KONVEX GEOMETRIA előadás és gyakorlat 2008/2009 II félév, Levelezős képzés

A számonkérés formája: írásbeli vizsga

A vizsga anyagát az előadáson elhangzott definíciók és tételek és feladatok alkotják. Az elméleti részt a következő témakörökből válogatva állítom össze:

1. Affin és konvex halmazok, az affin halmazok struktúratétele, az affin és a konvex burok
2. Caratheodory tétel
3. A Radon lemma és Helly tétele, alkalmazások
4. Szeparálási tételek
5. A Krein-Milman tétel
6. Euler- és Descartes tétele
7. Szabályos testek

Valamennyi tétel esetében ismerni kell a szereplő fogalmakat és a bizonyítás menetét. A gyakorlati jegy megszerzéséhez szükséges feladatsort az előadáson elhangzott példákból állítom össze

Vincze Csaba

Vincze Csaba
11. 20.

Konvex geometria

írásbeli vizsga (GY+E)

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots n\}$

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots x_n+y_n)$ összeadás

$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ skalárral való szorzás

Belső v. skaláris szorzat:

$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

$(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$: euklideszi vektortér

Skaláris szorzat: $\Rightarrow$ norma $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$

minden elemhez hozzárendeli az önmagával vett skaláris szorzat négyzetgyökét.

x hossza

$\Downarrow$

távolság definiálása: $d(x,y) := |x-y|$

$\sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots (x_n-y_n)^2}$ **

norma $\Longrightarrow$ Cauchy - Schwarz - Bunyakovszkij egyenlőtlenség:

$$\langle x, y\rangle^2 \leq |x|^2 |y|^2 \quad *$$

~~Biz.:~~

! $v = x + \lambda y \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$

$0 \leq \langle v, v \rangle = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle =$ disztributivitás

skaláris szorzat szimmetriája; homogenitás

$= \langle x, x \rangle + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y + x \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle = |x|^2 + 2\langle x, \lambda y \rangle + |\lambda y|^2 =$

$= \overset{c}{|x|^2} + \overset{b}{2\lambda \langle x, y\rangle} + \overset{a}{\lambda^2 |y|^2} = p(\lambda)$

$|\lambda y|^2 = (\lambda y_1)^2 + \dots + (\lambda y_n)^2 = \lambda^2 (y_1^2 + \dots + y_n^2) = \lambda^2 |y|^2$

Σ: $0 \leq p(\lambda) \Rightarrow$ diszkrimináns ≤ 0

$$(2\langle x, y \rangle)^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$$

* → szög: $\cos\alpha := \dfrac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}$ ← vektorok szöge

$\underline{0} \neq x, y \neq \underline{0}$

$\underline{0} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n\text{-szer}})$

$\langle x, y\rangle = |x||y|\cos\alpha$ → középiskolában is ezt tanítjuk

** topológia (nyílt halmazok kijelölése)

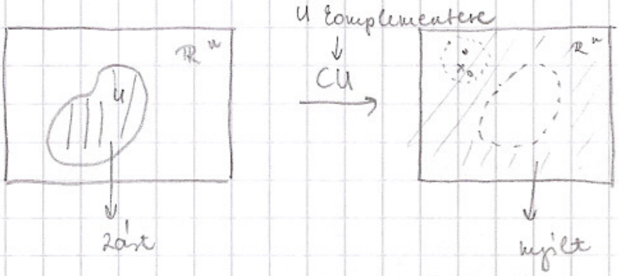
1. lépés: nyílt gömb környezete

$B(x_0, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x_0, y) < r\}$ ahol $r > 0$ rögzített szám

Definíció: $U \subset \mathbb{R}^n$ halmazt nyíltnak nevezzük, ha $\forall$ pontját egy nyílt gömbkörnyezetével együtt tartalmazza.

belső pont, ha egy nyílt gömbkörny.-vel együtt tart.

Egy halmaz zárt, ha a komplementere nyílt.



Korlátos: • $V \subset \mathbb{R}^n$ halmaz korlátos, ha $\exists$ olyan origó ($\underline{0}$) középpontú gömb, mely tartalmazza.

•• $\operatorname{diam} V := \sup \underbrace{\{d(x, y) \mid x, y \in V\}}_{\subseteq \mathbb{R}}$ $\operatorname{diam} V < \infty \subseteq \mathbb{R}$

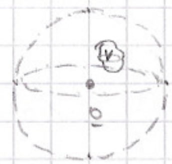
V halmaz átmérője

supremum: pontos felső korlát

kérdés:

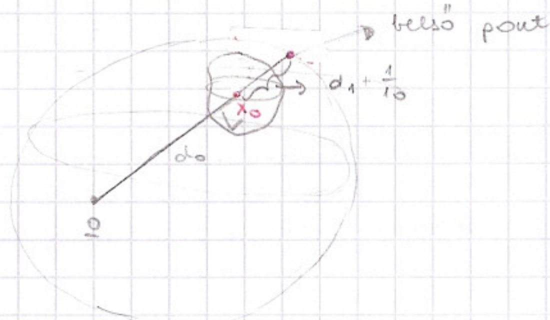
korlátos: • $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ ••

„$\Rightarrow$"



$\Rightarrow$ diam $\sigma < 2r \Rightarrow \sigma$ korlátos (•• értelemben)

„$\Leftarrow$'

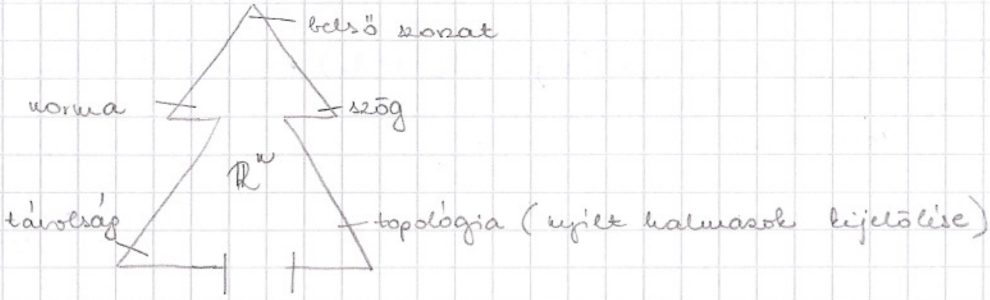


diam $\sigma = d_1$

A keresett $\underline{0}$ középpontú gömb sugara pl: $\underbrace{d_0 + d_1 + \frac{1}{10}}_{r} \Rightarrow$ korlátos (•)

Kompakt halmaz: Korlátos és zárt halmaz.

Séma:



Terminológiai megállapodás: $\mathbb{R}^n$ elemeire a vektor ill. pont kifejezést szinonimaként használjuk.

Def.: $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ vektor lineárisan függő, ha a $\underline{0}$-vektor előállítható lineáris kombinációjukként nem csupa nulla együtthatóval.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = \underline{0}$ $\wedge$ van nem nulla λ_i

$(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_m^2 > 0)$

Lineárisan független, ha nem lineárisan függő.

kvantoros állítás

$\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} : \left((\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \underline{0}) \wedge (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_m^2) > 0 \right)$

egzisztenciális kv.

Tagadása: $\forall\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} : \left((\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \neq \underline{0}) \vee (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_m^2) = 0 \right)$

univerzális kv.

(De Morgan)

Lineárisan függő: a zérusvektor csak triviálisan, azaz csupa nulla együtthatóval állítható elő a vektorok lineáris kombinációjaként.

Lineáris kombináció: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$

Def: Egy lineáris kombinációt affin kombinációnak nevezünk, ha $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$.

