Konvex geo
IV. 17.

máj 8. 10^{00}

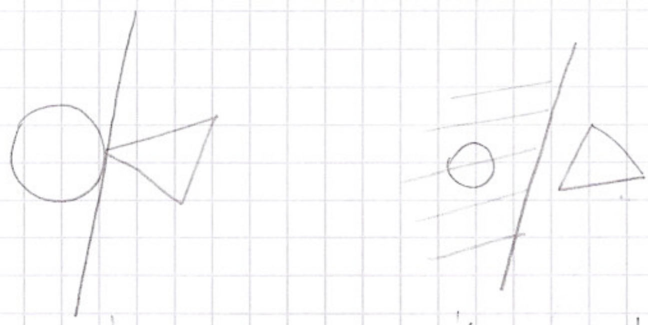
4. tétel: Szeparálási tételek

1. Síkban egy egyenest keresünk, amely elválasztja a síkidomokat
a) egyenessel

D.: $A, B \subset \mathbb{R}^2$, $\ell \subset \mathbb{R}^2$ egyenes; ℓ szeparálja A és B-t, ha A és B különböző félsíkban vannak.

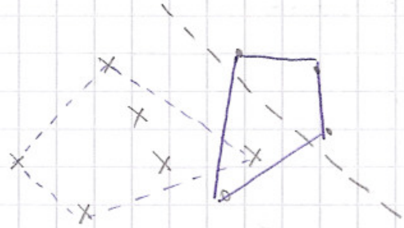
-"- élesen szeparálja -"-

nyílt félsíkban vannak



szeparál — élesen szeparál

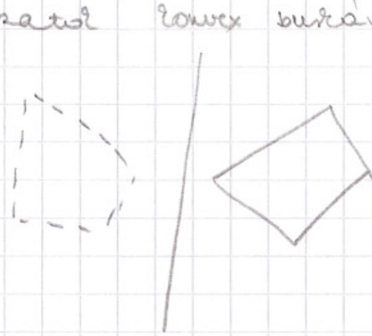
Milyen feltételek mellett található ilyen egyenes?



x: birka
•: kacsa
o: plusz kacsa

Probléma oka: az egyik alakzat konvex burka beleesik a másik -"- burkába

Az alakzatok konvex burkának kell diszjunktnak lennie.



$A = \{x, \dots, x\}$

$B = \{\bullet, \dots, \bullet\}$

Sejtés: ℓ létezése $\Leftrightarrow$ $\mathrm{conv}\, A \cap \mathrm{conv}\, B = \emptyset$

Számegyenesen: D1.

$\boxed{B12.}$

„$\Rightarrow$" Tfh: $\exists$ olyan ℓ egyenes, mely élesen szeparálja A-t és B-t.

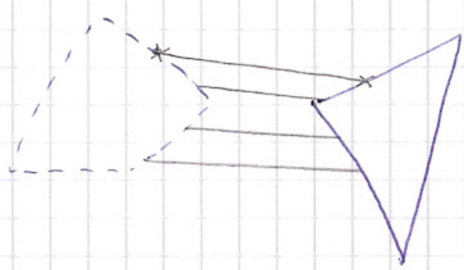
$\Downarrow$

conv A és conv B ugyanabba a nyílt félsíkba esik, mint A és B.

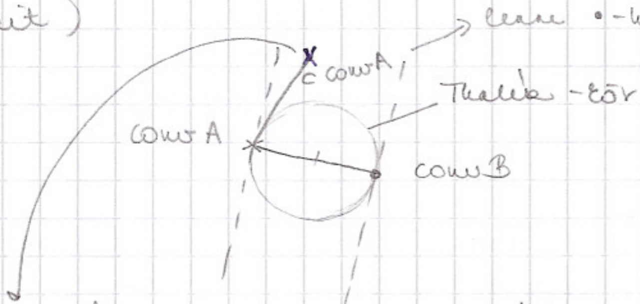
$\Downarrow$

ezek metszete üres conv $A \cap$ conv $B = \emptyset$

„$\Leftarrow$" Tfh conv A és conv $B = \emptyset$



Megkeressük a két halmaz közötti legkisebb távolságot, a két halmaz távolságát. (halmazok egymáshoz legközelebbi pontjait)

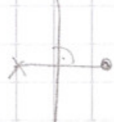


Ind. Tfh $\underbrace{\text{conv } A}_{\text{konvex}}$-nak van itt pontja

az új egyenes bele fog metszeni a körbe $\Rightarrow$ van az átmérőnél kisebb távolság ↯ megkerestük a két halmaz legközelebbi pontját

ugyanígy conv B-re

Σ: élesen szeparálja conv A-t és conv B-t együtt A-val és B-vel.

