $\vec{G}''$ minden éle ezen gráfvonalak közül pontosan egyben szerepeljen. Ha ezekből az irányított körök éleit töröljük, k számú, páronként közös élt nem tartalmazó, b kezdőpontú és a végpontú irányított utat nyerünk, ugyanis a 35. feladat megoldásában szereplő P most egyedül a b pontból, és N most egyedül az a pontból áll. Tehát ha van $\vec{G}$-ben k számú

a kezdőpontú és b végpontú, páronként közös él nélküli irányított út, akkor van $\vec{G}$-ben legalább k számú, b kezdőpontú és a végpontú, páronként közös él nélküli irányított út. Ez természetesen akkor is igaz, ha $k=0$. Minthogy okoskodásunk a és b szerepének felcserélésével is véghezvihető, az elmondottakból következik a feladat állítása.

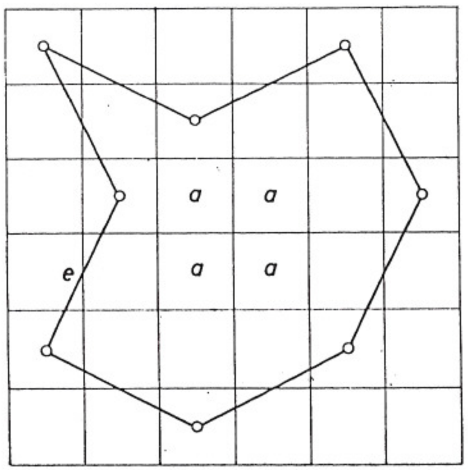
39. Ha egy G gráf mind az x, mind az y, mind a z pontjából tetszőlegesen bejárható, akkor a 24. állításban leírt szerkezet szerint e három pont közül az egyiknek — mondjuk z-nek — foka 2. Minthogy G x-ből is és z-ből is tetszőlegesen bejárható, és z foka 2, ugyancsak a 24. állítás szerint G mindössze két olyan útból áll, amelyeknek végpontjai x és z, más közös pontjuk azonban nincs, azaz G kör.

4. fejezet

23. A 215. ábrán látható vastagon megrajzolt Hamilton-kör mentén is és a szaggatottan megrajzolt mentén is eredményesen folytathatjuk a játékot.

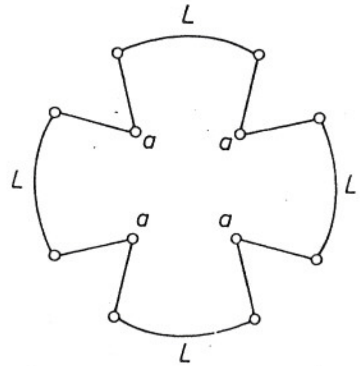


215. ábra

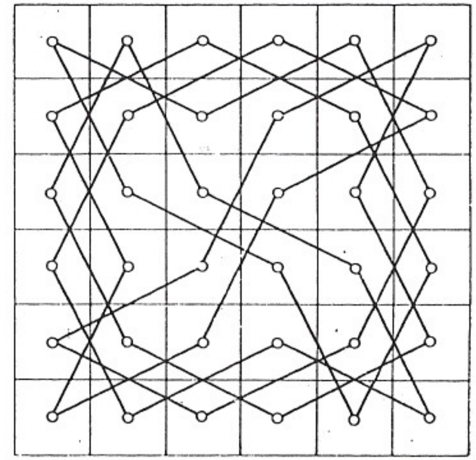


216. ábra

24. A 36 mezőből álló sakktáblán az éleivel a lehetséges lóugrásokat szemléltető G gráf egy Hamilton-körét keressük. Ha töröljük G-nek a sakktábla középpontjához csatlakozó a-jelű mezőin fekvő 4 pontját, akkor G szétesik 4, páronként közös pontot nem tartalmazó körre. E körök közül egy a 216. ábrán látható, a többi 3 pedig ennek a sakktábla középpontja körüli 90, 180 és 270 fokkal való elforgatásával nyerhető. Hamilton-körben egyik körnek sem szerepelhet minden éle, viszont bármely Hamilton-körben szerepelnie kell a sarokban levő pontokhoz illeszkedő két-két élnek, minthogy sarokban fekvő pont foka G-ben is csak 2. Jelöljünk meg L-lel 4 olyan utat, amelyet a fenti körökből nyerünk úgy, hogy mindegyikből törlünk egy-egy, nem sarokban fekvő ponthoz illeszkedő élt. Az L jelű utak együttvéve 32 pontot tartalmaznak, és bármely Hamilton-körben szerepelnie kell mind a 4 a jelű pontnak. Ennélfogva ha az L jelű utakat az a jelű pontoknak és azokhoz illeszkedő



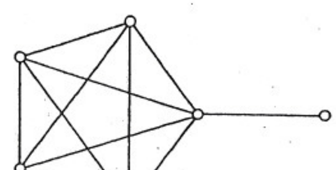
217. ábra



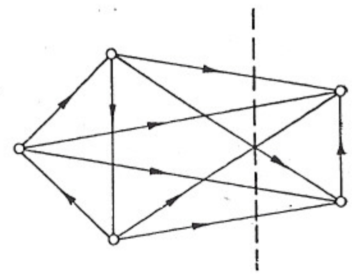
218. ábra

két-két élnek közbeiktatásával körré tudjuk összekapcsolni, akkor egy keresett Hamilton-kört nyerünk. (A 217. ábra az összekapcsolást szemlélteti; az L jelű utaknak csak a végpontjait jelölik karikák.) Ezen a módon több Hamilton-kört is nyerhetünk; a 218. ábrán láthatót az e jelű élek (l. a 216. ábrát) törlésével hoztuk létre.

25. Ha két teljes gráf egy-egy pontját összeforrasztjuk, Hamilton-kört nem tartalmazó gráfot nyerünk. Ellenőrizhető, hogy az így származtatott gráfok közül csupán a 219. ábra felel meg.



219. ábra



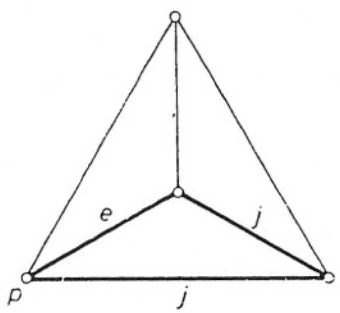
220. ábra

26. Ha egy gráf pontjait két részre osztjuk, majd a gráfot úgy irányítjuk, hogy a különböző részekbe tartozó pontokat összekapcsoló élek kezdőpontjai (vagy végpontjai) ugyanabba a részbe tartozzanak, irányított Hamilton-kör nem jöhet létre, hiszen irányított Hamilton-kör irányt követő bejárása közben mindegyik részből át lehetne jutni a másikba. Ennek alapján hoztuk létre a 220. ábrán látható irányított gráfot; a pontokat a szaggatott vonal osztja két részre.

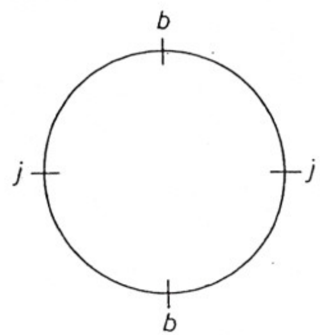
27. A sakktáblán az éleivel a lehetséges lóugrásokat szemléltető G gráf egy Hamilton-körét keressük. Vegyük figyelembe, hogy bármely fehér mezőtől csak fekete mező lehet lóugrásnyi távolságban, és viszont. Ez annyit jelent, hogy G bármely Hamilton-körét bejárva, fehér mezőn fekvő pontot mindig feketén fekvő követ, és viszont. Ebből következik, hogy G bármely Hamilton-körében, és így G-ben is páros sok pontnak kell lennie. Ámde G-nek n^2 pontja van, n^2 pedig n-nel együtt páratlan: vagyis nincs G-nek Hamilton-köre, és így a feladatban említett bejárás sem lehetséges.

28. Ha töröljük gráfunkból az oktaéder csúcsainak megfelelő 6 pontot, olyan gráfot nyerünk, amely 8 komponensből áll; e komponenseket az oktaéder lapjaihoz illesztett 8 tetraéder egy-egy csúcsának megfelelő izolált pontok alkotják. Ha figyelembe vesszük a 3. feladatot, így feladatunk megoldását kapjuk.

29. Képzeljük el a dodekaéder-játék megfelelőjét a tetraéder élhálózatán, és végezzük el e játék elemzését a 6. feladat megoldása kapcsán végrehajtott vizsgálat mintájára. A p kezdőpont és az e kezdőél rögzítése esetén a tetraéder-játék folytatását is leírhatjuk b és j jelekből álló sorozattal. Eredményes játék esetén itt is érvényes az I. tilalom: kör része nem lehet kör (a II. követelményt itt nem is kell figyelembe vennünk). E tilalom folytán eredményes játékot leíró sorozatban nem szerepelhet egymás után sem két j jel, sem két b jel (a 221. ábra az első esetre vonat-



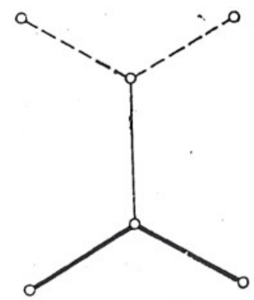
221. ábra



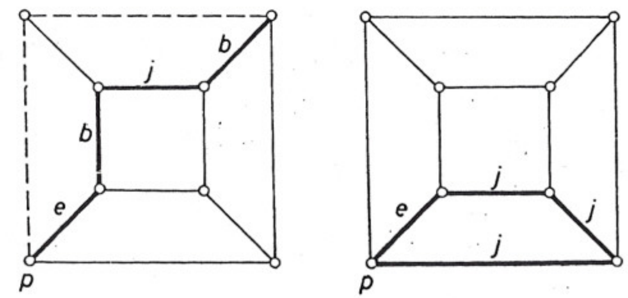
222. ábra

kozik, a második az elsőből betűcserével adódik). Ez már eldönti, hogy a 102. ábrának most a 222. ábra felel meg. Erről csupán két különböző sorozat olvasható le: b-vel vagy j-vel kezdődő. Minthogy az e kezdőél a p-hez illeszkedő 3 él közül bármelyik lehet, p rögzítése esetén 6 eredményes folytatást kapunk, de közöttük csak 3 ad különböző Hamilton-kört, kettő-kettő (az ellentétes irányú játékoknak megfelelően) egybeesik. A Hamilton-kör szempontjából nem jelent megszorítást p rögzítése. Tehát a tetraéder élei alkotta gráfnak 3 Hamilton-köre van.

Valójában a tetraéder 3 Hamilton-körét könnyebb megtalálni a felidézett módszer alkalmazása nélkül. A módszert azért vázoltuk fel, mert a feladatnak a kockára vonatkozó részét ezt követve oldjuk meg.

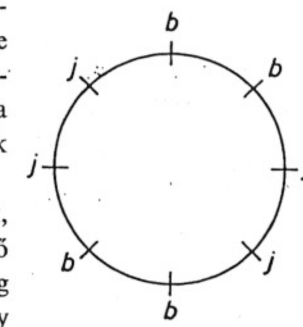


223. ábra



224. ábra

Eredményes játék esetén érvényes az I. tilalom mellett a II. követelmény is: ha a 223. ábrán jelzett illeszkedések mellett a vastag élek szerepelnek egy itt szóba jövő Hamilton-körben, akkor a vékony él nem szerepelhet benne, és ezért a szaggatott éleknek hozzá kell tartozniuk. Ezek az alábbi részleteket zárják ki jelsorozatunkból: bjb, jbj, jjj, bbb. (A 224. ábra az első és a harmadik esetre vonatkozik, a többi ezekből betűcserével adódik.) Ebből következik, hogy a 102. ábrának most a 225. ábra felel meg. Erről 4 különböző sorozatot olvashatunk le. Minthogy a kezdőpont rögzítése esetén kezdőél 3 módon választható, 12 eredményes folytatás adódik, azonban kettő-kettő most is ugyanazt a Hamilton-kört adja. Tehát a kocka élei alkotta gráfnak 6 Hamilton-köre van.



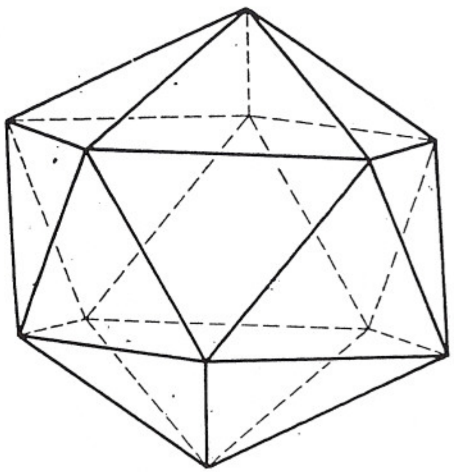
225. ábra

30. A dodekaéder-játék vizsgálata során azt beláttuk, hogy az első két dugó elhelyezése után 20 különböző módon folytatható a játék eredményesen. E 20 lehetőség közül 10 adódik abból, hogy b-vel és 10 abból, hogy j-vel folytatjuk. Tehát az első 3 dugó elhelyezése után 10 eredményes folytatás lehetséges.