Egy lin. kombinációt konvex komb-nak nev., ha $\lambda_1 + \dots \lambda_m = 1$ $\wedge$ $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$.

! $x, y \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ affin komb: $\lambda_1 x + \lambda_2 y$ $\quad (\lambda_2 = 1 - \lambda_1) \rightsquigarrow \lambda x + (1-\lambda) y$

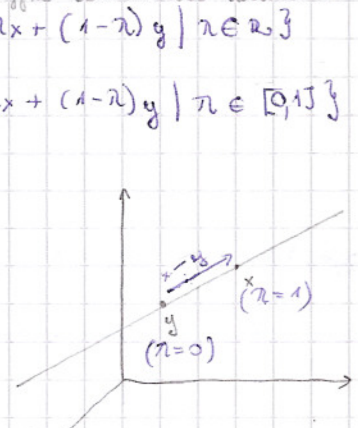
$\searrow$ konvex komb: — " — $\quad \lambda x + (1-\lambda) y \wedge \lambda \geq 0,$

$1 - \lambda \geq 0$ $\quad 0 \leq \lambda \leq 1$

$x \neq y$ $\quad$ összes affin kombináció halmaza

$e(x,y) := \{ \lambda x + (1-\lambda) y \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ $\quad x, y$ által meghatározott egyenes.

$s(x,y) := \{ \lambda x + (1-\lambda) y \mid \lambda \in [0,1] \}$ $\quad x, y$ — " — szakasz

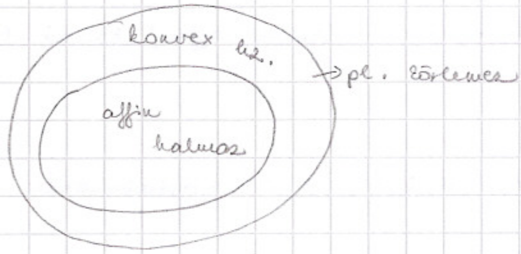


$\lambda x + (1-\lambda) y = y + \lambda(x - y)$

$\hookrightarrow$ egyenes irányvektoros megadása

Def: Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz affin halmaz, ha $\forall$ két pontjával együtt a rájuk illeszkedő egyenest is tartalmazza.

$K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz konvex halmaz, ha $\forall$ két pontjával együtt az általuk meghatározott szakaszt is tartalmazza.



Tétel: Egy A|K hz. affin/konvex $\Leftrightarrow$, ha zárt az affin/konvex kombináció képzésére nézve.

~~Biz.~~:

$\Rightarrow$ Tfh. A affin hz. és tekintsük az elemeiből képzett $\underbrace{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m}_{?\ \in A}$ affin kombinációját: $x_i \in A \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$

Ezt akarjuk bizonyítani.

$\lambda_1 x_1$ kombináció esetén: $\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow x_1 \in A$

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \ell(x_1, x_2) \overset{\text{def.}}{\subset} A$

Teljes indukció

Tfh $\left(\overset{m\text{-ig tudjuk}}{\cancel{v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in A \text{ tudjuk}}}\right)$

! $w := \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda_{m+1} v_{m+1}$ affin komb. $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m + \lambda_{m+1} = 1$.

Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = \lambda_{m+1} = 1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow w = \lambda_1 v_1$ (már láttuk)

Feltehető, hogy pl.: $\lambda_{m+1} \neq 1$.

$$w = (1 - {}_{m+1}) \Big(\underbrace{\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}} v_1 + \ldots + \frac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}} v_m}_{m \text{ tagú affin kombináció}} \Big) + \lambda_{m+1} v_{m+1}$$

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}} + \ldots + \frac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}} = \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m}{1-\lambda_{m+1}} = \frac{1-\lambda_{m+1}}{1-\lambda_{m+1}} = 1.$$

$$w = (1-\lambda_{m+1}) \cdot \underbrace{\underset{\in A}{z} + \lambda_{m+1} \underset{\in A}{v_{m+1}}}_{\text{affin komb.}} \in A$$

<u>Def.</u>: ! $S \subset \mathbb{R}^n$; S affin/konvex burka az S-et tartalmazó legkisebb affin/konvex hz.

LEMMA: Affin / konvex halmazok metszete affin / konvex hz.

312. feladat.

<u>Következmény</u>: S affin/konvex burka = S-et tartalmazó affin/konvex hzok metszete.

jele: $\text{aff}\, S$
$\text{conv}\, S$

Tétel: $\text{aff}\, S$ / $\text{conv}\, S$ = S-beli elemek összes affin/konvex kombinációinak halmaza.

Biz.: affin eset.

! $V := S$-beli elemek affin komb-nak halmaza.

$V \subset \text{aff}\, S$ triviális ($A := \text{aff}\, S$ zárt az affin komb. képz. nézve)

+ V maga is affin hz.

Igazoljuk!

! $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ $\quad \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ $\quad v_1, \dots, v_m \in V$

$y = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_k w_k$ $\quad \mu_1 + \dots + \mu_k = 1$ $\quad w_1, \dots, w_k \in V$

Mi van a $\lambda x + (1-\lambda) y$ elemmel?

$$\lambda x + (1-\lambda) y = (\lambda\lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda\lambda_m) v_m + ((1-\lambda)\mu_1) w_1 + \dots + ((1-\lambda)\mu_k) w_k \in V$$

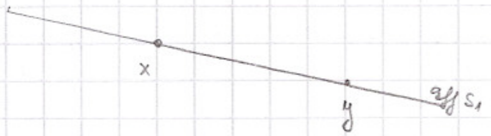
Itt az együtthatók összege: $\lambda(\underbrace{\lambda_1 + \dots + \lambda_m}_{1}) + (1-\lambda)(\underbrace{\mu_1 + \dots + \mu_k}_{1}) = 1.$

affin komb.

Σ: V def. szerint affin hz. $\Rightarrow V = \text{aff}\, S$

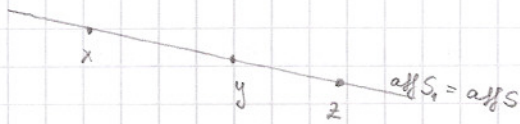
egybe kell esnie vele.

Megj.: $S = \{x, y\}$



x, y affin burka a rá illeszkedő egyenes

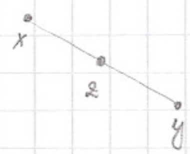
$S_1 = \{x, y, z\}$



conv $S = s(x, y)$

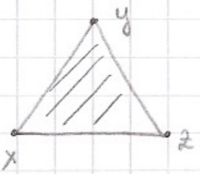
$S_2 = \{x, y, z\}$

conv S_2 = conv S

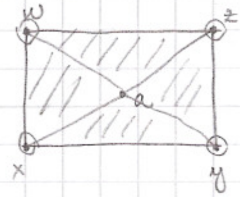


Σ: kell-e vajon minden pont a halmazból az aff S. ill. conv S előállításához?

További példák:



$S = \{x, y, z\}$

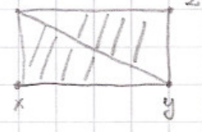


$S_1 = \{x, y, z, w, a\}$

conv S_1 = téglalap

conv S_2

$S_2 = \{x, y, z, w\}$



A válasz: Carathéodory-tétel

Def: A $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ affin függő, ha $\exists$ $\overline{\lambda_1, \dots, \lambda_m}^{\text{nem csupa nulla}} \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \underline{0}$ $\wedge$ $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$. Affin fgtlen, ha nem affin függő.

Carathéodory-tétel:

conv S = S-beli affin független elemek konvex kombinációinak halmazával.