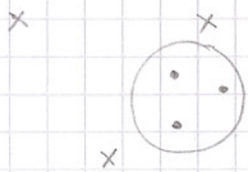


Tétel: $A, B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt halmazok élesen szeparálhatók egyenessel $\Leftrightarrow$ ha

$\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B = \emptyset$.

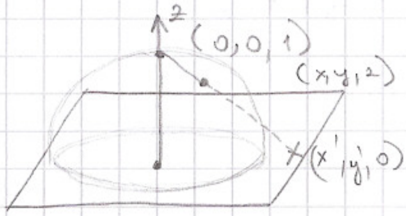
halmazok: korlátos és zárt
↓
fontos!

I.
b. kör



kör megy, egyenessel nem

Kilépünk a térbe:



sztereografikus projekció

Analitikus leírás

$$(0,0,1) + t\,((x,y,z) - (0,0,1)) = (x', y', 0)$$

Addig megyünk, míg a 3. koordináta le nem nullázódik.

$$1 + t(z-1) = 0$$

$$t = \frac{1}{1-z} \Rightarrow x' = \frac{x}{1-z}$$

$$y' = \frac{y}{1-z} \rightsquigarrow$$

$$(z' = 0)$$

$$\rightsquigarrow (x')^2 = \frac{x^2}{(1-z)^2}$$

$$(y')^2 = \frac{y^2}{(1-z)^2}$$

$+$

$$x'^2 + y'^2 = \frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}$$

$$x'^2 + y'^2 = \frac{1+z}{1-z}$$

$$(1-z)(x'^2 + y'^2) = 1 + z$$

$$x'^2 + y'^2 - z(\;) = 1 + z$$

$$\boxed{z = \frac{x'^2 + y'^2 - 1}{1 + x'^2 + y'^2}}$$

Tekintsünk egy $Ax + By + Cz + D = 0$ síkot a térben !

$x = x'(1-z) = x'$

$$\boxed{x = x'(1-z) = \frac{2x'}{1+x'^2+y'^2}}$$

$$\boxed{y = \frac{2y'}{1+x'^2+y'^2}}$$

Tehát a sík ∩ gömb projekció általi képe

$$\frac{2Ax'}{1+x'^2+y'^2} + \frac{2By'}{1+x'^2+y'^2} + C\,\frac{x'^2+y'^2-1}{1+x'^2+y'^2} + D = 0$$

$\boxed{\Sigma}$ $Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow Dx'^2 + Dy'^2 + 2Ax' + 2By' + C(x'^2+y'^2) + D -$

$- C = 0.$

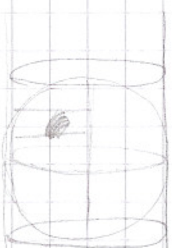
$(D+C)x'^2 + (D+C)y'^2 + \dots = 0$

kör

A térben síkkal szeparálunk.

Kör szeparálás síkban ⟺ síkszeparálás térben.

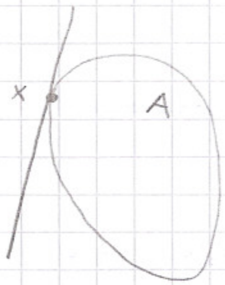
(analóg az egyenessel síkban (esett ez.))



a gömbi felület leképezhető a henger felületére

II. Támaszegyenesek

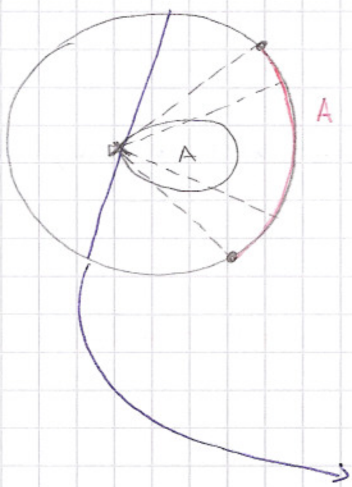
$A \subset \mathbb{R}^2$ konvex, kompakt halmaz, $x \in A$ határának



olyan egyenest keresünk, amely az A halmazt az egyik félsíkba zárja.