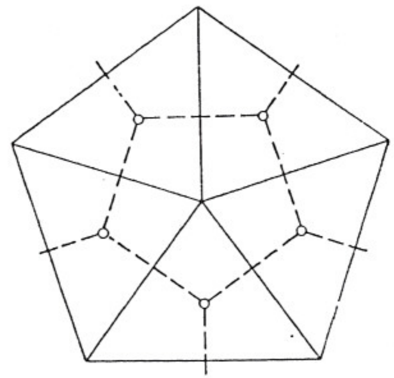
Az első 4 dugó rögzítése ugyanaz, mint a kezdőpont és a kezdőél megválasztása után a sorra kerülő két dugó elhelyezése az alábbi 4 eset valamelyikének megfelelő módon: jj, bb, jb, bj. Folytatásra a 102. ábráról — figyelembe véve mindkét forgásirányt, valamint az ábra szimmetriáját — az első két esetben 4—4, a másik kettőben pedig 6—6 lehetőséget olvashatunk le. Tehát az első 4 dugó elhelyezése után 4 vagy 6 eredményes folytatás lehetséges.

Az első 5 dugó rögzítése a játékot leíró jelsorozat első 3 betűjének rögzítését jelenti. Ez 8 különböző módon hozható létre; közülük a jjb tartozik a 127. ábrához.

A fentiekhez hasonlóan gondolható végig, hogy 2 vagy 4 eredményes folytatás lehetséges. A 127. ábrának megfelelő *jjb* esetben 2 eredményes folytatás adódik; ezek láthatók a 215. ábrán.



226. ábra



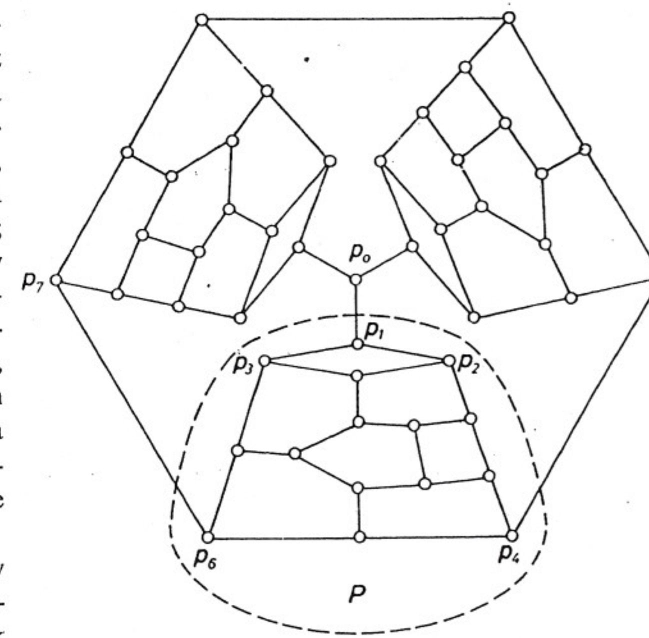
227. ábra

31. Az ikozaédert 20 háromszöglap határolja (226. ábra). Vegyünk fel minden lapon egy-egy pontot, és kössük össze e pontok közül azokat a párokat, amelyeket tartalmazó lapoknak van közös élük, egy-egy, a közös élt átszelő vonallal. Az ikozaéder felületére ily módon rárajzolt G gráf egy részletét szemlélteti a 227. ábra; G élei a szaggatottan rajzoltak. Figyeljük meg, hogy G izomorf a dodekaéder élei alkotta gráffal. Ha az ikozaéder-felületet szétvágjuk G egy Hamilton-köre mentén, akkor nyilván két részre vágjuk, továbbá minden háromszöglapot kettészelünk, a háromszög két oldalát vágva át, hiszen a Hamilton-kör G minden pontját tartalmazza, éspedig mindegyiket 2-es fokszámmal.

32. Az indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy a feladatban említett feltételeket teljesítő G gráfnak p elvágó pontja. A p pontnak és a hozzá illeszkedő éleknek törlése révén G-ből nyert gráfnak legalább két komponense van, és így van e komponensek között $k-1$-nél több pontot nem tartalmazó; legyen a G_1 gráf ilyen, továbbá p_1 G_1-nek egy pontja. A p_1 pont G-beli szomszédai csak p vagy G_1 pontjai lehetnek, és minthogy az utóbbiak között legfeljebb $k-2$ szomszédja lehet, p foka nem lehet $k-1$-nél nagyobb G-ben. Ez ellentmond a feltételeknek, tehát G-nek nincs elvágó pontja.

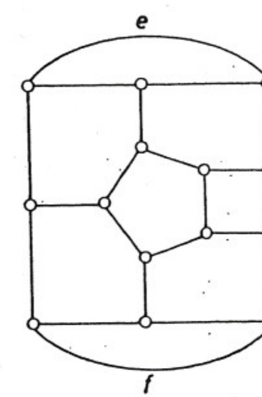
E feladat állítása a 14-ből is következik; ugyanis G kielégíti annak feltételeit, tehát van Hamilton-köre, és így a 3. feladat után tett megjegyzés szerint nem lehet elvágó pontja.

33. Indirekt okoskodáshoz tegyük fel, hogy a 228. ábrán látható (a 128. ábrával izomorf) G gráfnak van egy H Hamilton-köre. Minthogy G valamennyi pontjának foka 3, bármely ponthoz illeszkedő 3 él közül H kettőt tartalmaz; egyet pedig nem. Az ábrán szaggatott vonallal körülhatárolt részbe eső G-beli pontok halmazát jelöljük P-vel. A G gráf szimmetriája folytán feltehetjük, hogy a p_0 ponthoz illeszkedő 3 él közül H a $\{p_0, p_1\}$ élt nem tartalmazza. Ebből következik, hogy H tartalmazza $\{p_1, p_2\}$-t és $\{p_1, p_3\}$-at; továbbá nyilvánvaló, hogy H mentén haladva, a szaggatott vonallal körülhatárolt részbe csak a $\{p_4, p_5\}$, $\{p_6, p_7\}$ élek valamelyikén léphetünk be, és csak a másikon léphetünk ki belőle, tehát e kettő is éle H-nak.



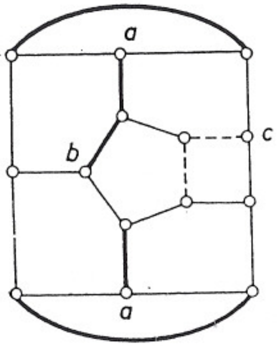
228. ábra

Állítsunk elő G-ből egy G^* gráfot a következőképpen: Először vegyük G-nek azt a részgráfját, amelynek pontjai P-beliek, élei pedig G-nek mindazon élei, amelyeknek mindkét végpontja P-beli. Ezután töröljük e részgráfból $\{p_1, p_2\}$-t és $\{p_1, p_3\}$-at, majd vegyük hozzá az $e = \{p_2, p_3\}$ és $f = \{p_4, p_6\}$ élt. Így kapjuk a G^* gráfot, amelynek minden pontja 3-adfokú (229. ábra). Ha H-nak G^*-ba eső éleihez hozzávesszük az elhagyott $\{p_1, p_2\}$ és $\{p_1, p_3\}$ élek helyett e-t, és a P-beli pontokat nem P-beliekkel összekötő élek helyett f-et, akkor G^*-nak egy Hamilton-körét nyerjük; jelöljük ezt H^*-gal.



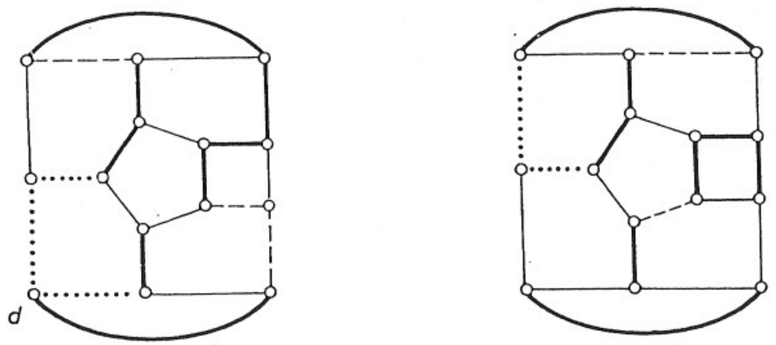
229. ábra

Tekintetbe véve, hogy G^* minden pontjának foka 3, az itt vizsgált H^*-ra is fennáll a dodekaéder-játék vizsgálatában kimondott I. tilalom és II. követelmény, amelyekre a 29. feladat megoldásában is hivatkoztunk. G^*-nak a 230. ábrán látható rajzán vastagon rajzoltunk néhány H^*-hoz tartozó élt. Az a-jelű pontokhoz illeszkedő vastag éleknek azért kell H^*-hoz tartozniuk, mert különben a velük közös végpontú vékonyak lennének H^*-beliek, és így az I. tilalomba



230. ábra

ütköznénk. A b ponthoz illeszkedő szimmetrikus helyzetű két él egyikének H^*-hoz kell tartoznia; feltehető, hogy a vastagon rajzolt tartozik hozzá. Ezek után a II. követelmény szerint a szaggatottan rajzolt élek is szükségképpen H^*-hoz tartoznak. A következő ábrákon már ezeket a szaggatott éleket is vastagon rajzoljuk. Egyiküknek c végpontjából kiindulva folytatjuk vizsgálódásunkat. A c-hez illeszkedő másik két él egyikének H^*-hoz kell tartoznia; a két változatot követi a 231. ábra. Ezeken szaggatottan jeleztünk olyan éleket, amelyeknek I., ill. II. szerint a vastag élek H^*-hoz tartozása miatt ugyan-



231. ábra

csak H^*-hoz kell tartozniuk, és pontozottan olyan éleket, amelyeknek a szaggatott élek H^*-hoz tartozása miatt kell ugyancsak hozzá tartozniuk. Az első változatban d H^*-nak egy harmadfokú pontja volna; a második változatban az ábra felső részén kör jönne létre H^* valódi részeként. Mindkettő lehetetlenség. Tehát az a feltevésünk, hogy a 228., és így egyúttal a 128. ábrának van Hamilton-köre, nem tartható.

Megjegyezzük, hogy a 228. ábrán látható gráfnak van Hamilton-útja.

34. Tegyük fel, hogy az n-pontú egyszerű G gráf teljesíti a feladatban mondott feltételeket. Belátjuk, hogy G összefüggő. Ha G nem volna összefüggő, akkor különböző komponensbe tartozó két pontja nem volna szomszédos, és ilyenek fokszámösszege legfeljebb $n-2$ lehetne; ez pedig ellentétben állna feltevésünkkel. Jelöljük L-lel G egy leghosszabb útját. Ha L végpontjai szomszédosak, akkor a 11. feladat szerint van G-nek Hamilton-köre. Ha L végpontjai nem szomszédosak, akkor pedig ezek fokszámösszege legalább n, és így a 12. feladat állítása szerint van G-ben olyan leghosszabb út, amelynek végpontjai szomszédosak. Ekkor azonban a 11. feladat állítása szerint adódik, hogy van G-nek Hamilton-köre.

A 14. állítás a 34. feladat állításának következménye, ugyanis ha egy gráf minden pontjának foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor bármely két nem szomszédos pontjának fokszámösszege legalább n.

35. Indirekt okoskodáshoz tegyük fel, hogy az n-pontú egyszerű G gráfnak legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ éle van, és nincs Hamilton-köre. Így a 34. feladat szerint kell léteznie G-ben két nem szomszédos p és q pontnak, amelyek fokszámösszege legfeljebb $n-1$. Tehát p-hez és q-hoz együttvéve legfeljebb $n-1$ él illeszkedik. Minthogy a teljes n-gráfban bármely két ponthoz együttvéve $2n-3$ él illeszkedik, G-nek legalább $2n-3-(n-1) = n-2$-vel kevesebb éle van, mint a teljes n-gráfnak. Tehát G éleinek száma legfeljebb

$$\frac{n(n-1)}{2}-(n-2) = \frac{n(n-1)}{2}-(n-1)+1 = \frac{n(n-1)-2(n-1)}{2}+1 =$$

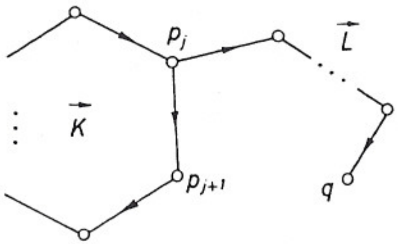
$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2}+1,$$

ez pedig ellentmondás.

Ha egy teljes 2-gráf és egy teljes $n-1$-gráf egy-egy pontját összeforrasztjuk, olyan n-pontú és $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$-élű gráfot kapunk, amelynek nincs Hamilton-köre. Ilyen gráf a 219. ábra az $n=6$ esetben.

36. Általában azt mutatjuk meg, hogy ha az egyszerű G gráfban a p és q pontok nem szomszédosak, akkor létezik G-nek kívánt irányítása. Irányítsuk ugyanis a G gráfot úgy, hogy p és q is csak kezdőpont (vagy csak végpont) legyen. A G-ből ily módon nyert irányított $\vec{G}$ gráfban p és q nem lehet irányított Hamilton-útnak belső pontja sem, végpontja sem (ill. kezdőpontja sem); márpedig mindkettőjük nem lehet kezdőpontja (ill. végpontja). Tehát $\vec{G}$-nek nem létezhet irányított Hamilton-útja.