Biz: ! $v \in \operatorname{conv} S \Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ konvex kombináció, azaz

$v_1, \dots, v_m \in S$ és $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ és $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, m)$

Tfh: $v_1, \dots, v_m$ rendszer affin függő. Megmutatjuk, hogy m csökkenthető.

$\hookrightarrow \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m = \underline{0}$ nem triviálisan $\wedge$ $\mu_1 + \dots + \mu_m = 0$.

Szemléletesség miatt:

$m = 3$. esetén:

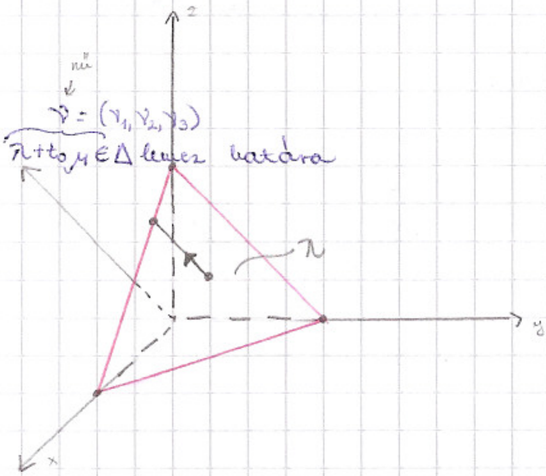
! $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$
$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$

$\Delta := \{(x,y,z) \mid x+y+z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$

$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$

$x + y + z = 0$

$\mu \parallel \Delta$



Ekkor $\underbrace{\nu_1 v_1 + \nu_2 v_2 + \nu_3 v_3}_{\text{konvex komb } (\nu \in \Delta)} = (\lambda_1 + t_0 \mu_1) v_1 + (\lambda_2 + t_0 \mu_2) v_2 + (\lambda_3 + t_0 \mu_3) v_3 = v + t \underbrace{(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3)}_{0} = v$

$\nu_2 = 0$ (mert a határon van)

Σ: $v = \nu_1 v_1 + \nu_3 v_3$

Ism.: $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, ahol v_1, v_2, v_3 affin függő

Ha most v_1, v_3 affin független $\Rightarrow$ ✓

Ha nem: analóg módon:

$v = \gamma_1 v_1 + \gamma_3 v_3$

tfh. affin függő.

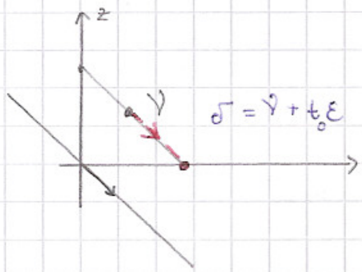
$\Updownarrow$

$\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_3 = \underline{0}$ nem triviálisan $\wedge$ $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$.

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_3)$

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_3)$

$\Delta := \{(x, z) \mid x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$



$\sigma = \gamma + t_0 \varepsilon = (\sigma_1, \sigma_3)$

$\sigma_1 \cdot v_1 + \sigma_3 v_3 = (\gamma_1 + t_0 \varepsilon_1) v_1 + (\gamma_3 + t_0 \varepsilon_3) v_3$

$\Sigma: v = \sigma_1 v_1 = v_1$,

Tétel: $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ affin függő $\Leftrightarrow$, ha $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ esetén

$v_1 - v_i, v_2 - v_i, \dots v_{i-1} - v_i, v_{i+1} - v_i, \dots v_m - v_i$ lineárisan függő.

Biz.: pl.: $i = m$ mellett

Tfh. $v_1, \dots v_m$ affin függő : $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m = 0$ nem triviális $\wedge$ $\mu_1 + \dots + \mu_m = 0$

$\Updownarrow$

$\mu_m = -(\mu_1 + \dots + \mu_{m-1})$

$\mu_1 (v_1 - v_m) + \mu_2 (v_2 - v_m) + \dots + \mu_{m-1} (v_{m-1} - v_m) = 0$ és ez nem

triviális lineáris kombináció.

ugyanis: $\mu_1 = \dots = \mu_{m-1} = 0 \Rightarrow \mu_m = 0$ $\lightning$ mert az elején feltettük, h a kombináció nem triviális

Megf. Feladat.

Megj.: $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ affin függő $\Leftrightarrow$ $V_1 = (v_1, 1), \dots, V_m = (v_m, 1)$ lin. függő $\mathbb{R}^{n+1}$-ben.

indoklás: affin függőség def.

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m = \underline{0} \\ \mu_1 + \dots + \mu_m = \underline{0} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \mu_1 V_1 + \dots + \mu_m V_m = \underline{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$(\mu_1 v_1, \mu_1) + \dots + (\mu_m v_m, \mu_m) = \underline{0}$$

$$(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m, \mu_1 + \dots + \mu_m) = \underline{0}$$

Következmény: $v_1, \dots, v_m$ affin független $\overset{\mathbb{R}^n\text{-ben}}{\Leftrightarrow}$ ha $V_1, \dots, V_m$ lineárisan függetlenek $\mathbb{R}^{n+1}$

$\Downarrow$

Bármely $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}$ rendszer affin függő.

$V_1, \dots, V_n, V_{n+1}, V_{n+2} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

↳ ennyi még lehet független, azaz bázis

Pl.: $\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^2\text{-ben } 4 \text{ db vektor} \\ \mathbb{R}^3\text{-ban } 5 \text{ db vektor} \end{array}\right\}$ biztos, h. affin függő.

Tétel: kompakt halmaz konvex burka kompakt.

Biz.: ! $K \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \operatorname{conv} K \overset{\text{Car.-t.}}{=} \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n+1} v_{n+1} \mid v_1, \dots, v_{n+1} \in K, \text{ konvex komb.}\}$

Def.:

$$\phi: \mathbb{R}^{n+1} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n+1 \text{ db}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, v_1, \dots, v_n) \to \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n+1} v_{n+1}$ lin. leképezés = (additív és homogén)

$$= \mathbb{R}^{n+1+(n+1)n} = \mathbb{R}^{(n+1)^2} \to \mathbb{R}^n$$

$$! \; \Delta = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0\}$$

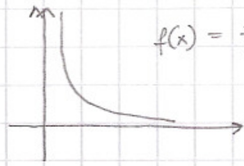
$$\Sigma: \; \phi(\underbrace{\Delta \times \underbrace{K \times \dots \times K}_{(n+1)\text{-szer}}}) = \operatorname{conv} K$$

kompakt halmaz folytonos képe kompakt

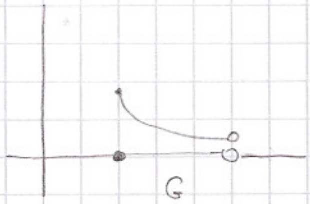
↑

linearitásból jön

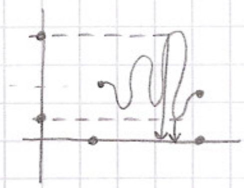
$f: G \to \mathbb{R}$



$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

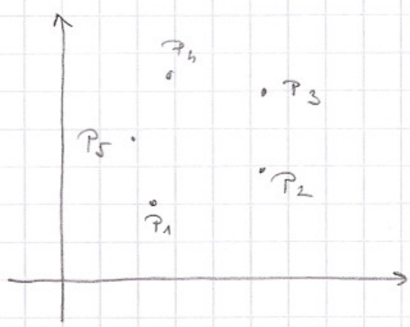


Ha G korlátos és zárt (kompakt) $\Rightarrow$ a G-n folytonos fgv felveszi a szélsőértékeit.