Támaszegyenes: illeszkedik x-re és A az egyik félsíkban van.

1) Felismerés: konvex halmaz $\forall$ határpontjában van támaszegyenes.



A belsejének vetülete a körre.

Összefüggő, mert A konvex.

ív mértéke $\leq \pi$

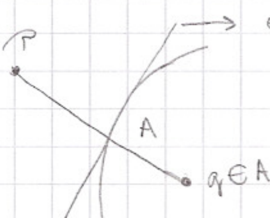
$\Downarrow$

$\exists$ olyan átmérő egyenes, amely nem metsz bele az ívbe. $\Rightarrow$ ez lesz (egy) támaszegyenes

2) Felismerés: Ha egy 2. dimenziós kompakt halmaz $\forall$ határpontjában van támaszegyenes $\Rightarrow$ konvex

Tfh: A ilyen és ! $p \in \mathbb{R}^2 \setminus A$

$\rightarrow$ ez a támaszegyenes szeparálja P-t és A-t.



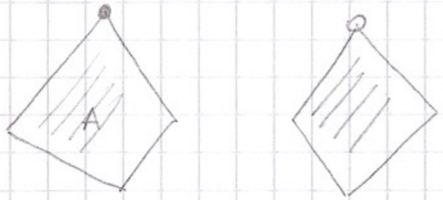
Megmutattuk, h ha $P \notin A$ komplementere $\Rightarrow \exists$ olyan zárt félsík, mely A-t tartalmazza, de P-t nem.

kontrapozícióval
$\Longrightarrow$ Ha $\forall$ sík, mely A-t tartalmazza az tartalmazza P-t is $\Rightarrow P \in A$.

$A = \cap \{A\text{-t tartalmazó zárt félsíkok}\}$

5. Krein - Milman tétel (1940)

Def.: ! $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz. $x \in A$ extremális pontja, ha $A \setminus \{x\}$ is konvex.



Megj.: Nincs olyan A-beli szakasz, mely x-et a belsejében tartalmazná.

T.: Minden A konvex, kompakt halmaz = az extremális pontjainak konvex burkával.

$A = \operatorname{conv} \operatorname{Ext} A$

Biz.: $n = 2$ (síkban)

a) $A \subset \operatorname{conv} \operatorname{Ext} A$

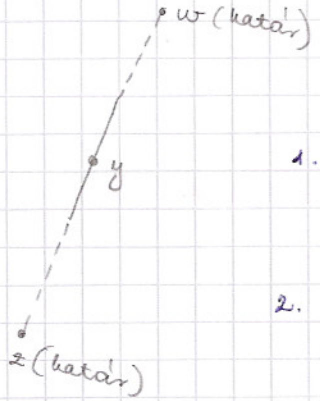
b) $\operatorname{conv} \operatorname{Ext} A \subset A$ (triviális)

miért: $\operatorname{Ext} A \subset A$ (A konvex) $\Rightarrow \operatorname{conv} \operatorname{Ext} A \subset A$
$\Downarrow$
konv.

a) ! $y \in A$ tetszőleges

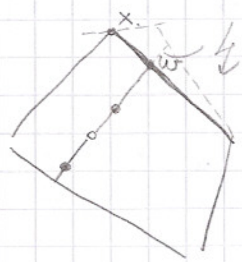
ha $y \in \text{Ext}\, A \Rightarrow$ KÉSZ ✓

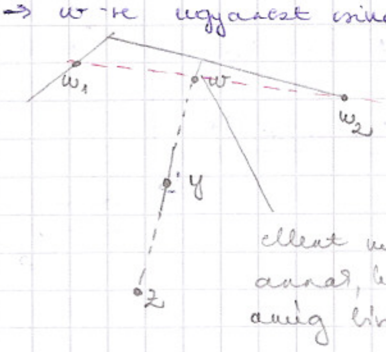
ha nem $\Rightarrow \exists$ olyan A-beli szakasz, mely y-t a belsejében tartalmazza. (hosszabbítsuk amíg lehet)