37. Indirekt bizonyításhoz tegyük fel, hogy a feladatban szereplő erősen összefüggő $\vec{G}$ gráfnak nincs irányított Hamilton-köre. A 3. fejezetben említett maximálisból indulás módszerét alkalmazva jelöljük $\vec{K}$-val $\vec{G}$-nek egy leghosszabb irányított körét. A $\vec{G}$ gráf egyetlen $\vec{K}$-ba nem tartozó q pontjához sem illeszkedhet két olyan él, amelyek közül az egyiknek a kezdőpontja, a másiknak pedig a végpontja $\vec{K}$-beli. Ugyanis ellenkező esetben az előbbinek kezdőpontjából indulva és $\vec{K}$ mentén mindaddig haladva irányt követően, amíg csupa olyan pontot érintünk, amelyek kezdőpontjai egy-egy q-hoz illeszkedő élnek, el kell jutnunk $\vec{K}$-nak egy olyan irányított (p_i, p_{i+1}) éléhez, hogy (p_i, q) és (q, p_{i+1}) tartozik $\vec{G}$-hez. A (p_i, p_{i+1}) élt e két éllel kicserélve, $\vec{K}$-ból olyan irányított kört nyerünk, amely ellentmond $\vec{K}$ maximális tulajdonságának. Tehát a $\vec{K}$-ba nem tartozó bármelyik q pont vagy csak kezdőpontja, vagy csak végpontja az e pontot $\vec{K}$ valamennyi pontjával összekapcsoló éleknek; feltehetjük,



232. ábra

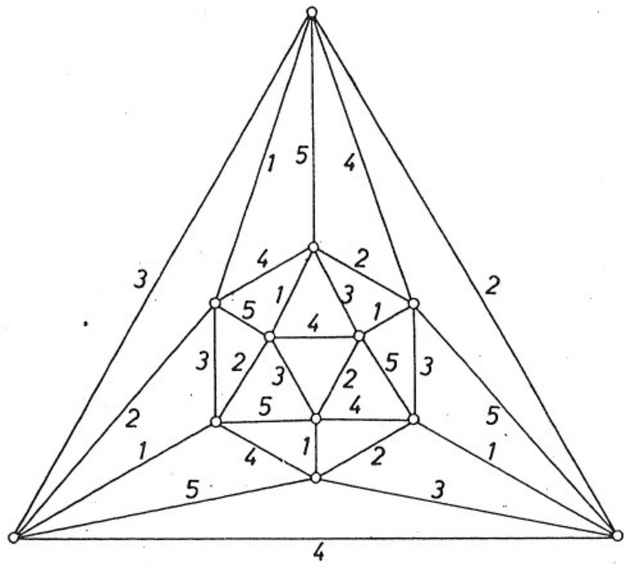
hogy q ilyeneknek csak kezdőpontja, ugyanis a másik esetben hasonlóan okoskodhatunk. Minthogy $\vec{G}$ erősen összefüggő, $\vec{K}$ bármely pontjából q irányított úttal elérhető. Vegyük egy ilyen útnak azt a q végpontú $\vec{L}$ részútját, amelynek p_j kezdőpontja $\vec{K}$-beli, más pontja azonban nem (232. ábra). Jelöljük $\vec{K}$ p_j kezdőpontú élének végpontját p_{j+1}-gyel. Minthogy a fentiek szerint (q, p_{j+1}) létezik, (p_j, p_{j+1})-et $\vec{L}$-lel és (q, p_{j+1})-gyel kicserélve, $\vec{K}$-ból olyan irányított kört nyerünk, amely ellentmond $\vec{K}$ maximális tulajdonságának. Tehát $\vec{K}$ $\vec{G}$ valamennyi pontját tartalmazza, és ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

38. Megmutatjuk, hogy ha található $\vec{G}$-nek pontjai bármely kettéosztása esetén két említett tulajdonságú éle, akkor $\vec{G}$ erősen összefüggő. Így azután az előző feladat állításából következik, hogy van $\vec{G}$-nek irányított Hamilton-köre.

Indirekt okoskodásunkhoz tegyük fel, hogy található $\vec{G}$-nek pontjai bármely kettéosztása esetén is két említett tulajdonságú éle, és $\vec{G}$ mégsem erősen összefüggő. Jelöljük $\vec{G}_0$-lal $\vec{G}$-nek egy maximális sok pontot tartalmazó olyan részgráfját, amely erősen összefüggő. Legalább egy pontot mindenesetre tartalmaz $\vec{G}_0$, de nem tartalmazhatja $\vec{G}$ valamennyi pontját. $\vec{G}$ pontjainak olyan kettéosztását tekintve, amelyben az egyik rész $\vec{G}_0$ pontjaiból áll, az adódik, hogy létezik $\vec{G}$-ben olyan irányított (p_0, p_1) él, hogy p_0 $\vec{G}_0$-ba tartozik, p_1 viszont nem. Most álljon a P ponthalmaz p_1-ből és $\vec{G}$ mindazon pontjaiból, amelyek $\vec{G}$-ben p_1-ből irányított úttal elérhetők. A P halmaz egyetlen pontja sem tartozhat $\vec{G}_0$-ba, mert különben léteznék p_1 kezdőpontú olyan $\vec{L}$ irányított út, amelynek végpontja $\vec{G}_0$-ba tartoznék. Ekkor azonban $\vec{G}_0$ bővíthető volna $\vec{L}$-lel és a (p_0, p_1) éllel úgy, hogy a bővített gráf is erősen összefüggő lenne, ellentétben $\vec{G}_0$ maximális tulajdonságával. Tehát van $\vec{G}$-nek nem P-beli pontja is. Így tekinthetjük $\vec{G}$-nek olyan kettéosztását, amelyben az egyik rész éppen P. A P halmazt meghatározó tulajdonságból azonban következik, hogy egyetlen P-beli pont sem lehet olyan élnek kezdőpontja, amelynek végpontja nem tartozik P-be. Így ellentmondásba kerülünk feltevésünkkel. Tehát a feladatban szereplő $\vec{G}$ erősen összefüggő gráf, és így van $\vec{G}$-nek irányított Hamilton-köre.

43. A fejezet elején ismertetett módszer alkalmazásával könnyen megszervezhetjük a kívánt körmérkőzést.

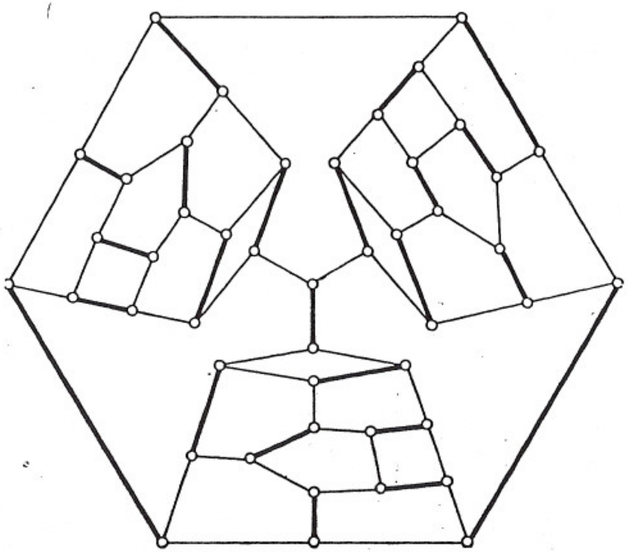
44. A 123. ábra vastag élei egy Hamilton-kör élei. E Hamilton-kör két elsőfokú faktorra bomlik. (A 233. ábrán az 1-gyel, ill. 2-vel jelölt élek mutatják a felbontást.) Ha a vékony élekből összeállítjuk a gráf egy másik Hamilton-körét, majd ezt is két elsőfokú faktorra bontjuk (3-mal, ill. 4-gyel jelölt élek), a megmaradt élek (az 5-tel jelöltek) a gráf egy elsőfokú faktorának élei.

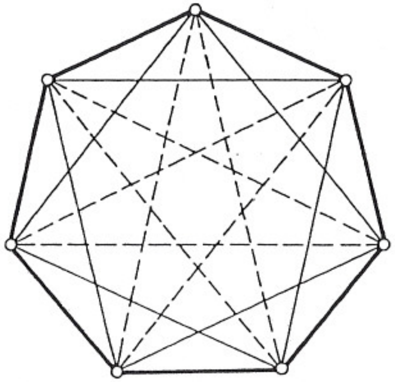

233. ábra

45. A 128. ábrának két faktorra bontásában az egyik faktor szükségképpen elsőfokú; egy ilyennek éleit jelöltük vastagon a 234. ábrán. A vékony élek egy másodfokú faktor élei. Megjegyezzük, hogy nincs a gráfnak összefüggő másodfokú faktora, azaz Hamilton-köre (4. fejezet 33. feladat).

46. A 235. ábrán vastag, vékony ill. szaggatott vonalak mutatnak egy kívánt felbontást. A faktorok Hamilton-körök; és ilyenek a 13. állítás után vázolt szerkesztéssel is nyerhetők.

47. A teljes 5-gráf bármely $G(A, B)$ páros részgráfja olyan, hogy A vagy B nem tartalmaz 2-nél több pontot. Tegyük fel, hogy a


234. ábra



235. ábra

$G(A, B)$ páros gráf éleit töröltük, és A nem tartalmaz 2-nél több pontot. Jelöljük C-vel a teljes 5-gráf A-ba nem tartozó pontjainak halmazát. Ekkor C legalább 3 pontból áll, és nem töröltük a teljes 5-gráf C feszítette részgráfjának egyetlen élét sem. Így biztosan nem töröltük a teljes 5-gráf valamely háromszögének éleit, tehát a törlés után megmaradt gráf nem lehet páros.

48. A 35. állítás alkalmazásával könnyen válaszolhatunk a kérdésre: Egyik gráfnak sincs elsőfokú faktora, mert ha a 35. állításban szereplő Q a 155. ábrán az a, b és c pontból áll, a 156. ábrán pedig a „középső" pontból, akkor $k=5$, ill. 3. Megjegyezzük, hogy a 155. ábrán minden pont a gráf valamely körének pontja, a 156. ábra pedig nem tartalmaz többszörös éleket — eltérően az eddig említett elsőfokú faktort nem tartalmazó harmadfokú reguláris gráfoktól.

49. Ha a G gráf eleget tesz a feladat állításában kiszabott feltételeknek, akkor van Euler-vonala. Mármost G-t egy Euler-vonala mentén bejárva, és eközben az éleket váltakozva 1-gyel, ill. 2-vel megjelölve, az azonosan jelölt élek G egy-egy k-adfokú faktorának élei lesznek, hiszen ahányszor 1-es élen érkeztünk egy pontba, annyiszor indultunk ki abból 2-esen, és viszont. Megállapításunk a kiindulási pontra is helytálló, mert G éleinek száma páros. Ezzel megoldottuk a feladatot.

Megjegyezzük, hogy ha a kívánt felbontás lehetséges, a szóban forgó gráfnak szükségképpen páros számú élt kell tartalmaznia, hiszen a két k-adfokú faktor éleinek száma egyenlő. A teljes $4m-1$-gráfok olyan $2k$-adfokú reguláris összefüggő gráfok, amelyekre $k = 2m-1$. E gráfok éleinek száma

$$\frac{(4m-1)(4m-2)}{2} = 2(4m^2-3m)+1,$$

vagyis minden pozitív egész m-re páratlan, tehát a feltételek közül nem hagyható el az, hogy a gráfnak páros számú éle van.

Az a gráf, amely két komponensből áll, éspedig mindkét komponens teljes $4m-1$-gráf, $k = 2m-1$-re szintén $2k$-adfokú reguláris gráf. Bár e gráf éleinek száma páros, mégsem bontható fel két k-adfokú faktorra, mert különben komponensenként is felbontható volna, márpedig az előbbiek szerint nem az. Tehát nem hagyható el a feladat szövegéből az „összefüggő" szó sem.

50. Legyen G Euler-gráf. Ekkor a 3. fejezet 6. állítása szerint G minden pontjának foka páros. Így a 3. fejezet 5. feladatának állítása szerint G minden éle valamely G-beli körnek éle. Ennélfogva a 3. fejezet 12. feladatának állítása szerint G nem tartalmaz hidat.

51. Legyen h az összefüggő k-adfokú reguláris G gráf egy hídja. Ha k páros volna, akkor G a 3. fejezet 5. feladatának állítása szerint nem tartalmazhatna hidat. Tehát k páratlan. Jelöljük G egy páratlan fokú faktorát F_1-gyel. Ekkor az F_1-be nem tartozó élek G egy páros fokú F_2 faktorának élei. A 3. fejezet 5. feladatának állítása szerint F_2 minden éle valamely F_2-beli — és így egyszersmind G-beli — körnek éle. Ennélfogva a 3. fejezet 12. feladatának állítása szerint h nem tartozhat F_2-be, és így szükségképpen F_1-be tartozik.

52. A feladat állítása az előző feladat állításának nyilvánvaló következménye.

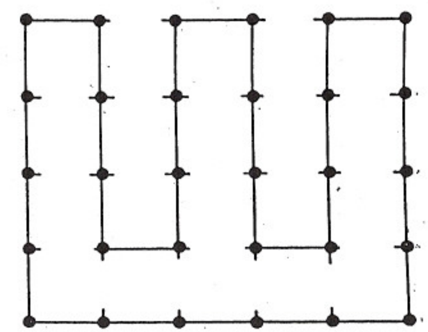
53. A feladat állítása szintén az 51. feladat állításának következménye.

54. Tegyük fel, hogy az összefüggő $2k+1$-edfokú reguláris gráfnak valamely pontjához $2k+1$ híd illeszkedik. Bárhogyan is bontjuk fel a gráfot faktorokra, kell lenni a faktorok között egy páratlan fokúnak. Ennek foka az 51. feladat állítása szerint $2k+1$. Tehát nem lehet a gráfnak $2k+1$-nél kisebb fokú faktora.

Ebből az is adódik, hogy a 42. állításhoz felsorakoztatott G_{2k+1} (G_5 a 154. ábrán látható) gráfok egyikének sincs valódi részgráfját alkotó faktora, mert a „középső" ponthoz csak hidak illeszkednek.