Alkalmazás: optimalizálási feladat (min. keresés)

! $P_1, \dots P_m \in \mathbb{R}$



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$p \mapsto f(p) = \sum_{i=1}^{m} d(p, p_i)$

konkrétan:

$f(p) = d(p,p_1) + \dots + d(p,p_5)$

Hol van ennek a fgv-nek a zérusa?

Keresendő f minimuma!

egzisztenciális megközelítés $\dashrightarrow$ konkrét megadása a megoldásnak

1. észrevétel: Ha f egyáltalán minimumhely (p_0) $\Rightarrow$ $p_0 \in \text{conv}\{p_1, \dots, p_m\}$

Biz: ! $p \notin \text{conv}\{p_1, \dots, p_m\}$

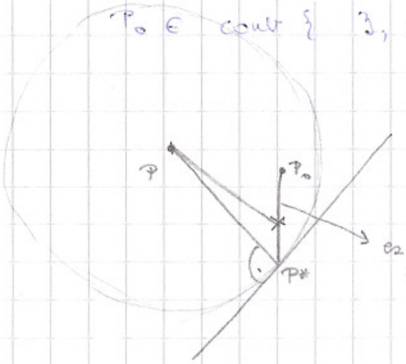
Keressük meg conv$(p_1, \dots, p_m)$-nek P-hez legközelebbi pontját! • ($g: \text{conv}\{p_1, \dots, p_m\} \to \mathbb{R}$; $g(x) := d(x,p)$ folytonos + kompakt halmaz $\Rightarrow$ van maximum, minimum.)

• P^* és állítsunk $\perp$-t $s(P,P^*)$-ra P^*-ban.

Állítás: A konv. burok a merőleges egyenes P-t nem tartalmazó oldalán.

Indirekt BIZ:

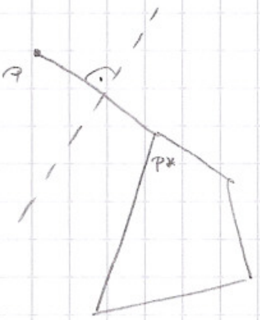
$P_0 \in \text{conv}\{\ \}$, de P-vel egyező oldalon $\Rightarrow$



$S(P^*, P_0) \subset \text{conv}\{\ \}$

$\Rightarrow$ lenne P-hez P^*-nál közelebbi pontja $\text{conv}\{\ \}$-nak ↯

Σ: $s(P, P^*)$ szakaszfelező merőlegese is szeparál.



A $P_1, \dots P_m$ pontok pedig közelebb vannak P^*-hoz, mint P-hez.

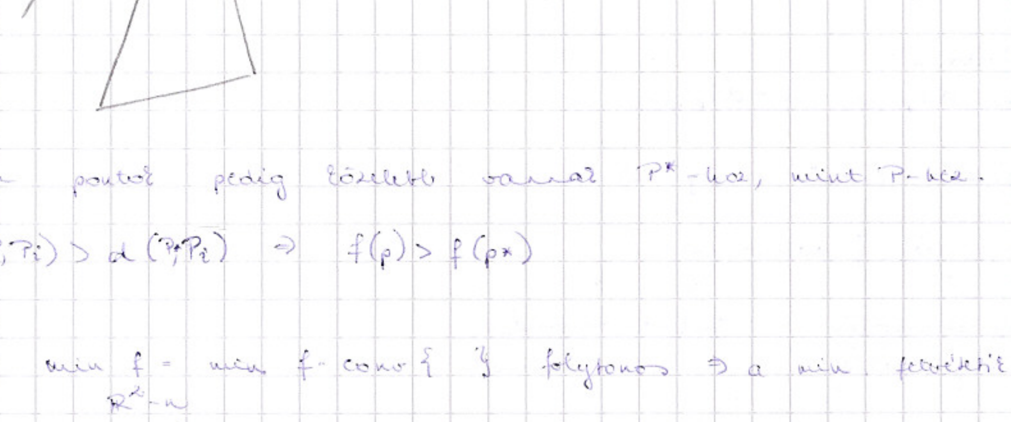
$$d(P, P_i) > d(P^*, P_i) \Rightarrow f(p) > f(p^*)$$

2. észrevétel: $\min\limits_{\mathbb{R}^2\text{-n}} f = \min f|_{\text{conv}\{\ \}}$ folytonos $\Rightarrow$ a min felvétetik a konvex burkon belül.

Konkrét megoldás:

$m = 2$:

$m = 3$: (Fermat-feladat)

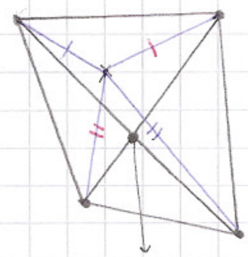


$P_1 P P' P_3'$

Másik irányba (P_1 körül 60°-kal) is forgatunk.

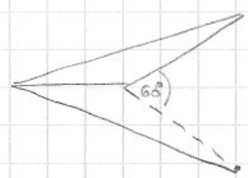
A konstrukció hegyesszögű Δ-re jó. Addig, amíg nincs 120°-os szög, vagy annál nagyobb. *

$n=4$: P_1, P_2, P_3, P_4 egy konvex négyszög csúcsai



A Δ-egyenlőtlenség alapján ez a min. pont.

*

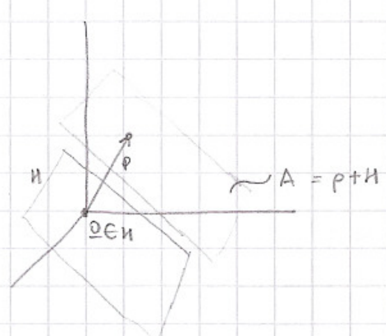


Ebben az esetben a kritikus csúcs a min. hely.

Tétel: (affin hz-ok struktúratétele)

Minden $A \subset \mathbb{R}^n$ affin halmaz $A = p+H$ alakú, ahol $p \in A$ tetszőleges pont, $H \subset \mathbb{R}^n$ pedig egy egyént meghatározó lin. altér

($p+H := \{p+h \mid h \in H\}$ - H eltolja p-vel.)



Megj.: $H \subset \mathbb{R}^n$ lin. altér, ha zárt a lin. kombináció képzésére nézve.

Biz.: ! $p \in A$ tetszőleges. $H := -p+A$

H zárt a lin. komb. képzésére nézve.

$v_1, \dots, v_m \in H$

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \alpha_1(-p+a_1) + \dots + \alpha_m(p+a_m) =$, ahol $a_i \in A$

$= -p + \alpha_1(-p+a_1) + \dots + \alpha_m(-p+a_m) + p =$

$$\underbrace{(-\alpha_1 - \alpha_2 \dots - \alpha_m + 1)}_{\lambda} p + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m$$

Itt a $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$, tehát ez affin kombináció

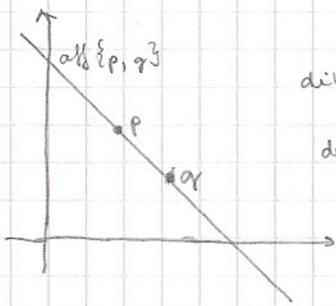
$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \underbrace{-p+a}_{\in H}$, valamely $a \in A$-ra

Megj.: H egyértelműségének igazolását mellőzzük.

Def.: H - az A affin altér iránytere.