1. $w, z \in \text{Ext}\, A \Rightarrow$ KÉSZ ✓
   mert:
   $$y \in s(w,z) \subset \text{conv Ext}\, A$$

2. ha $w \notin \text{Ext}\, A$ → w-re ugyanezt csináljuk. ⇒

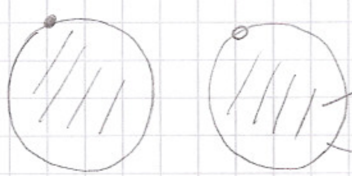




$\Rightarrow s(w_1, w_2)$ szakasz, végpontjai extremális pontok

(indirekt, ha nem $\Rightarrow s(w,z)$ hosszabbítható, ami ↯ 1-vel.)

Példa:



végtelen sok extr. pontja van

ez is konvex

extr. körlemez = körvonal

Konvex politópok

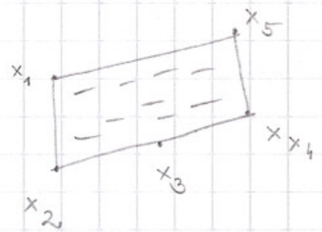
D.: Véges sok $\mathbb{R}^n$-beli pont konvex burkát konvex politópnak hívjuk.

$\mathbb{R}^2$: kétdimenziós konvex politópjai = konvex sokszögek v. konvex poligon.

$\mathbb{R}^3$: háromdimenziós -"- = konvex poliéder

T.: ! $A = \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$

$\underbrace{\mathrm{Ext}\, A}_{A \text{ csúcsai}} \subset \{x_1, \dots, x_m\}$



Krein–Milman tétel szerint: $A = \mathrm{conv}\, \mathrm{Ext}\, A$

Biz.: Tfh. $x \in \mathrm{Ext}\, A$, de $x \notin \{x_1, \dots, x_m\}$

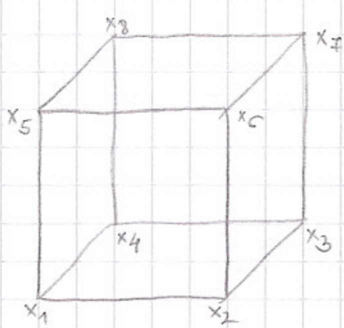
$\boxed{A \setminus \{x\} \text{ konvex}, \quad x_1, \dots, x_m \in A}$ (mert x extremális pont)

$\Rightarrow \underbrace{\mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_m\}}_{A} = A \setminus \{x\}$

Megj.: Igazolható, h minden konvex politóp előáll véges sok zárt féltér (félsík) metszeteként. $\mathbb{R}^3$-ban ($\mathbb{R}^2$-ben).

Ha ez az előállítás minimális (a félterek/félsíkok egyike sem hagyható el $\Rightarrow$ ezek határalakzatait lapoknak/éleknek nevezzük.)

Pl.:



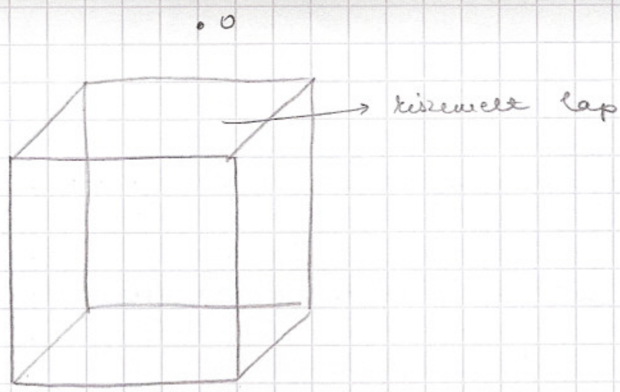
$A = \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_8\}$

Euler-féle poliédertétel

T.: $\forall$ konvex poliéderre: $c - e + l = 2$

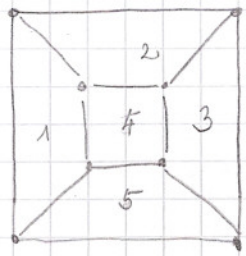
c: csúcsok, e: élek, l: lapok száma

312.