55. Azt kell belátnunk, hogy az összefüggő páros G gráf pontjainak bármely fehér-fekete kettéosztásában ugyanazok a pontok az azonos színűek. Legyen p a G gráf egy tetszőlegesen választott pontja, G többi pontját pedig jelöljük így: $a_1, a_2, a_3, \dots$. Minthogy G összefüggő, p-ből a_i elérhető a gráf egy L_i útjával ($i = 1, 2, 3, \dots$). A pontok bármely fehér-fekete kettéosztásában minden él két végpontja különböző színű. Ebből következik, hogy ha L_i hossza páros, akkor a_i színe mindig azonos p színével, és ha L_i hossza páratlan, akkor a_i színe mindig különbözik p színétől, minden i-re.

56. Elképzelhetjük a hálózatot egy $m \cdot n$ mezőből álló „sakktáblára" terítettnek úgy, hogy minden mezőn pontosan egy gyöngyszem helyezkedjék el. Színezzünk minden gyöngyszemet annak a mezőnek a színével, amelyen fekszik. Ekkor minden zsinórdarab két különböző színű gyöngyszemet kapcsol össze. Tehát páros az a gráf, amelynek pontjai a gyöngyszemek és élei a zsinórdarabok. A gráfok nyelvén az a kérdés, hogy milyen m és n értékek esetén van ennek az $m \cdot n$ pontot tartalmazó páros gráfnak Hamilton-köre. Páros gráf minden körének hossza — és így minden Hamilton-körének hossza is — páros. Ebből következik, hogy hálózatunk az említett módon nem alakítható egyetlen kör alakú lánccá, ha $m \cdot n$ páratlan. Ha viszont $m \cdot n$ páros, azaz m és n közül legalább az egyik páros, akkor a kívánt körlánc mindig létrehozható. Példaként a 157. ábrán illusztrált hálózatot alakítjuk egyetlen körlánccá (236. ábra), ennek mintájára általában is eljárhatunk.



236. ábra

57. Tegyük fel, hogy egy páros gráfban m számú pont fehér és n számú fekete. Jelöljük egy — mondjuk fehér — pont fokát k_0-val, és tegyük fel, hogy a gráf minden más pontja k-adfokú; továbbá tegyük fel, hogy $k_0>0$ és $k>0$. Számoljuk össze a gráf éleit két módon: a fehér, ill. fekete pontokban létrehozott illeszkedéseket tekintve. Így a következő egyenlőséget nyerjük:

$$k_0+(m-1)k = nk.$$

Ebből

$$k_0 = (n-m+1)k.$$

Minthogy $k_0>0$ és $k>0$, $n-m+1 \geqq 1$, és így

$$k_0 \geqq k.$$

Tehát nincs izolált pontot nem tartalmazó olyan páros gráf, amelyben egy kivétellel minden pont foka egyenlő, a kivételes pont foka pedig kisebb a többi pont fokánál.

58. A feladat állítását n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $n=1$-re nyilvánvaló, hiszen a teljes 2-gráf páros gráf. Legyen most $n \geqq 1$, és tegyük fel, hogy igaz az állítás n-re. Bebizonyítjuk, hogy akkor igaz $n+1$-re is. Álljon az A ponthalmaz a G-vel jelölt teljes 2^{n+1}-gráf tetszőlegesen választott 2^n számú pontjából és a B ponthalmaz G-nek A-ba nem tartozó pontjaiból. Ekkor B is 2^n pontból áll, hiszen $2\cdot 2^n = 2^{n+1}$. Legyen a G_A, ill. G_B gráf G-nek A, ill. B feszítette részgráfja. Legyen továbbá a G_0 gráf G-nek valamennyi lehetséges élét tartalmazó $G_0(A, B)$ páros részgráfja. Mind G_A, mind pedig G_B teljes 2^n-gráf. Ennélfogva indukciós feltevésünk értelmében kijelölhető mindkét gráfnak n számú részgráfja úgy, hogy mindegyik páros gráf legyen, és G_A, ill. G_B minden éle szerepeljen a kijelölt részgráfok valamelyikében. Minthogy A-nak és B-nek nincs közös pontja, G_A és G_B egy-egy kijelölt páros részgráfja együttvéve is páros gráf. Párosítsuk G_A és G_B egy-egy kijelölt páros részgráfját, és jelöljük az e párok alkotta páros gráfokat így: $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Mármost a

$$G_0, G_1, G_2, \ldots, G_n$$

páros gráfok együttvéve G minden élét tartalmazzák; tehát igaz a feladat állítása $n+1$-re is.

Megjegyezzük, hogy a teljes 2^n+1-gráfnak nem jelölhető ki n számú részgráfja úgy, hogy mindegyik páros gráf legyen, és a teljes 2^n+1-gráf minden éle szerepeljen a kijelölt részgráfok valamelyikében. Megjegyzésünket $n=2$-re a 47. gyakorlat állítása támasztja alá.

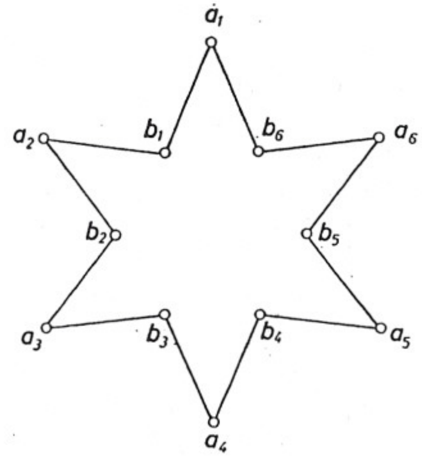
59. A szóban forgó páros gráf minden n-re olyan $G(A, B)$ gráf, hogy A is és B is $2n$ pontból áll, és minden A-beli pont szomszédos minden B-beli ponttal. Jelöljük A, ill. B pontjait így:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2n},$$

ill.

$$b_1, b_2, \ldots, b_{2n}.$$

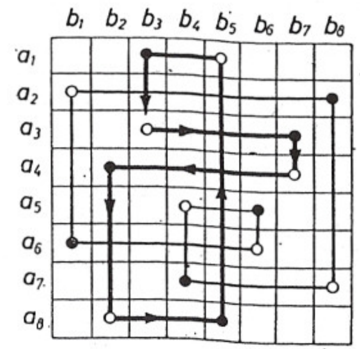
Egy kívánt felbontásra vezető eljárást szemléletesen adunk meg. A 237. ábra $n=3$-ra szemléltet, de annak alapján könnyen elképzelhető az általános eset is. Tekintsük tehát az ábrát. Az a_i és b_j pontokat egy-egy azonos középpontú szabályos $2n$-szög csúcsaiba helyeztük el. A meghúzott vonalak gráfunk egy Hamilton-körét jelölik ki; legyen ez H_1. Most növeljük meg az a_i pontok indexeit 2-vel, és legyen a_{2n-1}-ből a_1, a_{2n}-ből a_2. Ekkor ábránk ismét gráfunk egy Hamilton-körét jelöli ki; legyen ez H_2. Az a_i pontok indexeinek módosítását ismételve nyerjük gráfunk $H_3, H_4, \cdots, H_n$ Hamilton-köreit. Könnyen beláthatjuk, hogy a felsorolt Hamilton-körök közül bármely kettőnek sincs közös éle; tehát gráfunk egy kívánt felbontását nyertük.



237. ábra

60. A feladatra két megoldást is közlünk. Az első megoldásban nem használunk gráfelméleti ismereteket, a másodikban azonban igen.

Az első megoldáshoz induljunk ki valamelyik kijelölt mezőről, és haladjunk vízszintesen az ugyanazon sorban kijelölt másik mezőig, majd folytassuk utunkat függőlegesen az ugyanazon oszlopban elhelyezkedő másik kijelölt mezőig, és így haladjunk tovább váltakozva vízszintes és függőleges irányban. Továbbhaladás közben előbb-utóbb utunk során már érintett mezőhöz kell érkeznünk (238. ábra). Ez a mező csak utunk kiindulópontja lehet, mert ha más M mező volna, akkor ennek első érintésekor az odavezető PM és az onnan továbbvezető MQ útszakasz, valamint a második érintéskor odavezető RM útszakasz három különböző P, Q, R mezőt szolgáltatna, amelyeknek mindegyike vagy ugyanabban a sorban, vagy ugyanabban az oszlopban van, mint az M mező. Ez azonban lehetetlenség, mert M sorában és oszlopában csak egy-egy további kijelölt mező található. Az így záródó út páros számú mezőt érint, mert váltakozva vízszintes és függőleges szakaszokból áll. Az utunk során érintett minden második mezőbe fehér bábot, a többibe fekete bábot állítva megállapíthatjuk, hogy minden olyan sorban és oszlopban, amelyen utunk során elmozdultunk, éppen 1 fehér és 1 fekete báb áll.

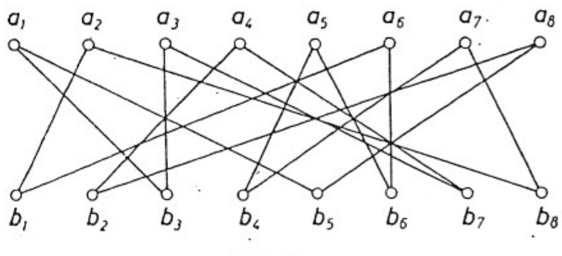


238. ábra

Ha nem minden sor és oszlop szerepel ebben a megállapításban, ha tehát utunk nem minden kijelölt mezőt érintett, akkor a nem érintett mezők valamelyikéből kiindulva, ugyanolyan előírással újabb záródó úthoz jutunk, s az ennek során érintett mezőkbe váltakozva fehér és fekete bábokat állítva, újabb sorokba és oszlopokba fog 1—1 fehér és fekete báb kerülni. A második út nem mehet át az első során érintett mezőn, hiszen a kiindulásul vett mezőt csak úgy nem érinthette az első út, ha az ugyanazon sorban kijelölt másik mezőt sem érintette, ami csak úgy lehet, ha az annak oszlopában kijelölt másik mezőt sem érintette s í. t.

Szükség esetén tovább ismételjük ezt az eljárást, amíg minden sorba és oszlopba nem állítottunk 1—1 fehér és fekete bábot.

Feladatunk második megoldásához hozzuk létre a $G = G(A, B)$ páros gráfot a következőképpen: Mind az A, mind a B halmaz 8 pontból áll, a sakktábla 8 sorának, ill. 8 oszlopának megfelelően. Ezek: $a_1, a_2, \dots, a_8$, ill. $b_1, b_2, \dots, b_8$. Szerepeljen G-ben az $\{a_i, b_j\}$ él pontosan akkor, ha az a_i sorában és b_j oszlopában elhelyezkedő mező a kijelöltek között van. Tehát gráfunk élei a kijelölt mezőknek felelnek meg, és így G-nek 16 éle van. (A 238. ábrának megfelelő G a 239. ábrán látható.) Az, hogy a sakktábla minden sorában és minden oszlopában éppen 2—2 kijelölt mező van, azt jelenti, hogy G minden pontjának foka 2. Tehát G másodfokú reguláris páros gráf, és így akár a 8. feladat állítása szerint, akár a 18. állítás szerint felbomlik F_1 és F_2 elsőfokú faktorokra. Ha az F_1 éleinek megfelelő mezőkre fehér bábokat, az F_2 éleinek megfelelőkre pedig fekete bábokat helyezünk, a kívánt elrendezést nyerjük.



239. ábra

Érdemes megfigyelni, hogy feladatunk és a 8. feladat lényege, gráfelméleti tartalmukat tekintve, nem különböző.

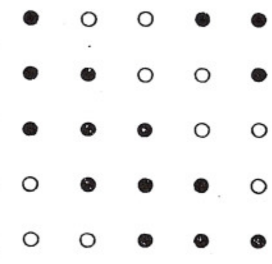
61. Az állítást két módon is bizonyítjuk. Az első bizonyításhoz tegyük fel, hogy h az összefüggő k-adfokú ($k \geqq 2$) reguláris páros gráfnak hídja. Töröljük h-t. Ekkor szétesik a gráf izolált pontot nem tartalmazó két olyan páros gráfra, amelyek mindegyikében egy-egy pont foka $k-1$, a többi pont foka pedig k. Ez azonban az 57. feladat kérdésére adott tagadó válasz értelmében lehetetlen.

Második bizonyításhoz alkalmazzuk a 18. állítást, amely szerint gráfunk felbomlik elsőfokú faktorokra, éspedig legalább kettőre. Az 51. feladat állítása szerint e faktorok mindegyike tartalmazza a gráf minden hídját. Ennélfogva gráfunknak nem lehet hídja.

62. Rendezzük el a tanulókat n sorban és n oszlopban úgy, hogy ugyanannak az iskolának a diakjai egyetlen sorban és ugyanazon tantárgyban versenyzők egyetlen

oszlopban helyezkedjenek el. Most hozzuk létre a $G(A, B)$ páros gráfot a következőképpen: Mind az A, mind a B halmaz n pontból áll, a soroknak, ill. az oszlopoknak megfelelően. Minden egyes versenyzőnek megfeleltetünk egy élt, mégpedig az i-edik sorban és a j-edik oszlopban állónak azt, amelynek A-beli végpontja az i-edik sornak, B-beli végpontja pedig a j-edik oszlopnak felel meg. Így gráfunk n-edfokú reguláris páros gráf lesz. Mármost azt kell bizonyítanunk, hogy van gráfunknak k-adfokú faktora; ugyanis feladatunkban éppen k-adfokú faktor éleinek megfelelő versenyzők kiválasztásáról van szó. A 18. állítás szerint gráfunk felbomlik n elsőfokú faktorra. Ugyanazon felbontásban szereplő elsőfokú faktorok közül bármely k számú faktor szorzata k-adfokú faktort szolgáltat.

Könnyen belátható, hogy kívánt kiválasztást nyerünk, ha oszloponként rendre az első, a második, ..., az n-edik sorszámú tanulótól kezdve választunk ki egymás után elhelyezkedő k számú versenyzőt, úgy képzelve, hogy az n-edik sorszám után az első következik ($n=5$ és $k=3$ esetén a kiválasztottakat a 240. ábra befeketített karikái jelzik).