$\dim A := \dim H$

$S \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges $\rightsquigarrow$ aff S $\rightsquigarrow$ $\dim S : \dim(\text{aff } S)$



$\dim \{p, q\} = 1$

$\dim s(p,q) = 1$ ✓ → szakasz

$\boxed{\text{Hf.:}}$ ① Lin. fgetlenek-e az $(1,2,3)$ $(4,5,6)$, $(7,8,9)$ vektorok? $\mathbb{R}^3$-ban

② $(1;2;3)$ $(-1;0;2)$ $(2;1;1)$

$\boxed{\text{Hf.:}}$ $x = (2,3)$
$y = \frac{1}{2}(-1,5)$ $\langle x, y\rangle = ?$ $|x| = ?$ $|y| = ?$ $\cos\alpha = ?$ $\frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}$

$x = (4,5)$
$y = \frac{6}{7}(5;-4)$

Geometria házi

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ van triviálistól különböző megoldása

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \underline{0}$

a)

$$\begin{array}{c} \\ D = \end{array} \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

b.)

$$1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

függő

2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 8 - 2 + 2 = 5$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix}$$

független

3.)

$x \; (2;3)$

$y \; \frac{1}{2}(-1;5) = (-0{,}5; 2{,}5)$

$\cos\alpha = \dfrac{\langle x, y \rangle}{|x|\,|y|}$

$|\underline{x}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = 3{,}605$

$|\underline{y}| = \sqrt{0{,}25 + 6{,}25} = \sqrt{6{,}5} = 2{,}549$

$\underline{x} \cdot \underline{y} = 2 \cdot (-0{,}5) + 3 \cdot 2{,}5 = -1 + 7{,}5 = 6{,}5$

$\cos\alpha = \dfrac{6{,}5}{9{,}19} = 0{,}707$

$\underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}$

4.)

$x = (4;5)$

$y = \frac{6}{7}(5;-4)$

$y\left(\frac{30}{7};\frac{-24}{7}\right)$

$\cos\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{|\underline{x}||\underline{y}|}$

$|\underline{x}| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} = 6,403$

$|\underline{y}| = \sqrt{\frac{900}{49}+\frac{576}{49}} = \frac{38,418}{7} = 5,4883$

$\underline{x} \cdot \underline{y} = \frac{120}{7} - \frac{120}{7} = 0$

$\cos\alpha = \frac{0}{35,14} = 0$

$\underline{\underline{\alpha = 90^\circ}}$

Konvex geo.
III. 6.

Fgy.:

1) $(1;2;3)$, $(4;5;6)$, $(7;8;9)$

2) $(1;2;3)$, $(-1;0;2)$, $(2;1;1)$

lin függő v. független

1)

$$\lambda(1;2;3)+\mu(4;5;6)+\nu(7;8;9)=\underline{0} \qquad (\underline{0}=(0;0;0))$$

$$(\lambda+4\mu+7\nu,\ 2\lambda+5\mu+8\nu,\ 3\lambda+6\mu+9\nu)=\underline{0}$$

$$\lambda+4\mu+7\nu=0$$

$$2\lambda+5\mu+8\nu=0$$

$$3\lambda+6\mu+9\nu=0$$

A $\lambda=0$, $\mu=0$ és $\nu=0$ mindig megoldás. Van-e ettől különböző?

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\2&5&8&0\\3&6&9&0\end{array}\right) \to$$

Gauss elimináció

Egyenlő együtthatók módszere

$$\lambda+4\mu+7\nu=0$$
$$-3\mu-6\nu=0$$
$$-6\mu-12\nu=0$$

A $2\lambda+5\mu+8\nu=0$-ból kivonjuk az első sor $2x$-esét

A 3. sorból az első $3x$-osát.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&-3&-6&0\\0&-6&-12&0\end{array}\right)$$

$$\lambda+4\mu+7\nu=0$$
$$\mu+2\nu=0 \quad \to \text{osztottuk } (-3)\text{-mal}$$
$$\mu+2\nu=0 \quad \to \text{ -"- } (-6)\text{-tal}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&1&2&0\\0&1&2&0\end{array}\right)$$

$$\lambda+4\mu+7\nu=0$$
$$\mu+2\nu=0$$

A 3.-ból kivonjuk a 2.-at.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$ → végtelen sok megoldása van.

Legyen $\nu=t$ tetszőleges valós szám

⇓

$$\mu=-2t$$

$$\lambda=t$$

Megoldások: $t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

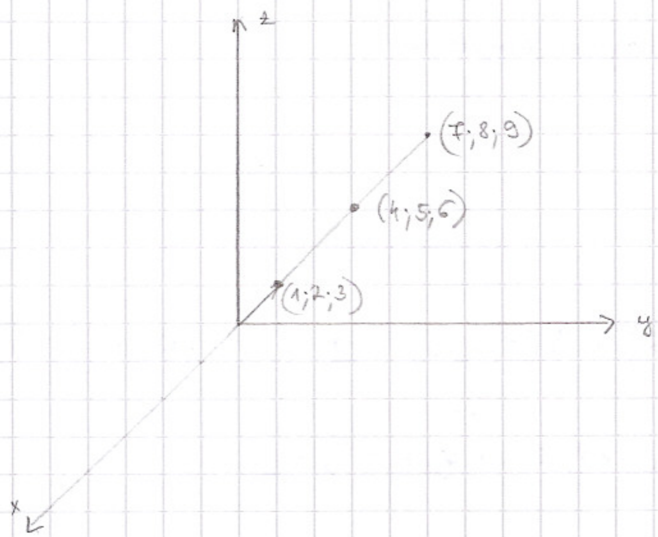
Van nem triviális megoldás.

Pl.: $\lambda=1$, $\mu=-2$, $\nu=1$.

⇓

A RENDSZER FÜGGŐ!

$(1;2;3) - 2(4;5;6) + (7;8;9) = (0;0;0) \rightsquigarrow (4;5;6) = \frac{1}{2}\big((1;2;3) + (7;8;9)\big)$



2)

$\mathbb{R}^3$ $(1;2;3)$ $(-1;0;2)$ $(2;1;1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

$20\nu = 0$

Itt csak a $(0;0;0)$ megoldás jöhet szóba! $\lambda = \mu = \nu = 0$.

A RENDSZER FÜGGETLEN!

1) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\det A \neq 0}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\det A = 0 \Leftrightarrow$, ha lin függők

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ lin független

$$\det\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{matrix}1&4\\2&5\\3&6\end{matrix} = 45+96+84-105-48-72 = 0 \in \mathbb{R}$$

Most lépjünk $\mathbb{R}^4$-re:

$(1; 2; 3; 4)$

$(5; 6; 7; 8)$

$(9; 10; 11; 12)$

A det-os módszer nem, de az egyenletrendszeres módszer működik.

$$\lambda(1,2,3,4) + \mu(5,6,7,8) + \nu(9,10,11,12) = \underline{0} \qquad (\underline{0} = (0,0,0,0))$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&9&0\\2&6&10&0\\3&7&11&0\\4&8&12&0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&9&0\\0&-4&-8&0\\0&-8&-16&0\\0&12&-24&0\end{array}\right) \quad \begin{matrix}2-2\cdot 1\\3-3\cdot 1\\4-4\cdot 1\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&9&0\\0&1&2&0\\0&1&2&0\\0&1&2&0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&9&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \qquad \begin{aligned}\lambda+5\mu+9\nu&=0\\ \mu+2\nu&=0\end{aligned}$$

Ez a vektorrendszer függő.

$$\begin{aligned}\nu&=t\\ \mu&=-2t\\ \lambda&=t\end{aligned} \qquad \begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$(n; n+1; n+2; n+3)$; $(n+4; n+5; n+6; n+7)$ $(n+8 \dots n+11)$

$\frac{n+n+8}{2} = n+4 \Rightarrow$ minden párra igaz.

