Def.: Az n szögpontú egyszerű G gráf $\overline{G}$ komplementere az az egyszerű gráf, amelynek $V(\overline{G})$ megegyezik a $V(G)$ G csúcshalmaza, és $\overline{G}$ felrajzolásban két csúcs szomszédos pontosan akkor, ha G-ben nem szomszédosak.

XI. 17.

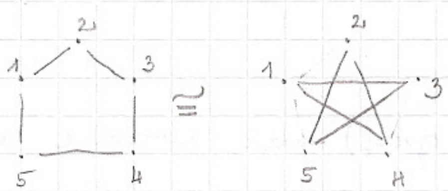
9. előadás

Def.: A G_1 és G_2 gráfokat izomorf gráfoknak nevezzük, ha $\exists$ olyan f bijektív leképezés, amely $f: V(G_1) \to V(G_2)$ és illeszkedéstartó, azaz
g_1 csúcshalmaza

A és B szomszédos csúcsok G_1-ben $\Leftrightarrow$, ha $f(A)$ és $f(B)$ szomszédos szögpontok G_2-ben.

(jel.: $G_1 \cong G_2$)

példa:



x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	5	2	4

Def.: $G_1 \leq G_2$ (részgráfja), ha $V(G_1) \subseteq V(G_2)$ és $E(G_1) \subseteq E(G_2)$

Def.: $A \subset V(G)$ által feszített részgráf: Az a gráf, melynek csúcshalmaza az A halmaz, élhalmaza pedig pontosan azokból az élekből áll, amelyeknek mind a két végpontja A-ból való.

Def.: Végpontjaikkal egymáshoz kapcsolódó élekből egy $A_1 e_1 A_2 e_2 A_3 \dots A_n e_n A_{n+1}$ sorozatát az A_1 csúcsot az A_{n+1} csúccsal összekötő élsorozatnak nevezzük. Itt $e_i := \{A_i, A_{i+1}\}$ e_i él két végpontjai A_i és A_{i+1} $i = 1, 2 \dots n$. Egy élsorozatot <u>vonalnak</u> nevezünk, ha nincs benne két azonos él. Egy élsorozatot <u>zárt élsorozatnak</u> nevezzük, ha kezdő és végpontja megegyezik. Egy élsorozatot <u>nyílt élsorozatnak</u> nevezünk, ha kezdő- és végpontja különbözik. ($A_1 \neq A_{n+1}$)

Def.: A_1-et 0 élből álló élsorozatnak tekintjük.

Def.: Egy nyílt vonalat <u>útnak</u> nevezünk, ha benne semelyik csúcs sem ismétlődik.

Def.: Egy zárt legalább egy élű vonalat <u>körnek</u> nevezünk, ha a kezdő- illetve végpont kivételével semelyik csúcs nem ismétlődik.

Összefüggő gráfok

Def.: Egy G gráfot összefüggőnek nevezünk, ha ∀ két csúcsához ∃ őket összekötő, a gráf éleiből álló élsorozat.

Mj.: Élsorozattal összeköthető két pont ⇔, ha úttal összeköthető.

Biz.: 1., ha úttal összeköthető A és B ⇒ az élsorozat is egyben. ✓

2., Ha A és B élsorozattal összeköthető és valamelyik csúcs (pl.: x) ismétlődik benne ⇒ hagyjuk el az élsorozatnak az x legelső és legutolsó előfordulása közötti szakaszát. Így egy olyan élsorozatot kapunk, amelyben az x már nem ismétlődik. Ha szükséges, más pontokra is alkalmazzuk az eljárást. Így véges sor lépésben egy utat kapunk. ✓

A .... C $\boxed{x \; .... \; x \; ... \; x}$ D ... B

$\Downarrow$

A ... C x D ... D

Tétel: Az élsorozattal való összeköthetőség ekvivalencia-reláció a V(G) halmazon. Az ekvivalenciaosztályok által kifeszített részgráfok a gráf komponensei. (a gráf maximális összefüggő részgráfjai.)

komponens:

komponensek ⇒ 3 komponensből áll.

Biz.: a, Az $A \in V(G)$ pontot a 0 élből álló A élsorozat összeköti önmagával, tehát a reláció REFLEXIV.

b., Ha ∃ az A csúcsot a B-vel összekötő élsorozat ⇒ ennek elemei fordított sorrendben felsorolva a B-t az A-val összekötő élsorozatot kapunk, tehát a reláció: SZIMMETRIKUS.

c, Ha ∃ az A-t a B-vel és B-t a C-vel összekötő élsorozat ⇒ ezeket B-ben egyesítve az A-t a C-vel összekötő élsorozatot kapunk, tehát a reláció TRANZITÍV.

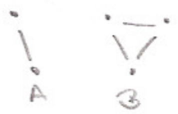
Tétel: ∀ G egyszerű gráf vagy komplementere összefüggő.

Biz.: Tfh. G nem összefüggő. (indirekt) be kell látni, hogy $\bar{G}$ biztosan összefüggő.