240. ábra

63. Azt kell bizonyítanunk, hogy többszörös éleket nem tartalmazó $G(A, B)$ páros gráfnak, amelyben mind A, mind B n számú pontból áll, és amelyben minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, van B-t lefedő független élhalmaza. Elegendő megmutatnunk, hogy gráfunk teljesíti a 19. állítás feltételeit. Válasszuk ki B-nek k számú pontját. Ha $k \leqq \frac{n}{2}$, akkor bármely kiválasztott pontnak legalább k szomszédja van, hiszen bármely pont foka legalább $\frac{n}{2}$, és gráfunk nem tartalmaz többszörös éleket. Ha pedig $k > \frac{n}{2}$, akkor a kiválasztott pontok szomszédai kimerítik A-t, mert B ki nem választott pontjainak száma kisebb, mint $\frac{n}{2}$, és minden A-beli pontnak legalább $\frac{n}{2}$ B-beli szomszédja van, ennélfogva minden A-beli pontnak van szomszédja a kiválasztott pontok között.

64. A bizonyítandó egyenlőség a 28., 22. és a 30. állításokban szereplő egyenlőségekből adódik.

Megjegyzés: Bizonyítható, hogy igaz a feladat állítása a „páros'' szó elhagyásával is.

65. Indirekt okoskodáshoz tegyük fel, hogy a többszörös éleket nem tartalmazó $G = G(A, B)$ páros gráfban mind az A, mind a B halmaz m pontból áll ($m \geqq 2$), G-nek legalább $m(m-1)+2$ éle van, és nincs Hamilton-köre. Ekkor nem lehet minden A-beli pont minden B-beli ponttal szomszédos, hiszen különben nyilvánvalóan volna G-nek Hamilton-köre. Ennélfogva a 32. állítás szerint van G-ben olyan A-beli a és B-beli b pont, amelyek nem szomszédosak, és amelyekre

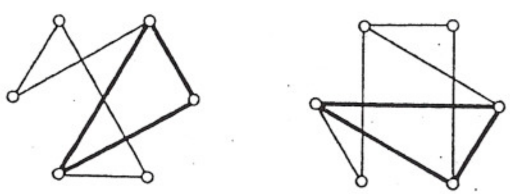
$$\varphi(a)+\varphi(b) \leqq m.$$

Ha a szomszédos volna valamennyi B-beli ponttal, és b szomszédos volna valamennyi A-beli ponttal, akkor e szomszédosságok együttvéve $2m-1$ élt jelentenének. Ebből azonban a fenti egyenlőtlenség szerint legfeljebb m szerepel G-ben. Tehát G-nek legalább $2m-1-m = m-1$ éllel kevesebb éle van, mint annak a többszörös éleket nem tartalmazó G^* gráfnak, amelyet G-ből újabb élek behúzásával úgy nyerünk, hogy minden A-beli pontot minden B-beli ponttal szomszédossá teszünk. Így, minthogy G^* éleinek száma m^2, G éleinek száma legfeljebb $m^2-(m-1) = m(m-1)+1$, ez pedig ellentmondás. Tehát az a feltevésünk, hogy G-nek nincs Hamilton-köre, helytelen. (Vö. a feladatot a 4. fejezet 35. feladatával.)

66. A feladat állítása a 33. állítás egyszerű következménye, hiszen nincs a társaságban olyan lány, ill. fiú, aki legfeljebb $\frac{m}{2}$ számú fiút, ill. lányt ismer, és így a megfelelő gráfnak van Hamilton-köre, amely kívánt elrendezést határoz meg.

6. fejezet

82. A 241. ábra követelményünknek megfelelő komplementer gráfokat ábrázol; a háromszögek élei vastagok.



241. ábra

83. Elegendő megmutatnunk, hogy bármely él két végpontjának sincs közös szomszédja. Az ábra szimmetriája folytán azonban elegendő csupán két élre szorítkoznunk: az ábra peremét alkotó sokszög egy élére és egy átlójára.

84. A gyakorlat a 43. állítás alkalmazását kívánja (mindkét átlóját tartalmazó négyszög egyúttal egy teljes 4-gráf is); az első kérdésre a 40. állítás alkalmazásával is válaszolhatunk. A 40., ill. $k=3$ mellett a 43. állításban megadott élszámkorlátnál eggyel több szakasz meghúzása már elegendő. Tehát a két kérdésre adott helyes válaszok: az $n=8$ esetben 17, ill. 22, az $n=9$ esetben pedig 21, ill. 28.

85. Az 5.28 és a 6.53 állítások alkalmazásával

$$n = fp_{\max}+lp_{\min} \leqq fp_{\max}+\frac{2én}{2é+n}.$$

Ebből

$$fp_{\max} \geqq n-\frac{2én}{2é+n} = \frac{n^2}{2é+n}.$$

A 6.53 állítás szerint a kérdezett egyenlőség pontosan akkor áll, ha a szóban forgó gráf teljes n-gráf, vagy minden komponense ugyanannyi pontú teljes gráf.

86. Minthogy $d \leqq \frac{f}{3}$,

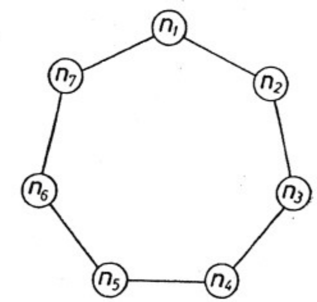
$$\frac{f+d}{4} \leqq \frac{f+\frac{f}{3}}{4} = \frac{f}{3} \quad \text{és} \quad \frac{f}{6}+\frac{d}{2} \leqq \frac{f}{6}+\frac{f}{6} = \frac{f}{3}.$$

Ennélfogva mindkét gráfra $fp_{\max}=f$. A legkisebb fokszám is megegyezik e két gráfban; az elsőben így adódik:

$$\frac{f+d}{4}+\frac{f+d}{4} = \frac{f+d}{2},$$

és a másodikban így:

$$\frac{f}{3}+\frac{f}{6}+\frac{d}{2} = \frac{f+d}{2}.$$



242. ábra

Gráfjaink $((n_1, n_2, \ldots, n_7))$ gráfok: 242. ábra. Jelöljünk egy ilyen gráfot G-vel. Ha töröljük G-nek az ábra bármely két karikáját összekapcsoló vonalának megfelelő éleit, könnyen láthatjuk, hogy páros gráfot kapunk. Ennélfogva bármely G-beli páratlan kör tartalmaz élt az ábra 7 vonala szemléltette 7 típus mindegyikéből. Ebből következik, hogy G minden páratlan körének hossza legalább 7.

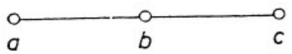
87. Az előző gyakorlat módján eljárva világos, hogy e gráfok nem tartalmaznak háromszöget. Minthogy csak $n \geqq 5$ jöhet számításba, amikor is $\frac{n-3}{2} \geqq \frac{n-1}{4} \geqq 1$, mindkét gráfra $fp_{\max}=\frac{n-1}{2}$. Az élek száma az elsőben

$$1+1+\frac{n-3}{2}\cdot 2+\left(\frac{n-3}{2}\right)^2 = \frac{n^2-6n+9+4n-12+4}{4}+1 = \frac{(n-1)^2}{4}+1.$$

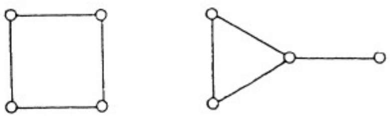
Ugyanennyi van a másodikban is, mert

$$\frac{n-1}{4}\cdot 2+\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-1}{4}\cdot 2+1 = \frac{n^2-4n+3+2n-2}{4}+1 = \frac{(n-1)^2}{4}+1.$$

88. A szóban forgó gráfoknak 2. 4 szerint legfeljebb $n-1$ élük lehet. Ha $n-1$ élük van, akkor 2. 26 szerint összefüggők, vagyis fagráfok. Jelöljünk F-fel egy n-pontú fagráfot. Ha $n \geqq 3$, akkor F tartalmaz egy (a 243. ábrán szemléltetett) 2 hosszúságú utat. Ha F nem tartalmaz 2-nél hosszabb utat, akkor minden éle szükségképpen b-hez illeszkedik. Az ilyen gráfokat „csillaggráfok"-nak is szokás nevezni. Csillaggráf a 243. ábra, a teljes 1- és 2-gráf is. Tehát a keresett gráfok $n-1$-élűek és csillaggráfok; más nincs.



243. ábra



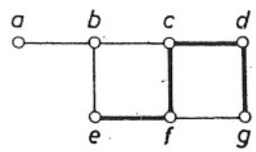
244. ábra

89. A 194. ábrán a 4-pontú egyszerű gráfok láthatók. Közülük kettő felel meg: ezekkel izomorfak láthatók a 244. ábrán.

90. Átlót tartalmazó négyszög háromszöget is tartalmaz. Az $\langle m, m\rangle$ gráfok mind páros gráfok, tehát nem tartalmaznak háromszöget, és így nem lehet bennük átlót tartalmazó négyszög sem.

91. A $\langle 2, n-2\rangle$ páros gráfokban minden kör négyszög, és így az előbbi gyakorlatban mondottak igazolják állításunkat.

92. Az 5.23 szerint annyi maximális független ponthalmaz jelölhető ki a 192., vagyis a 245. ábrán látható gráfban, ahány minimális lefogó ponthalmaz. A vastagon megjelölt 4 hosszúságú út éleinek lefogásához két pont szükséges, és két pont is csak akkor elegendő, ha az f és d. Ezek nem fogják le az $\{a, b\}$ élt. Ennélfogva minden lefogó ponthalmaz legalább 3 pontból áll. Ha az $\{a, b\}$ élt b-vel fogjuk le, akkor b, f és d együtt minden élt lefognak, különben nem. Tehát gráfunknak csak egy minimális lefogó ponthalmaza van, és így csak az a, c, e és g pontok alkotnak maximális független ponthalmazt.



245. ábra

93. A nem összefüggő n-pontú egyszerű G gráf G^* komplementere 1.42 szerint összefüggő. Ha G éleinek száma maximális, akkor G^* éleinek száma minimális. Az 1.22 állítás szerint G^* éleinek száma legalább $n-1$. Ennélfogva G éleinek száma legfeljebb

$$\binom{n}{2}-(n-1) = \frac{n(n-1)-2(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Ha az n-pontú egyszerű G_1 gráf két komponensből áll, amelyek közül az egyik teljes 1-gráf, a másik pedig teljes $n-1$-gráf, akkor éleinek száma $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; tehát G_1 itt extrém gráf. Megmutatjuk, hogy más extrém gráf nincs. Tegyük fel, hogy az n-pontú G_2 is extrém gráf. Minthogy G_2 nem összefüggő, minden pontjának foka legfeljebb $n-2$. Ha G_2 minden pontjának foka legfeljebb $n-3$ volna, akkor G_2

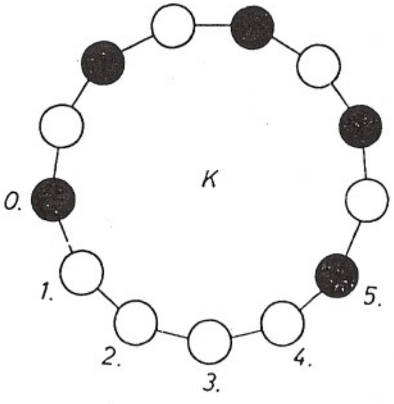
éleinek száma legfeljebb $\frac{n(n-3)}{2}$ volna; ez azonban kisebb, mint $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, tehát G_2 nem lehetne extrém gráf. Ennélfogva van G_2-nek egy $n-2$-edfokú p pontja. Így pontosan egy q pont van G_2-ben, amely p-től is és p szomszédjaitól is különbözik. Minthogy G_2 nem összefüggő, q G_2-nek izolált pontja. Ebből már következik, hogy G_2 izomorf G_1-gyel.

94. Ha G az $n(3, 3)$ számot jellemző problémához tartozó extrém gráf, és G komplementere G^*, akkor G és G^* egyaránt 5-pontú, egyikük sem tartalmaz háromszöget, és mindegyikükre $fp_{\max} \leqq 2$. Ha egyikükre $fp_{\max}=1$ volna, akkor az teljes 5-gráf volna, és így tartalmazna háromszöget. Tehát G-re is és G^*-ra is $fp_{\max}=2$. A 17. állítás szerint G-ben is és G^*-ban is minden p pontra $\varphi(p) \leqq 2$. Minthogy p-nek G-beli és G^*-beli fokösszege 4, mindkét gráf minden pontja másodfokú. Az 1.42 szerint G vagy G^* összefüggő. Ennélfogva az 1.36 szerint egyikük ötszög; ámde egy ötszög komplementere is ötszög.

95. Állításunkat indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a 6-pontú egyszerű G gráfban és G^* komplementerében tartalmazott háromszögek együttes száma legfeljebb 1. Az 1.16. állítás szerint azonban egyikük tartalmaz háromszöget; legyen ez G^*. Ennélfogva a háromszöget nem tartalmazó G-ben van 3 független pont. Több független pont nem található G-ben, mert akkor G^* tartalmazna teljes 4-gráfot, és így két háromszöget is, ellentétben indirekt feltevésünkkel. Tehát G-re $fp_{\max}=3$. Jelöljük G egy maximális független ponthalmazát F-fel. Minthogy G minden maximális független ponthalmaza G^*-ban háromszöget feszít, nincs G-ben más maximális független ponthalmaz, mint F. Ennélfogva G-nek az F-be nem tartozó pontjai feszítette részgráfjában van egy $\{p, q\}$ él. Minthogy F maximális, van G-ben p-nek is, q-nak is F-beli szomszédja. Ha p-nek csak egy F-beli szomszédja volna G-ben, akkor p és a vele nem szomszédos F-beli két pont G-nek F-től különböző maximális független ponthalmazát alkotná; ez azonban lehetetlen. Ugyanez elmondható q-ról is. Tehát p-nek is, q-nak is van legalább két F-beli szomszédja G-ben; ennélfogva van közös szomszédjuk is, vagyis van G-ben háromszög, és ez ellentmondás.