O-t a kiszemelt lap szeparálja a kocktától, de az összes többi nem.

O-ból levetítjük a konvex poliédert a kiszemelt lapsíkra.



csúcsai: (C) $C = c$

élei: (E) $E = e$

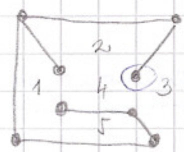
a kis sokszögtartományok számát L jelöli: $L = l - 1$

1. lépés: körmentesítünk. (ha van kör ⇒ törlünk belőle egy élt)

$$C - E + L \to C - (E-1) + (L-1) = C - E + L$$

csináljuk, amíg lehet (amíg körmentessé válik)

de összefüggő gráf



2. lépés: vannak 1 fokszámú csúcsok
mis, ha $\forall$ csúcs foka legalább 2 ⇒ van kör
(leghosszabb út)
↳ kör

Töröljük ezeket a csúcsokat és éleket (1 fokszámú csúcsok)

$$C - E + L = (C-1) - (E-1) + L = C - E + L$$

csináljuk, amíg lehet

összefüggő marad → •

$$C - E + L = 1$$
$$c - e + l - 1 = 1$$
$$\boxed{c - e + l = 2}$$

Geo IV.18.

Visszamenőleg:

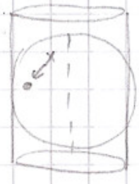
$\underbrace{Ax+By+Cz+D}=0$ → síkbeli kör

a tér egy síkja, ami a gömbön egy körként jelenik meg

+ sztereografikus projekció gömbi körhöz (⇔ térbeli sík) síkbeli kört rendel.

(körtartó) + szögtartó

„Henger projekció"



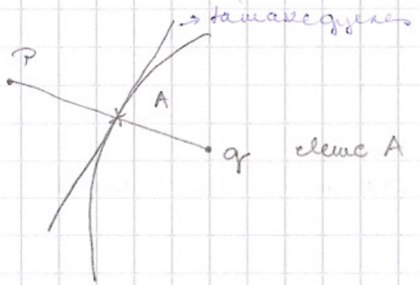
felszíntartó

henger kiterítése síkba

felszíntartó leképezés gömbnek a síkra

Támaszegyenes:

$p \in A$ komplementere



eleme A belseje

2. felismerés

ha $p \notin A \Rightarrow \exists$ zárt félsík, mely p-t nem, de A-t tartalmazza

⇓

$p \notin A \Rightarrow p \notin \underbrace{\bigcap\{A\text{-t tartalmazó zárt félsíkok}\}}_{=:\Omega}$

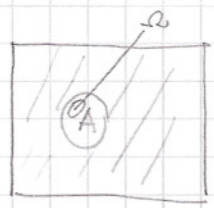
A komplementere $\subset$ Ω komplementerének

⇓

$\boxed{\Omega \subset A}$

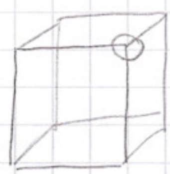
$+\ A \subset \Omega$ triviális

Σ: $A = \Omega$ konvex



Descartes-tétel

<u>D:</u> Egy konvex poliéder egy v csúcsának a defektusa = $2\pi - \sum$ élszögek v-nél



$2\pi - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$

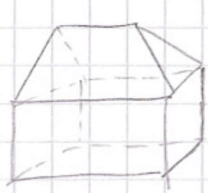
<u>T.</u> Egy konvex poliéder csúcsai defektusának összege = 4π

$\boxed{\text{BIZ.:}}$

$$\sum_{v\ \text{csúcs}} \overset{\text{defektus } v\text{-nél}}{\delta(v)} = \sum_{v} 2\pi - (\text{élszögek összege } v\text{-nél}) = 2\pi \cdot \overset{\text{poliéder csúcsainak száma}}{c} - \underbrace{\sum_{v} \sum \text{élszögek } v\text{-nél}}_{\text{az összes élszög összege}}$$