Mi van az affin függő és függetlenséggel?

lin fglen $\Rightarrow$ affin fglen ✓ ② és az affin függő $\Rightarrow$ lin fg-ből következik

lin fg $\Rightarrow$ affin fg. ③ HAMIS

affin fglen $\Rightarrow$ lin fglen ④ kontrapozíció elve miatt (3) HAMIS

affin fg $\Rightarrow$ lin függő ✓ EZ IGAZ! ① def alapján

affin függő: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \underline{0}$ nemtriviális $\wedge$ $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$.

kontrapozíció elve: (indirekt biz-nál használjuk, pl.: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^*$)

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$$

1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0

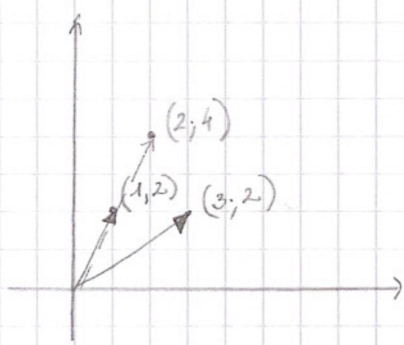
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

Külön nézzük meg a lin függő $\Rightarrow$ affin függő?

Nem igaz!

Ellenpélda:

$\mathbb{R}^2$



$v_1\ (1;2)$

$v_2\ (3;2)$ Ezek lin függők: $\mathbb{R}^2$-ben 3 db vektor.

$v_3\ (2;4)$

$$\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = \underline{0} \wedge \lambda + \mu + \nu = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda + 3\mu + 2\nu = 0 \\ 2\lambda + 2\mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + \mu + \nu = 0 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad /:2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \; ③ - ②$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \nu = \mu = \lambda = 0$$

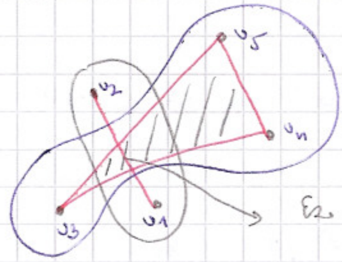
affin független

Hamis a 2. feltevés $\Rightarrow$ a kontrapozíció elve miatt a 3. feltevés is.

Helly-tétele

Lemma (Radon): ! $S = \{v_1, v_2 \dots v_m\} \in \mathbb{R}^n$, $m \geq n+2 \Rightarrow$ van olyan $S = S_1 \cup S_2$ felbontás, hogy $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, de $\operatorname{conv} S_1 \cap \operatorname{conv} S_2 \neq \emptyset$.

$\mathbb{R}^2$ 5 elem



Ez a szakasz „belemászik" a Δ lemezbe.

$S_1 = \{v_1, v_2\}$

$S_2 = \{v_3; v_4; v_5\}$

Biz: Mivel $m \geq n+2 \Rightarrow v_1, \dots v_m$ affin függő

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \underline{0}$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0. \Rightarrow \text{pl.: } \underbrace{\lambda_1 \geq 0; \dots \lambda_\ell \geq 0 \text{ és } \lambda_{\ell+1} < 0, \dots \lambda_m < 0}$$

ez átindexeléssel mindig elérhető.

$$\underbrace{\lambda_1 + \dots + \lambda_\ell} = \underbrace{-\lambda_{\ell+1} - \dots - \lambda_m} = \lambda$$

$$! \; v := \frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 + \dots + \frac{\lambda_\ell}{\lambda} v_\ell$$

Igazolandó, hogy $v \in \operatorname{conv} S_1 \cap \operatorname{conv} S_2$, ahol

$$S_1 = \{ v_1, \dots, v_l \}$$

$$S_2 = \{ v_{l+1}, \dots, v_m \}$$

$v \overset{\text{conv}}{\in} S_1$ mi: v konvex kombinációja $v_1 \dots, v_l$-nek

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} + \dots + \frac{\lambda_l}{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_l}{\lambda_1 + \dots + \lambda_l} = 1$$

Ugyanígy $v \in \operatorname{conv} S_2$ ugyanis:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 + \dots + \frac{\lambda_l}{\lambda} v_l = -\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda} v_{l+1} - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda} v_m =$$

$$= \frac{|\lambda_{l+1}|}{\lambda} v_{l+1} + \dots + \frac{|\lambda_m|}{\lambda} v_m \quad \text{konvex kombináció}$$

Helly-tétele

! $B_1 \dots B_m \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmazok, $m \geq n+1$ és tegyük fel, hogy $\forall$ $(n+1)$ db halmaznak van közös pontja $\Rightarrow$ az összesnek is van!

$\boxed{\text{Biz.:}}$ Teljes indukció m szerint

$m = n+1$-re igaz, mert a konklúzió egyező a feltétellel. $(p \Rightarrow p)$

Tegyük fel, h. m-ig jó.

„töröld az alatta állót"

$(m+1)$-re: $B_1, \dots, B_m, B_{m+1} \to$

$$\hat{B}_1, B_2, \dots, B_{m+1} \Rightarrow v_1 \in \hat{B}_1 \cap \dots \cap B_{m+1}$$

$$B_1, \hat{B}_2, \dots, B_{m+1} \Rightarrow v_2 \in B_1 \cap \dots \cap B_{m+1} \quad \text{és}$$

$$\vdots$$

$$B_1, B_2, \dots, \widehat{B_{m+1}} \Rightarrow v_m \in B_1 \cap \dots \cap \widehat{B_{m+1}}$$

és $m \geq n+2 \xRightarrow{\text{Radon}} \{ v_1, \dots, v_m \} = S_1 \cup S_2 : \operatorname{conv} S_1 \cap \operatorname{conv} S_2 \neq \emptyset$

Tekintsük a $v \in \operatorname{conv} S_1 \cap \operatorname{conv} S_2$

Az egyszerűség kedvéért: $S_1 = \{ v_1, \dots, v_l \}$; $S_2 = \{ v_{l+1}, \dots, v_m \}$

$$v \in \operatorname{conv} \{ v_1, \dots, v_l \} \subset B_{l+1} \cap \dots \cap B_{m+1}$$

$$v \in \operatorname{conv} \{ v_{l+1}, \dots, v_m \} \subset B_1 \cap \dots \cap B_l$$

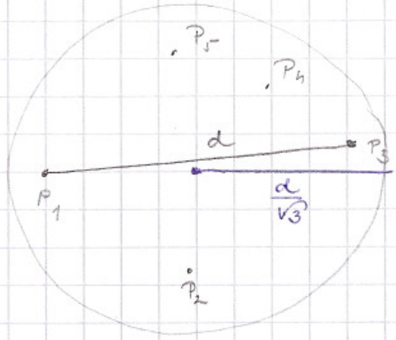
$$\sum \quad v \in B_1 \cap \dots \cap B_{m+1}.$$

Következmény:

! $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$ (sík pontjai)

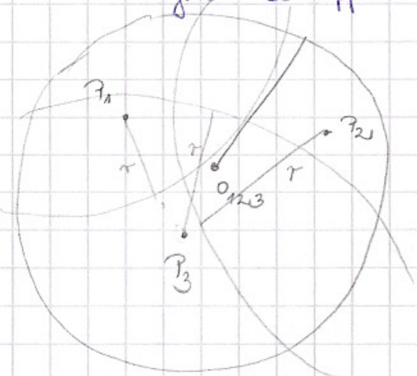
$d = \max \{ d(p_i, p_j) \mid i, j = 1, \dots n \}$

$p_1, \dots, p_n$ pontok lefedhetők $\frac{d}{\sqrt{3}}$ sugarú körlappal. (Jung tétele)



Biz.:

1. lépés: Ha egy véges ponthalmaz elemei közül ∀ 3 lefedhető r sugarú körlappal ⇒ az összes is.