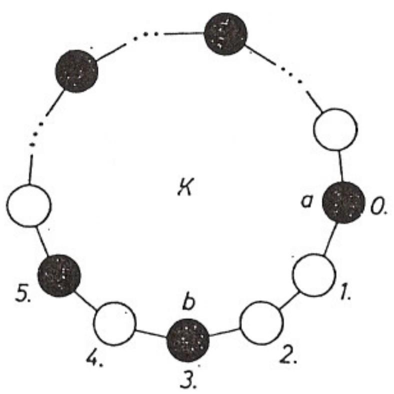
A 82. gyakorlat szerint nem lehet állítani, hogy mindig van a tekintett komplementer gráfokban együttesen kettőnél több háromszög is.

96. A 189. ábrában minden pont foka 4. A 83. gyakorlat állítása szerint nincs gráfunkban háromszög. Ennélfogva bármely pont 4 szomszédja független ponthalmazt alkot. Jelöljük az ábra peremét alkotó 13-szöget K-val. Ábránk szimmetriája folytán könnyen belátható, hogy bármely p pont szomszédjai, a pontok K mentén vett sorrendjét tekintve, a p-t követő 1., 5., 8. és 12. helyen állnak. Tegyük fel, hogy van gráfunkban 5 független pont, és 5 független pontot egy-egy fekete, a többi 8-at pedig egy-egy fehér korong fed. Két fekete koronggal fedett pont nyilván nem lehet szomszédos. Hol helyezkedhetnek el a fehér korongok a feketékhez viszonyítva? Bármely két fekete korong között van egy fehér. (A korongok sorrendjét és szomszédosságát K mentén értjük; két fekete korongot, amelyek között K egyik ívén

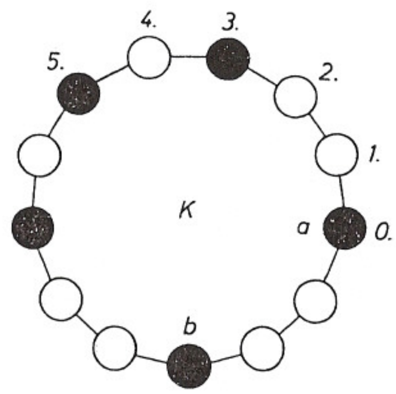


246. ábra

nincs fekete korong, szomszédosnak mondunk.) Ez 5 fehér korongot igényel. Keressük meg a többi 3 fehér korong helyét. E 3 korong nem lehet két szomszédos fekete között, mert különben volna olyan fekete, amelyet követő 5. korong is fekete volna (246. ábra), és ez ellentmond annak, hogy a fekete korongok fedte pontok függetlenek. Ennélfogva van két olyan — a-val és b-vel jelölt — fekete korong, hogy közöttük pontosan két fehér van. Ámde ekkor b-nek az a-tól különböző fekete szomszédja és b között kell lenni még egy fehérnek, mert különben ismét az előbbi lehetetlen helyzet áll elő: 247. ábra. Ugyanez elmondható, ha b helyett a-t és a helyett b-t mondunk. Így a 13 korong sorrendje adott, de ekkor ismét lehetetlenségre jutunk: 248. ábra. Ennélfogva gráfunkra $fp_{\max} = 4$.



247. ábra



248. ábra

97. A 83. gyakorlat és a 96. feladat állítása szerint $n(3,5) > 13$, vagyis $n(3,5) \geqq 14$. A 24. állítás szerint viszont

$$n(3,5) \leqq \binom{6}{2} - \left[\frac{5}{2}\right] + 1 = 15 - 2 + 1 = 14.$$

Ennélfogva $n(3,5) = 14$.

A 189. ábrán látható gráf ide tartozó extrém gráf. Be lehet látni, hogy más ide tartozó extrém gráf nincs.

98. Töröljük a teljes n-gráf egy p pontját a hozzá illeszkedő élekkel együtt. Az így nyert teljes $n-1$-gráf az 5.1. állítás szerint felbontható $n-2$ elsőfokú faktorra. Színezzük egy ilyen felbontás esetén az ugyanabba a faktorba tartozó éleket azo-

nosra, a különbözőkbe tartozókat pedig különbözőre; majd színezzük a p-hez illeszkedő éleket mind különbözőre. Az így színezett teljes n-gráf egyszínű részgráfjának minden komponense legfeljebb 3-pontú. Ennélfogva ha n páratlan, akkor

$$f_{n-1}(n) \leqq 3.$$

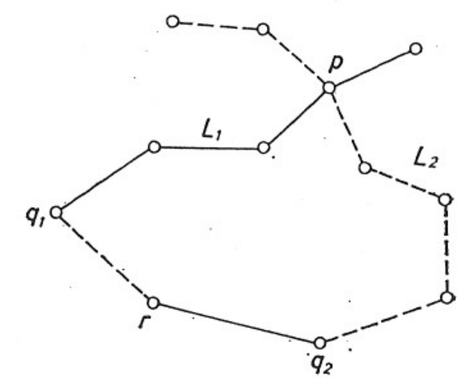
Nyilvánvaló, hogy $f_{n-1}(n) \geqq 2$. Tegyük fel, hogy valamely páratlan $n \geqq 3$-ra $f_{n-1}(n) = 2$. Ez annyit jelent, hogy lehet a teljes n-gráf éleit $n-1$ színnel színezni, úgy, hogy bármely két azonos színű élnek se legyen közös pontja. Ilyen színezésben minden ponthoz $n-1$ számú különböző színű él illeszkedik. Ekkor az ugyanolyan színű élek a teljes n-gráf egy elsőfokú faktorát alkotják. Ebből azonban következik, hogy n nem lehet páratlan. Tehát páratlan n mellett fennáll a következő is:

$$f_{n-1}(n) \geqq 3,$$

és ez a fenti egyenlőtlenséggel együtt a kívánt egyenlőséget adja.

99. Azt kell megmutatnunk, hogy bármely $m+k$-pontú egyszerű G gráf tartalmaz m hosszúságú utat, vagy G^* komplementere tartalmaz k hosszúságú utat. Jelöljük ki e két gráfot a T teljes $m+k$-gráfban éleinek pirosra, ill. kékre színezésével úgy, hogy G élei a pirosak, G^* élei pedig a kékek legyenek. Azt kell bizonyítanunk, hogy van T-ben m hosszúságú piros vagy k hosszúságú kék út. Ha T minden éle ugyanolyan színű, akkor van benne $m+k-1$ hosszúságú piros vagy kék út, és így állításunk máris bizonyított. Ha van T-nek piros éle is és kék éle is, akkor van T-nek olyan T' részgráfja, amely egy piros és egy vele pontosan egy közös pontot tartalmazó kék útból áll. Jelöljünk T ilyen T' részgráfjai és egyszínű útjai közül egy legtöbb élt tartalmazót T^*-gal; továbbá, ha T^* nem egyszínű, jelöljük T^* piros, ill. kék éleit tartalmazó útját L_1-gyel, ill. L_2-vel, L_1 és L_2 közös pontját pedig p-vel. Ekkor van L_1-nek is L_2-nek is p-től különböző végpontja; legyenek ilyenek q_1, ill. q_2.

Most belátjuk, hogy T minden pontja szerepel T^*-ban. Tegyük fel ugyanis, hogy a T-beli r pont nem szerepel T^*-ban. Ha T^* egyszínű út, és egy végpontját q-val jelöljük, az akár piros, akár kék T-beli $\{r, q\}$ él hozzácsatolása ellentmond T^* maximális tulajdonságának. Ha T^* nem egyszínű, akkor maximális voltából következik, hogy a T-beli $\{r, q_1\}$ él kék, $\{r, q_2\}$ pedig piros. A 249. ábrán szemléltetünk; a nem szaggatott élek pirosak, a szaggatottak kékek. Mármost a T-beli $\{q_1, q_2\}$ vagy piros, vagy kék. Az előbbi esetben töröljük T^*-nak a q_2-höz illeszkedő kék élét, és vegyük hozzá a $\{q_1, q_2\}$ és $\{q_2, r\}$ éleket. T^*-nak ez a módosítása ellentmond maximális



249. ábra

tulajdonságának. Az utóbbi esetben hasonlóan okoskodhatunk. Ennélfogva L_1 hosszát m_1-gyel, L_2 hosszát pedig k_1-gyel jelölve,

$$m+k = m_1+1+k_1.$$

Ha nincs T-ben m hosszúságú piros út, akkor T^*-ban sincs, tehát $m_1 \leqq m-1$, és így

$$m+k \leqq m+k_1,$$

vagyis

$$k \leqq k_1,$$

tehát van T^*-ban és így T-ben is k hosszúságú kék út.

100. Jelöljük a feladat feltételeit kielégítő gráfok egyikét G-vel, G egy maximális független ponthalmazát F-fel és az F-be nem tartozó G-beli pontok halmazát L-lel. Ekkor F, ill. L pontjainak száma k, ill. $n-k$. Minthogy F maximális, L minden pontja szomszédos legalább egy F-beli ponttal. Ennélfogva van F-ben egy legalább $\frac{n-k}{k}$-adfokú pont, mert különben F pontjaihoz együttesen $\frac{n-k}{k}k = n-k$-nál kevesebb él illeszkednék, és így volna F-beli ponttal nem szomszédos L-beli pont. Így a 17. állítás szerint

$$\frac{n-k}{k} \leqq k,$$

és ebből adódik a feladatban szereplő egyenlőtlenség.

101. Jelöljük a szóban forgó G gráf egy maximális független ponthalmazát F-fel, az F-be nem tartozó G-beli pontok halmazát pedig L-lel. Ekkor F, ill. L pontjainak száma f, ill. $f+d$. Minthogy $f+d > f$, a G gráf L feszítette részgráfja tartalmaz élt; legyen egy ilyen $\{a_1, a_2\}$. Minthogy F maximális, van a_1-nek is, a_2-nek is egy-egy F-beli szomszédja; legyenek ilyenek b_1, ill. b_2. E két pont különböző, mert G nem tartalmaz háromszöget. Mármost b_1-nek és b_2-nek sem lehet közös szomszédja, mert G nem tartalmaz ötszöget. b_1 és b_2 szomszédjai mind L-beliek. Ennélfogva

$$2\varphi_0 \leqq \varphi(b_1)+\varphi(b_2) \leqq f+d.$$

Ebből pedig adódik, hogy

$$\varphi_0 \leqq \frac{f+d}{2}.$$

A 86. gyakorlat annak igazolását követeli, hogy az ott megadott gráfok e problémához tartozó extrém gráfok.

102. Legyen először a szóban forgó n-pontú G gráfra $fp_{\max} = f < \frac{n}{2}$, és $n = 2f+d$ $(d \geqq 1)$, azaz $f = \frac{n-d}{2}$. A 39. állítás szerint

$$é \leqq \frac{n \cdot f}{2}.$$

Feltehetjük, hogy $f \geqq 2$, mert különben állításunk nyilvánvaló. Ha $d=1$, akkor a 66. állítás szerint

$$é \leqq f^2+1 = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2+1.$$

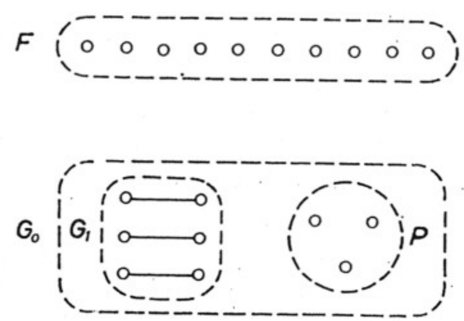
Ha $d>1$, akkor pedig

$$é \leqq \frac{n \cdot f}{2} = \frac{n(n-d)}{4} \leqq \frac{n(n-2)}{4} = \frac{(n-1+1)(n-1-1)}{4} =$$

$$= \frac{(n-1)^2-1}{4} < \frac{(n-1)^2}{4}+1.$$

Most legyen $f \geqq \frac{n}{2}$. Jelöljük G egy maximális független ponthalmazát F-fel és G-nek az F-be nem tartozó pontjai feszítette részgráfját G_0-lal. Legyen G_0-ra $fé_{\max} = k$. Abból, hogy $\frac{n}{2} \leqq f$, és így G_0 pontjainak $n-f$ száma legfeljebb $\frac{n}{2}$, adódik, hogy $k \leqq \frac{n}{4} \leqq \frac{f}{2}$. Minthogy G nem páros gráf, van G_0-ban él, azaz $k \geqq 1$.