ügyes leszámlálás:

$$\left.\begin{array}{l} f_3 = \text{a poliéder háromszöglapjainak a száma} \\ f_4 = \text{-"- } 4∡ \text{ -"-} \\ \vdots \\ f_n = \text{-"- } n∡ \text{ -"-} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k} (k-2)\pi \cdot \overset{\text{hány ∡ van az adott poliéderen}}{f_k}$$



$f_3 = 2$
$f_4 = 7$

$$\pi \sum_{k} \underbrace{k \cdot f_k}_{2 \cdot e \text{ élek száma}} = 2\pi \underbrace{\sum_{k} f_k}_{l \text{ - poliéder lapjainak száma}}$$

<u>Végül:</u> $2\pi c - \pi 2 e + 2\pi l = 2\pi (c - e + l) = 4\pi$

↳ Euler-tétel

Szabályos poliéderek:

D.: ~ : olyan poliéder, melynek lapjai szabályos p-szögek, minden lapszöge egyenlő.

(szab. p-szög: minden oldala és minden szöge egyenlő)

Szab. poliéder szimbóluma: $(p; q)$ → egy csúcsba futó élek száma

↓ milyen szab. sokszögekből áll a poliéder

pl.: kocka $(4; 3)$ → 1 csúcsba 3 él fut.

↓ szab 4-szög

Tétel: A szab. poliéder szimbólumai:

$(3; 4)$ $(4; 3)$

$(3; 5)$ $(5; 3)$

$(3; 6)$

Biz.: Összegezzük a defektusokat a csúcsoknál. $= 4\pi$ (Desc.)

Minden csúcsdefektus egyenlő (szab) ⇒ minden csúcsdef. pozitív.

Tehát: $2\pi - q\alpha > 0$ → p-szög egyik belső szöge

$p \geq 3$

Viszont: $q \geq 3 \Rightarrow 2\pi - 3\alpha \geq 2\pi - q\alpha > 0$

$$2\pi - 3\alpha > 0$$

$$120° = \frac{2\pi}{3} > \alpha$$

5-szög-nél

$\Rightarrow \alpha = 60°$ (3-szög)

$\alpha = 90°$ (4-szög)

$\alpha = 108°$ (5-szög)

$p = 3; 4; 5$

1. $p = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

$$2\pi - q\frac{\pi}{3} > 0$$

$$6 > q$$

2. $p = 4$

$$2\pi - q\frac{\pi}{2} > 0$$

$$4 > q \qquad q = 3$$

3. $p = 5$

$$\alpha = \frac{3}{5}\pi$$

$$2\pi - q\frac{3\pi}{5} > 0$$

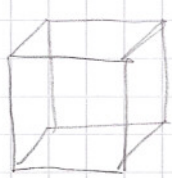
$$3{,}\dot{3} = \frac{10}{3} > q \qquad q = 3$$

Pl.:

$(3;3)$ tetraéder

lapok száma szerint

$(3;4)$ oktaéder

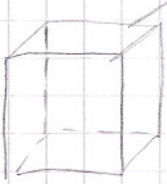


$(4;3)$ hexaéder

$(3;5)$ ikozaéder 20 - lapú

$(5;3)$ dodekaéder 12 - lapú

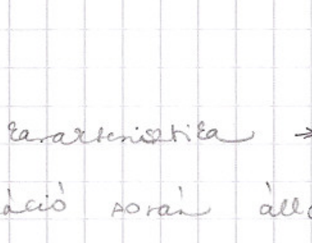
szab. test.	c	e	l
tetraéder (3;3)	4	6	4
hexaéder (4;3)	8	12	6
oktaéder (3;4)	6	12	8
dodekaéder (5;3)	20	30	12
ikozaéder (3;5)	12	30	20



→ gömbre rajzolható

$c - e + l = 2$

tóruszra rajzolható



→ addig alakítjuk, míg tóruszt nem kapunk.

$c = 16$. $e = 32$ $l = 16$

Euler-karakterisztika → a felületre jellemző adat és folytonos deformáció során állandó (nem változik)

VIZSGA máj 8 10^{00} (127. iroda mat int.)

máj 9 16^{00}

max 90 perc

feladat, amiket megcsináltunk (3 db)

biz fajta

belső pontok

partíció: Radon lemma

[illegible] konvex kombinációra

elm: def, tétel (szabadon választott + biz) + 1 tétel