$O_{123} \in K_1 \cap K_2 \cap K_3$

K_i a p_i középpontú r sugarú körlap

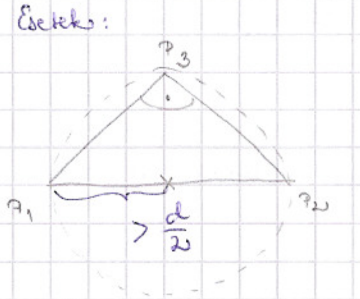
123-at kicserélhetjük ∀ ijk-ra $\{1, \dots n\}$-ből.

$(n=2) \overset{\text{Helly}}{\Rightarrow} K_1 \cap \dots \cap K_n \neq \emptyset$

A közös pont (O) körüli r sugarú körlap jó.

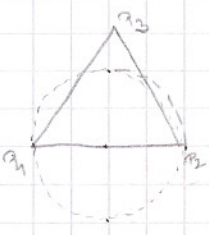
2. lépés: Elegendő belátni, hogy ∀ 3 lefedhető $\frac{d}{\sqrt{3}}$ sugarú körlappal.

Esetek:



derékszög

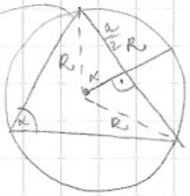
tompaszög



hegyesszög

$\frac{d}{2} < \frac{d}{\sqrt{3}}$

Hegyesszögű Δ esete:



Biz. be $R \le \frac{d}{\sqrt{3}}$, feltéve, hogy $d \ge$ mint a leghosszabb oldal.

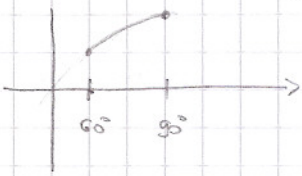
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$\sin\alpha = \frac{a}{2R}$ $\Rightarrow$ átrendezve: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

Tekintsük α-t: feltehető, h. $\alpha \ge 60°$

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} \le \frac{d}{\sin\alpha} \le \frac{d}{\sin 60°} = \frac{d}{\sqrt{3}/2} = \frac{2d}{\sqrt{3}} \quad /:2$$

$$R \le \frac{d}{\sqrt{3}}$$



$\Sigma \Rightarrow R \le \frac{d}{\sqrt{3}}$

Példa:

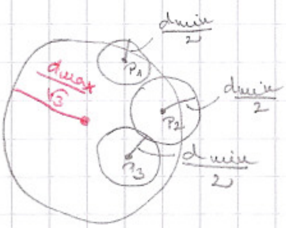
$p_1, \dots, p_n$ $\quad d_{max} := \max\{d(p_i, p_j) \mid i, j \in \{1, \dots, n\}\}$

$d_{min} := \min\{d(p_i, p_j) \mid i \ne j,\ i, j \in \{1, \dots, n\}\}$

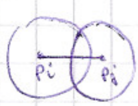
? d_{max} és d_{min} kapcsolata (egymásra való hatása)

Helly-tétel ⇒ Jung

$\Rightarrow$ $p_1, \dots, p_n$ lefedhető $\frac{d_{max}}{\sqrt{3}}$ sugarú körlappal



Két ilyen köröcske nem metszheti egymást

[

$\Rightarrow d(p_i, p_j) < 2r = d_{min}$ ↯]

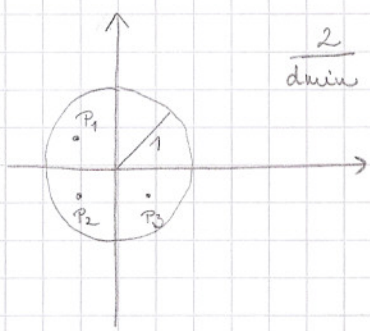
Fedjük le ezt egy $\frac{d_{max}}{\sqrt{3}}+\frac{d_{min}}{2}$ sugarú körlappal

$$\left(\frac{d_{max}}{\sqrt{3}}+\frac{d_{min}}{2}\right)^2\cancel{\pi} \geq n\left(\frac{d_{min}}{2}\right)^2\cancel{\pi}$$

(kiskörök területösszege kisebb, mint a nagykör területe.)

$$\frac{d_{max}}{\sqrt{3}}+\frac{d_{min}}{2} \geq \sqrt{n}\,\frac{d_{min}}{2} \quad /:d_{min} \qquad \boxed{\frac{d_{max}}{d_{min}}+\frac{\sqrt{3}}{2} \geq \sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{d_{max}}{d_{min}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{n}-1\right)$$



$$\frac{2}{d_{min}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{n}-1\right) \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}\left(\sqrt{n}-1\right)} \geq d_{min}$$

$$\frac{1}{100} > \frac{4}{\sqrt{3}\left(\sqrt{n}-1\right)}$$

$$\sqrt{n}-1 > \frac{400}{\sqrt{3}}$$

$$n > \left(\frac{400}{\sqrt{3}}+1\right)^2$$

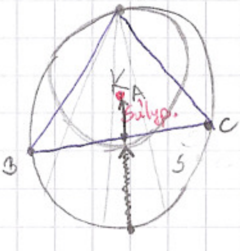
Blaschke-tétel:

(A sík konvex kompakt részhalmazai közel centrálszimmetrikusak.)

A sík konvex kompakt halmazának van olyan belső pontja, mely mindig a rá illeszkedő húrok középső harmadába esik.

Biz.:

→ a középső harmadba esik



K_A = S-nek A kp-ú $\frac{2}{3}$-os kicsinyítése.

$\cap\{K_A \mid A \in S \text{ határán}\}$

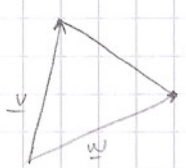
↳ halmazcsalád: minden határpontra

Be fogjuk látni, h $\forall$ A, B, C határpont esetén $K_A \cap K_B \cap K_C \neq \emptyset$.

Helly-tételére hivatkozunk $\Rightarrow$ az összesnek van.
(nem véges verzió)

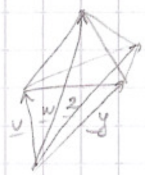
$K_A \cap K_B \cap K_C \Rightarrow$ ABC$\triangle$ súlypontja benne lesz.

$\{p_1, \dots, p_m\}$ súlypontja



$\underline{s} = \frac{\underline{v}+\underline{w}}{2}$

$\underline{s} = \frac{\underline{v}+\underline{w}+\underline{z}}{3}$

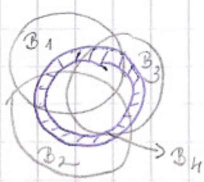


$\underline{s} = \frac{\underline{v}+\underline{w}+\underline{z}+\underline{y}}{4}$

Megj.: Helly-tételben szereplő feltételek:

a) konvexitás
b) $m \geq n+1$
c) véges sok halmaz

a) nem hagyható el

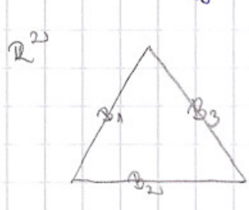


B_1, B_2, B_3 körlapok + B_4 körgyűrű $\Rightarrow$

$\Rightarrow B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 = \emptyset$

(annak ellenére, h $\forall$ 3-nak van közös része)

b) nem hagyható el



$\forall$ kettőnek $\exists$ közös pontja, de az összesnek nincs c)

$B_1 =]0,1[$

$B_2 =]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$

$\vdots$

$B_m =]-\frac{1}{m}; \frac{1}{m}[$

$\mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}$-ben

konvex ✓

$m \geq n+1$ ✓

$\underbrace{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m \cap \dots}_{\{0\}} = \emptyset$

ki lehet javítani, ha a halmazokat leszűkítjük

Ha viszont feltesszük, hogy nem csak konvex, hanem kompakt halmazaink vannak ⇒ a tétel nem véges esetben is érvényes.