Jelöljük ki a G_0 gráfnak egy maximális független élhalmazát, és jelöljük G_0-nak az ebbe tartozó élek végpontjai feszítette részgráfját G_1-gyel. Világos, hogy a P ponthalmaz, amely G_0-nak a G_1-be nem tartozó pontjaiból áll, G_0-nak független ponthalmaza (250. ábra). A P-beli pontok száma $n-f-2k$. G_1 éleinek száma a 40. állítás szerint legfeljebb k^2. Bármely F-beli ponthoz legfeljebb k olyan él illeszkedhet, amelynek egyik végpontja G_1-beli, hiszen G nem tartalmaz háromszöget. Mármost



250. ábra

valamennyi G-beli élt számításba veszünk, ha tekintjük a most említetteket, a P-beli pontokhoz illeszkedőket és a G_1-belieket. De vegyük figyelembe, hogy a 17. állítás szerint bármely G-beli pont foka legfeljebb f. Ennélfogva

$$é \leqq f \cdot k+(n-f-2k)f+k^2 = (n-f)f-k(f-k).$$

Minthogy $2k \leqq f$, a $k(f-k)$ szorzatot csökkenthetjük, ha k-t csökkentjük, ugyanis:

$$(k-1)\big(f-(k-1)\big) = k(f-k)-(f-2k)-1 < k(f-k).$$

E csökkentés tovább folytatható, hiszen $2(k-1) \leqq f$ is fennáll. Ez azt jelenti, hogy $k(f-k)$ akkor a legkisebb, ha $k=1$. Ennélfogva

$$é \leqq (n-f)f-f+1 = f(n-f-1)+1.$$

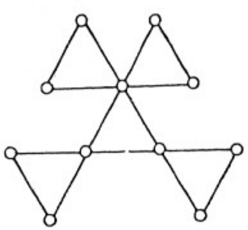
Az $f(n-f-1)$ szorzat felfogható egy $n-1$-pontú $\langle f, n-f-1\rangle$ gráf éleinek számaként. E szám a 33. feladat megoldása kapcsán mondottak szerint legfeljebb $\left[\frac{n-1}{2}\right]^2$. Ennélfogva

$$\acute{e} \leqq \frac{(n-1)^2}{4}+1.$$

A 87. gyakorlat annak igazolását követeli, hogy az ott megadott gráfok e problémához tartozó extrém gráfok.

103. Tegyük fel, hogy a p és q pont szerepel a G gráf T_1 tagjában is, és T_2 tagjában is. Minthogy a tagok összefüggő gráfok, p-ből q elérhető T_1-ben egy L_1, T_2-ben pedig egy L_2 úttal. Minthogy G egyetlen éle sem szerepelhet két tagban, L_1 és L_2 nem tartalmaz közös élt. Járjuk be L_1-et p-ből indulva, majd folytassuk utunkat L_2 mentén. Kell már érintett pontba jutnunk, ha előbb nem, p-ben. Ekkor azonban olyan kört is bejárunk, amelynek van q-hoz illeszkedő T_1-beli éle is, és T_2-beli éle is; ez viszont lehetetlen.

104. Ha egy gráfban van többszörös él, akkor van benne 2 hosszúságú, tehát páros kör is. Ennélfogva szorítkozhatunk arra, hogy a feladat feltételeit kielégítő $2m+1$-pontú és $3m+s$-élű ($s \geqq 1$) G gráf egyszerű. Jelöljük G egy ligetvázát L-lel. A 2.18 szerint L éleinek száma legfeljebb $2m$, G L-re vonatkozó kötőéleinek száma legalább $m+s$, és legalább ennyi kör van G-ben. Van G-ben két olyan K_1 és K_2 kör, amelyeknek van közös élük, mert különben G éleinek száma legalább $3(m+s) = 3m+3s$ volna, holott csak $3m+s$. Jelöljünk e-vel egy K_1-be nem tartozó K_2-beli élt. Létezik a K_2 körnek e-t is tartalmazó olyan íve, amelynek p és q végpontja K_1-beli, más pontja azonban nem. (A p, ill. q pont K_1-nek először érintett pontja, ha e-ről indulva mindkét irányban K_2 mentén haladunk.) Mármost K_1-nek a p és q végpontú két íve és K_2-nek az említett íve páronként egy-egy kört ad. Ha a felsorolt három ív hossza rendre k_1, k_2, ill. k_3, akkor az ívpárok alkotta körök hossza: k_1+k_2, k_1+k_3, ill. k_2+k_3. Ezek összhossza $2(k_1+k_2+k_3)$, vagyis páros, tehát kell lenni a három kör között párosnak.

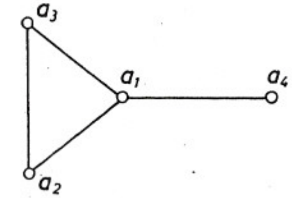


251. ábra

Figyelembe véve, hogy egy gráf bármely köre a gráf egyetlen tagjának részgráfja, adódik, hogy a 67. feladatban megadott G_m gráfok $k=3$ esetén a problémához tartozó extrém gráfok (pl. $m=5$-re a 251. ábra). Egy ilyen gráf minden tagja háromszög, és így nem tartalmaz páros kört, és éleinek száma $3m$, pontjainak száma pedig $3+(m-1)2 = 2m+1$.

105. Tegyük fel, hogy teljesülnek G-re a feladat állításának feltételei. Ekkor az 1.23 szerint G tartalmaz legalább 3 hosszúságú kört. Tehát elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amikor G tartalmaz háromszöget; jelöljük egy ilyennek pontjait így: a_1, a_2, a_3. Minthogy G összefüggő és legalább 4-pontú, feltehetjük, hogy előfordul benne a 252. ábra. Ebben a_1 nem lehet elvágó pont; ez pedig azt

jelenti, hogy ha töröljük G-ből a_1-et a hozzá illeszkedő élekkel együtt, a megmaradt gráf még mindig összefüggő. Ennélfogva van a törlés után nyert gráfban az $\{a_2, a_3\}$ élt nem tartalmazó olyan L út, amelynek egyik végpontja a_4, a másik pedig a_2 vagy a_3; feltehetjük, hogy L két végpontja a_4 és a_2 (a másik esetben hasonlóan okoskodhatunk). Mármost L, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_3, a_1\}$ és $\{a_1, a_4\}$ együtt G-nek egy legalább 4 hosszúságú köre.



252. ábra

106. Ha $k=1$, és n páros, akkor a megoldást a 71. állítás szolgáltatja. Ha n páratlan, akkor a feltételeket kielégítő G gráf minden pontjának foka legfeljebb 1. Ebből következik, hogy csak akkor lehet G-nek maximálisan sok éle, ha G komponensei egyetlen izolált ponttól eltekintve mind teljes 2-gráfok. Tehát $k=1$ mellett minden n-re

$$\acute{e} \leqq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Ha $k=2$ és n osztható 3-mal, akkor a megoldást ismét a 71. állítás szolgáltatja. Tegyük fel most, hogy n nem osztható 3-mal. A 71. állításból következik, hogy ekkor $\acute{e} \leqq n-1$. Legyen G ebben az esetben extrém gráf. Ha G nem tartalmaz kört, akkor a 88. gyakorlat kérdésére adott válasz szerint csillaggráf. Ha G tartalmaz kört, az csak háromszög lehet. De G bármely háromszögébe tartozó pontnak sem lehet e háromszögbe nem tartozó szomszédja. Most már látható, hogy G körei egy-egy komponensét alkotó háromszögek; ezen kívül G-nek a 88. gyakorlat szerint még csak egy csillaggráf alkotta komponense lehet, és — minthogy n nem osztható 3-mal — van is. Tehát ha n nem osztható 3-mal, akkor

$$\acute{e} \leqq n-1;$$

extrém gráfok azok, amelyeknek van egy csillagkomponensük, ezen kívül minden komponensük háromszög; más extrém gráf nincs.

107. Jelöljük G legalább $n-2$-edfokú 4 pontját így: a_1, a_2, a_3, a_4, a többi pontját pedig így: $b_1, b_2, \ldots$. Legfeljebb két b_i pont van, amely nem szomszédos a_1-gyel vagy a_2-vel. Tehát van két b_i pont (sőt négy is), amely szomszédos a_1-gyel is és a_2-vel is; legyen b_1 és b_2 ilyen. Ennélfogva a_1, a_2, b_1 és b_2 egy G-beli négyszög pontjai. A $b_3, b_4, \ldots$ pontok között legfeljebb kettő van, amely nem szomszédos a_3-mal vagy a_4-gyel; tehát van közöttük kettő, amely szomszédos a_3-mal is, és a_4-gyel is. Így ismét nyerünk egy G-beli négyszöget; ez és az előbbi G-ben nyilván pontfüggetlenek.

108. Jelöljük a szóban forgó n-pontú G gráf egy minimális hosszúságú körét K-val, K hosszát m-mel és G-nek a K-ba nem tartozó pontjai feszítette részgráfját G_0-lal. A 76. feladat megoldása kapcsán megállapítottuk, hogy K-nak nem lehet átlója, és hogy G_0 éleinek száma legfeljebb $n-m-1$; továbbá ha $m \geqq 5$, akkor nem lehet K-nak 3-nál kisebb hosszúságú húrja, és így minden G_0-beli pont legfeljebb egy K-beli ponttal szomszédos. Ennélfogva az $m \geqq 5$ esetben

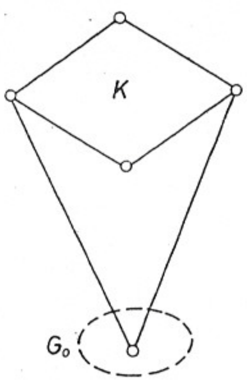
$$é \leqq m+(n-m-1)+n-m = 2n-m-1 \leqq 2n-6,$$

ez pedig kisebb, mint $3n-9$, ha $n>3$; tehát ekkor G nem lehet extrém gráf.

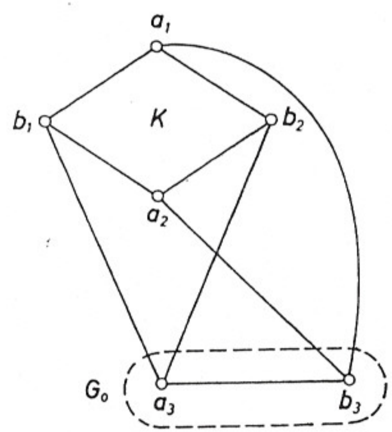
Tehát feltehetjük, hogy $m=4$. Ugyancsak a 76. feladat megoldásából adódik, hogy ekkor

$$é \leqq 4+(n-4-1)+2(n-4) = 3n-9,$$

és itt az $é = 3n-9$ egyenlőség csak akkor állhat, ha G_0 éleinek száma $n-5$, és G_0 minden pontja pontosan két K-beli ponttal szomszédos. Ebből máris adódik, hogy ha $n=5$, akkor G a 253. ábrán látható $\langle 3, 2\rangle$ gráf. Legyen most $n \geqq 6$. A 2.26-ból



253. ábra

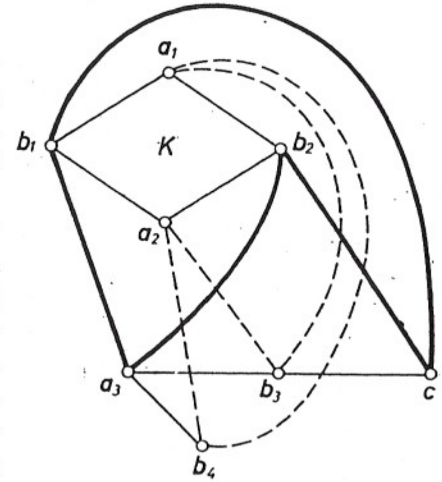


254. ábra

következik, hogy G_0 összefüggő. Jelöljük K pontjait bejárásának sorrendjében így: a_1, b_1, a_2, b_2, és legyen G_0 egy legnagyobb fokú pontja a_3, ennek K-beli két szomszédja b_1 és b_2, G_0-beli szomszédjai pedig $b_3, b_4, \ldots$. Ha $n=6$, akkor G_0-nak az a_3-tól különböző egyetlen b_3 pontja K-nak csak az a_1 és a_2 pontjával lehet szomszédos. Ebből adódik, hogy G egy $\langle 3, 3\rangle$ gráf: a $G = G(A, B)$ jelölésben A pontjai az a_i pontok, B pontjai pedig a b_i pontok lehetnek.

Ha $n>6$, akkor $\varphi(a_3) \geqq 2$. Most is igaz, hogy $i \geqq 3$ mellett bármely b_i pontnak a K-beli két szomszédja csak a_1 és a_2 lehet. De $i \geqq 3$ mellett egyetlen b_i-nek sem lehet a_3-tól különböző G_0-beli szomszédja, mert ha pl. b_3-nak ilyen c szomszédja is volna, akkor egyrészt $\varphi(a_3) \geqq \varphi(b_3)$ miatt a_3-nak is lenne két G_0-beli szomszédja; másrészt c-nek a K-beli két szomszédja csak b_1 és b_2 lehetne. Ámde ekkor létrejönne két G-beli

pontfüggetlen kör: a 255. ábrán vastagon, ill. szaggatottan rajzoltak. Így az adódik, hogy a_3 valamennyi G_0-beli élnek végpontja, vagyis G_0 egy csillaggráf; a_3-nak a K-beli két szomszédja b_1 és b_2, $i \geqq 3$ mellett a b_i pontoknak pedig a_1 és a_2. G tehát egy $\langle 3, n-3\rangle$ gráf: a $G=G(A, B)$ jelölésben A állhat az a_i pontokból B pedig a b_i pontokból. E gráfok nem tartalmaznak háromszöget, és nincs bennük két pontfüggetlen kör; hiszen bármely körüknek tartalmaznia kell kettőt a három A-beli pont közül. A keresett gráfok tehát a $\langle 3, n-3\rangle$ gráfok; más nincs.

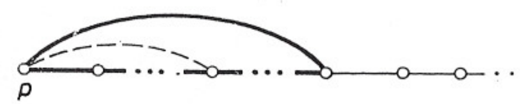


255. ábra

109. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval a következőképpen igazolhatjuk: A 89. gyakorlat végrehajtásával adódik, hogy igaz az állítás, ha $n=4$. Legyen most $n \geqq 4$ rögzített, és tegyük fel, hogy igaz az állítás n-re; bebizonyítjuk, hogy ekkor igaz $n+1$-re is. Jelöljünk egy, a feladat állításának feltételeit kielégítő $n+1$-pontú extrém gráfot G-vel. A 91. gyakorlat szerint G éleinek száma legalább $2(n+1)-4 = 2n-4+2$.

Ha volna G-nek olyan p pontja, amelynek foka legfeljebb 1, akkor p-nek és az esetleges hozzá illeszkedő élnek a törlésével olyan n-pontú G_0 gráfot nyernénk, amelyben nincs átlót tartalmazó kör; ennélfogva indukciós feltevésünk szerint G_0 éleinek száma legfeljebb $2n-4$, és így G éleinek száma legfeljebb $2n-4+1$ volna; ez pedig nem lehet.

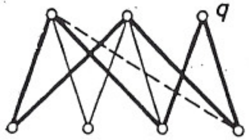
Nem lehet, hogy G minden pontjának foka legalább 3, mert akkor G egy leghosszabb L útját véve, abból, hogy ennek p végpontja csak L-beli pontokkal lehetne szomszédos, adódnék, hogy kell lenni G-ben átlót tartalmazó körnek: a 256. ábrán szaggatott az átló, vastag a kör.



256. ábra

Tehát feltehetjük, hogy van G-nek egy másodfokú q pontja. Jelöljük G_1-gyel azt az n-pontú gráfot, amelyet G-ből q-nak és a hozzá illeszkedő két élnek törlésével nyerünk. Nyilván nincs G_1-ben átlót tartalmazó kör. Minthogy G_1 éleinek száma legalább $2n-4$, indukciós feltevésünk szerint G_1 extrém gráf, és éleinek száma pontosan $2n-4$.

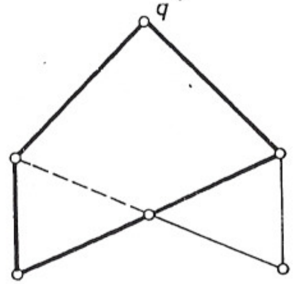
Tegyük fel először, hogy G_1 nem tartalmaz háromszöget. Ekkor G_1 a $\langle 2, n-2\rangle$



257. ábra

gráf. Ha $n=4$, akkor G_1 négyszög, és így a q pont G-ben csak e négyszög két nem szomszédos pontjával lehet szomszédos, tehát ekkor (ahogyan a 253. ábrán is látható volt) G a $\langle 2, 3\rangle$ gráf. Ha $n>4$, akkor a q pont G-ben csak a két legalább 3-adfokú ponttal lehet szomszédos, mert különben vagy háromszög volna G-ben, vagy átlót tartalmazó kör: a 257. ábrán szaggatott az átló, vastag a kör. Tehát G a $\langle 2, n-1\rangle$, azaz a $\langle 2, n+1-2\rangle$ gráf.

Most tegyük fel, hogy G_1 tartalmaz háromszöget. A q pont G-ben bármely G_1-beli háromszögnek csak egyetlen pontjával lehet szomszédos. Tehát ha G_1 izomorf a 191. ábra 4-pontú gráfjával, akkor azt kapjuk, hogy G izomorf az ugyanezen ábra 5-pontú gráfjával. G_1 nem lehet izomorf ez utóbbival, mert akkor kell lenni G-ben átlót tartalmazó körnek: 258. ábra.

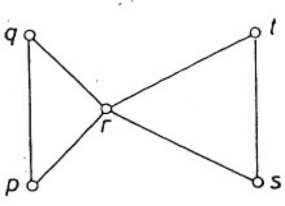


258. ábra

Ezzel megoldottuk a feladatot.

110. Az állítást m-re vonatkozó teljes indukcióval a következőképpen igazolhatjuk: A 89. gyakorlat végrehajtásával adódik, hogy igaz az állítás, ha $m=2$. Legyen most $m \geqq 2$ rögzített, és tegyük fel, hogy igaz az állítás m-re; bebizonyítjuk, hogy ekkor igaz $m+1$-re is. Jelöljünk egy, a feladat állításának feltételeit kielégítő $2(m+1)$-pontú extrém gráfot G-vel. A 90. gyakorlat szerint G éleinek száma legalább $(m+1)^2 = m^2+2m+1$. Ha G nem tartalmaz háromszöget, akkor a 40. állítás szerint G csak egy $\langle m+1, m+1\rangle$ gráf lehet.

Tegyük fel, hogy G minden éle valamely háromszögének éle. Nem lehet G minden pontjának foka legfeljebb 2, mert akkor éleinek száma legfeljebb $2m+2 < m^2+2m+1$ volna. Legyen r 2-nél nagyobb fokú G-beli pont, és jelöljük G r-et tartalmazó egyik háromszögének másik két pontját p-vel, ill. q-val. Jelöljük G_0-lal azt a $2m$-pontú gráfot, amelyet G-ből úgy nyerünk, hogy töröljük a p és a q pontot a hozzájuk illeszkedő élekkel együtt. Minthogy $\varphi(r)>2$, van G_0-ben egy $\{r, s\}$ él. Nem lehet G-ben két olyan háromszög, amelynek közös éle volna, mert akkor volna G-ben átlót tartalmazó négyszög. Ennélfogva az $\{r, s\}$ élt tartalmazó háromszög G_0-beli; jelöljük r-től és s-től különböző pontját t-vel. Mindenesetre s és t egyike sem lehet szomszédos G-ben sem p-vel, sem q-val (259. ábra). A p és q pontnak r-en kívül nem lehet közös G-beli szomszédja. Ennélfogva a G_0-ba nem tartozó G-beli élek száma legfeljebb $2m$. A G_0 gráfban sem lehet átlót tartalmazó négyszög; ennélfogva indukciós feltevésünk szerint G_0 éleinek száma legfeljebb m^2, és így G éleinek száma legfeljebb m^2+2m, ez pedig lehetetlen.

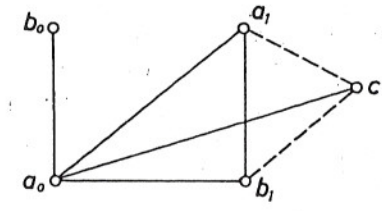


259. ábra

Most tegyük fel, hogy van G-nek olyan $\{a_0, b_0\}$ éle, amely nem éle egyetlen G-be háromszögnek sem. Ekkor a_0-nak és b_0-nak nem lehet közös szomszédja. Jelöljü G_1-gyel azt a $2m$-pontú gráfot, amelyet G-ből az a_0 és b_0 pontok törlésével nyerünk A G_1-be nem tartozó G-beli élek száma legfeljebb $2m+1$, és pontosan $2m+1$ csa akkor lehet, ha G-ben minden G_1-beli pont szomszédos a_0-lal vagy b_0-lal. A G gráfban sem lehet átlót tartalmazó négyszög; ennélfogva indukciós feltevésün szerint G_1 éleinek száma legfeljebb m^2.

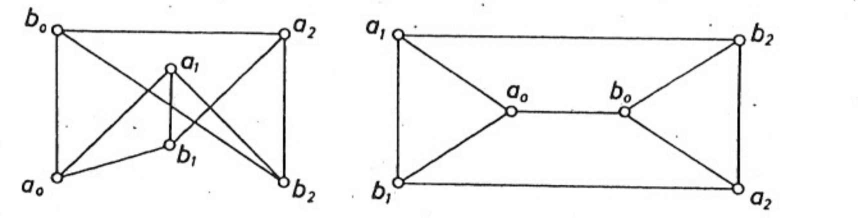
Ha G_1 tartalmaz egy H háromszöget, akkor H pontjai közt kell lenni olyannak amely nem szomszédos sem a_0-lal sem b_0-lal, mert különben volna H-nak olyan él amelynek mindkét végpontja egyikükkel szomszédos, és így volna G-ben átlót tar talmazó négyszög. Ennélfogva a G_1-be nem tartozó G-beli élek száma legfeljeb $2m$, és így G éleinek száma legfeljebb m^2+2m, ez pedig lehetetlen.

Tehát feltehetjük, hogy G_1 nem tartalmaz háromszöget. Ekkor G_1 éleinek száma a 40. állítás szerint csak úgy lehet m^2, ha G_1 az $\langle m, m\rangle$ páros gráf, és így G éleinek száma csak úgy lehet m^2+2m+1, ha az m számú pontból álló A-val és B-vel megadott $G_1 = G_1(A, B)$ minden pontja a_0 és b_0 közül pontosan az egyikkel szomszédos.



260. ábra

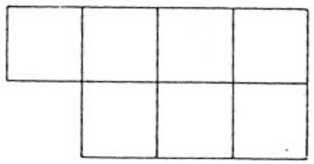
Ha a_0 szomszédos az A-beli a_1 ponttal is és a B-beli b_1 ponttal is, akkor a_0 más G_1-bel c ponttal nem lehet szomszédos, mert különben — minthogy c szomszédos a_1-gye vagy b_1-gyel — kellene lenni G-ben átlót tartalmazó négyszögnek: 260. ábra. Ekko tehát b_0 szomszédos valamennyi a_1-től és b_1-től különböző G_1-beli ponttal, és így — $m \geqq 2$ lévén — szomszédos egy A-beli a_2-vel, és egy B-beli b_2-vel. Ámde ekko



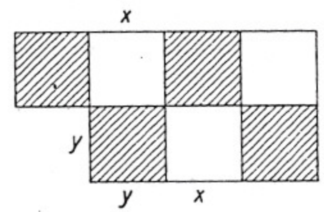
261. ábra

az előbbi okoskodáshoz hasonlóan az adódik, hogy b_0 sem lehet több G_1-beli pontta szomszédos. Tehát G éleinek száma csak úgy lehet m^2+2m+1, ha $m=2$. Ebből kialakul a 190. ábrán látható 6-pontú gráf: 261. ábra. Ha tehát $m>2$, és G éleinek száma m^2+2m+1, akkor a_0-nak nem lehet — mondjuk — A-beli, b_0-nak pedig nem lehet B-beli szomszédja. Ebből adódik, hogy G egy $\langle m+1, m+1\rangle$ gráf.

111. Minthogy csupán két gyufaszálat szabad elmozdítanunk, csak a két „sarokba" illeszthető 2 négyzet szerepelhet még a létrehozandó 4 között, vagyis a 4 négyzetnek a 262. ábrán látható 7 közül kell kikerülnie. Minthogy a gyufaszálak száma 16,

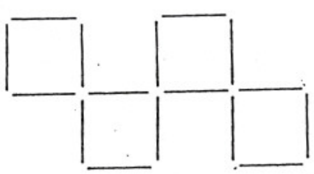


262. ábra



263. ábra

és ezeknek 4 négyzet oldalait kell alkotniuk, a létrehozandó négyzetek között nem szerepelhetnek közös oldalúak. Feleltessünk meg a 262. ábrának egy 7-pontú egyszerű G gráfot a következőképpen: G pontjai a négyzeteknek felelnek meg, és G két pontja pontosan akkor szomszédos, ha e két pontnak megfelelő két négyzetnek van közös oldala: 192. ábra. Ennélfogva kell, hogy a létrehozandó négyzeteknek megfelelő pontok G-nek egy független ponthalmazát alkossák. A 92. gyakorlat kérdésére adott válasz szerint G-re $fp_{\max}=4$, és G-ben csak egyetlen — ott megadott — maximális független ponthalmaz van. Ennek megfelelően csak a 263. ábrán vonalkázott 4 négyzet létrehozásáról lehet szó; és ez csak úgy lehetséges, ha az ábrán az x-szel jelölt gyufaszálakat az y-nal jelölt helyekre tesszük. Tehát a kérdéses áthelyezés lehetséges, és lényegében (az áthelyezett gyufaszálak cseréjétől eltekintve) csak egyetlen megoldás van: a 264. ábrán szemléltetett.



264. ábra

IRODALMI TÁJÉKOZTATÓ

Itt utalunk a könyvben közölt eredmények szerzőire, és idézzük a megfelelő forrásmunkákat, amelyekből az érdeklődő olvasó egyúttal e könyvön túlmenő eredményekről is tájékozódhat. Szerepelnek a könyvben a Kürschák József matematikai versenyek gráfelméleti hátterű feladatai is; ezekre is utalunk.

Az alább megadott irodalomjegyzékbe soroltunk hat olyan könyvet is, amelyekre a tárgyalt anyag kapcsán nem hivatkozunk: Harary [6] könyve a legújabban megjelent tudományos színvonalú mű. Busacker és Saaty [4] könyvére és a matematikai osztályok számára írt tankönyvre [9] az előszóban utaltunk. Bevezetőül ajánlhatjuk Ore [12] és Sedláček [14] könyvét. Végül a TIT József Attila Szabadegyetemén elhangzott előadásokat tartalmazó *Matematikai érdekességek* c. könyvben [10] is szerepelnek gráfelméleti témák.

Még az azonos nyelven írt könyvekben is találhatók más és más elnevezések és jelölések ugyanarra a fogalomra: a gráfelméletben még nem alakult ki egységes terminológia.

1. fejezet

14. és **16.**: [5], 1947/2. feladat.
15.: [5], 1960/1. feladat.

2. fejezet

Fagráf és faváz: [7], IV. fejezet és [2].
Körmenetes hálózat gazdaságos építése: Kruskal, [34] és [11], 61. old.
Elektromos hálózatok számítása: [15] és [2].

3. fejezet

5.: Veblen, [7], II. fejezet, 6. tétel.
4., **6.**, **7.**, **19.** és **20.**: Euler, [7], II. fejezet.
16. és **37.**: [5], 1954/3. feladat.
18.: Robbins, [41].
Labirintusra vonatkozó 73. és 74. ábra: [11], 48. old.