(Victor Klee bizonyította) ún. Blaschke tételnek

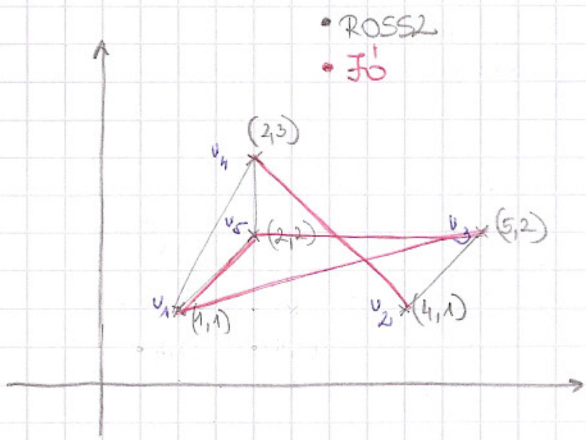
Példa:

Radon lemma

$\mathbb{R}^2$

$v_1, \dots, v_m \quad m \geq \underbrace{n+2}_{4}$

Hogy kell a pontokat szétbontani, hogy a konvex burkok egymásba metszenek.



A biz. algoritmus: $v_1, \dots, v_5$ affin függőek ⇒

$$\lambda_1 \overset{(1,1)}{v_1} + \lambda_2 \overset{(4,1)}{v_2} + \lambda_3 \overset{(5,2)}{v_3} + \lambda_4 \overset{(2,3)}{v_4} + \lambda_5 \overset{(2,2)}{v_5} = \underline{0}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_5 = 0$$

$$\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 = 0$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_5 = 0$$

Gauss elimináció:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad ③ - ②$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0$$

$$3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$$

$$x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$

$\boxed{x_5 = t}$; $\boxed{x_4 = s}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_3 = -t+2s}$

$$3x_2 = s + 3(t+2s) = 7s + 3t \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{7s+3t}{3}}$$

$$x_1 = -2t - 2s + 5(t+2s) - \frac{4}{3}(7s+3t) \Rightarrow \boxed{x_1 = -t - \frac{4}{3}s}$$

A teljes megoldás:

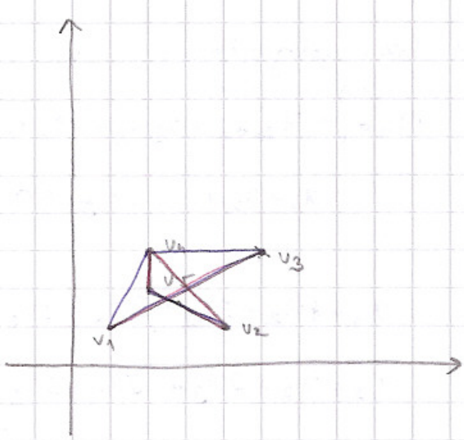
$$t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pl.: $t = 1$, $s = 0$ választással:

$x_1 = -1 < 0$
$x_2 = 1 > 0$
$x_3 = -1 < 0$
$x_4 = 0 \geq 0$
$x_5 = 1 > 0$

$S_1 = \{v_2, v_4, v_5\}$

$S_2 = \{v_1, v_3\}$



Pl.: $t = -1$; $s = 0$ választással:

$x_1 = 1$
$x_2 = -1$
$x_3 = 1$
$x_4 = 0$
$x_5 = -1$

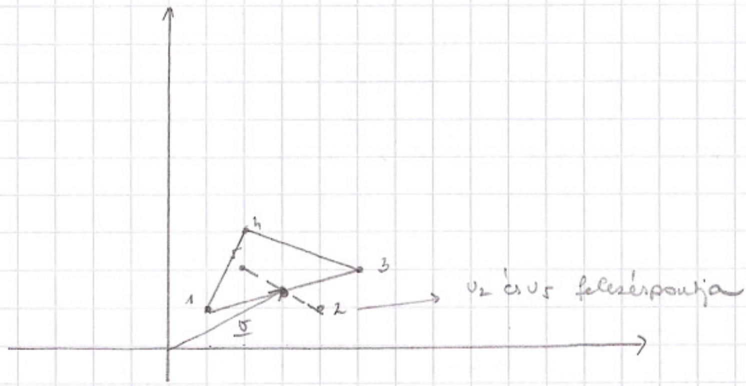
$S_1 = \{v_1, v_3, v_4\}$

$S_2 = \{v_2; v_5\}$

A közös elem:

$$v = \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5} v_2 + \frac{\lambda_5}{\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5} = \quad \text{A } \lambda_4 \text{ nem számít, mert } 0.$$

$$= \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_5$$



BÚCSÚPÉLDA:

$$\underline{s}: \frac{1}{5} v_1 + \frac{1}{5} v_2 + \frac{1}{5} v_3 + \frac{1}{5} v_4 + \frac{1}{5} v_5$$

$\underline{s} \in \operatorname{conv}\{v_1, \dots, v_5\}$, de $v_1, \dots, v_5$ affin függő

Carathéodory tétel szerint

$\Downarrow$

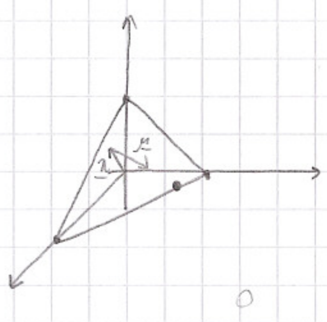
elég lenne 3.

Feladat: redukáljuk a konvex kombinációt!

$$\underline{\lambda} := \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$$

$$\underline{\mu} := (-1; 1; -1; 0; 1)$$

Térben szemléltetve:



Keresendő az a t: $\underline{\lambda} + t_0 \underline{\mu} \Rightarrow$ (valamelyik koordináta 0.)

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{5} \\ t_2 = -\frac{1}{5} \quad \left(\frac{1}{5} + x(-1)\right) \\ t_3 = \frac{1}{5} \\ t_5 = -\frac{1}{5} \end{array}\right\} \text{ a } \mu \text{ és } \lambda \text{ miatt!}$$

Pl.: $t_1 = \frac{1}{5}$ választással

$$\underline{v} = \left(0; \frac{2}{5}; 0; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right) \rightarrow \text{összegük}: 1 \Rightarrow \text{konvex kombináció}$$

$\underline{n} + \frac{1}{5}\underline{m}$

Nézzük meg:

$v_2(4;1)$ $v_4(2;3)$ $v_5(2;2)$

$$\frac{2}{5}v_2 + \frac{1}{5}v_4 + \frac{2}{5}v_5 = \left(\frac{8}{5}; \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right) = \underbrace{\left(\frac{14}{5}; \frac{9}{5}\right)}_{\text{SÚLYPONT}}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1(1;1) \\ v_2(4;1) \\ v_3(5;2) \\ v_4(2;3) \\ v_5(2;2) \end{array}\right\} \text{számtani középük}: \left(\frac{14}{5}; \frac{9}{5}\right)$$

valóban súlypont

Hf: $v_1(1;0)$, $v_2(1;3)$, $v_3(4;3)$, $v_4(4;0)$

affin függőek, mert $\mathbb{R}^2$-ben 4db vektor

$$v = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{6}v_3 + \frac{1}{12}v_4$$

$\Downarrow$

összegük 1 $\Rightarrow$ konvex kombináció

redukáljuk a tagok számát

$$\underline{n} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$$

$$\underline{s} = \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{4}v_3 + \frac{1}{4}v_4$$ redukáljuk a kombinációt

$$\left(\underline{s} = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_3\right)$$