∀ $A, B \in V(G)$ esetén

1) Ha A és B a G különböző komponenseiből való ⇒ $e = \{A, B\}$ él eleme $E(\bar{G})$ (élhalmaz), azaz A-t a B-vel összeköti ezen egy élből álló élsorozat $\bar{G}$-ben.

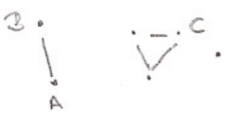
pl.:



a komplementerben köti össze egy él A-t és B-t.

2) Ha A és B ugyanazon komponensből való ⇒ mivel a G nem összefüggő, ∃ olyan C pont, amely a G egy másik komponensének pontja. Ekkor az $\{A, C\}\ \{C, B\}$ élsorozat összeköti A-t a B-vel a $\bar{G}$ gráfban.

pl.:



1)-ből és 2)-ből következik, hogy $\bar{G}$ összefüggő.

ebből következik, hogy egykomponensű.

Tétel: Ha egy n pontú egyszerű G gráfban ∀ pont foka $\geq k$ (ahol $0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$) és élszáma $|E(G)| > \binom{k+1}{2} + \binom{n-(k+1)}{2}$ ⇒ G összefüggő.

Biz.: indirekt

Tfh.: G nem összefüggő, de teljesíti a tétel feltételeit. Húzzunk be újabb éleket G-ben mindaddig, amíg a kapott egyszerű gráf továbbra sem lesz összefüggő. Az élek behúzása akkor akad el, amikor a gráf kétkomponensű és ez a két komponens a K_i illetve a K_{n-i} teljes gráfok. Feltehető, hogy $i \le n-i$ (azaz $i \le \frac{n}{2}$). Másrészt a K_i-ben $\forall$ csúcs foka $i-1$, így $i-1 \ge k$, azaz $i \ge k+1$.

K_{n-i} gráf élei

$$\binom{k+1}{2} + \binom{n-(k+1)}{2} < |E(G)| \le \binom{i}{2} + \binom{n-i}{2} =$$

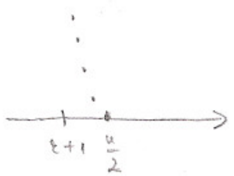
behúztunk még élet ⇒ ennyi éle lett a K_i gráfnak

$$= f(i) = \frac{i(i-1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i-1)}{2} = \frac{i^2-i}{2} + \frac{n(n-1) - ni - in + i^2 + i}{2} = i^2 - ni + \frac{n^2-n}{2}$$

⇒ a valós számokra kiterjesztve ennek a képe egy normál állású parabola.

$$k+1 \le i \le \frac{n}{2}$$

$$= \left(i - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4} + \frac{n^2-n}{2} \le f(k+1) = \binom{k+1}{2} + \binom{n-(k+1)}{2}$$



↯

$$\binom{k+1}{2} + \binom{n-(k+1)}{2} \le |E(G)|$$

önmagánál szigorúan kisebb

ellentmondás oka: , hogy feltettük: G nem összefüggő.

A gráf összefüggőségének erősségét az élösszefüggőségi és pontösszefüggőségi számmal jellemezzük.

Def.: Egy G gráfot n-szeresen élösszefüggőnek nevezzük, ha van olyan n éle, amelyeket a gráfból törölve (de végpontjaikat nem) már nem összefüggő gráfot kapunk, de n-nél kevesebb élt törölve a gráf még összefüggő marad.

Def.: Egy G gráfot n-szeresen pontösszefüggőnek nevezzük, ha van olyan n pontja, amelyeket a rájuk illeszkedő élekkel együtt a G-ből elhagyva a kapott gráf már nem összefüggő, de n-nél kevesebb pontot kitépve a kapott gráf még összefüggő marad.

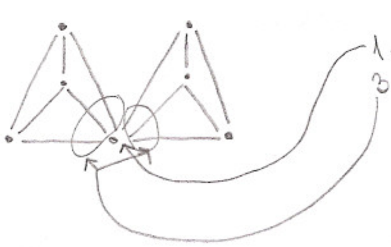
példa: (K_4 teljes gráf)

a)

1-szeresen pontösszefüggő.

1-szeresen élösszefüggő. (ezt az élet kitépve)

b)



1-szeresen pontösszefüggő.
3-szorosan élösszefüggő.

Mj.: K_n (n csúcspontú teljes gráf)

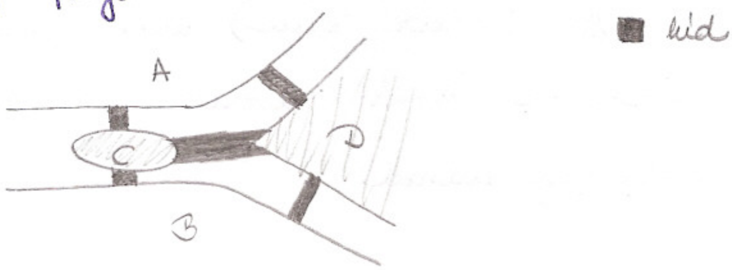
pl.:

(n-1)-szeresen élösszefüggő
viszont akárhány pontot tépünk ki belőle a kapott gráf összefüggő marad.

A gráfok bejárása

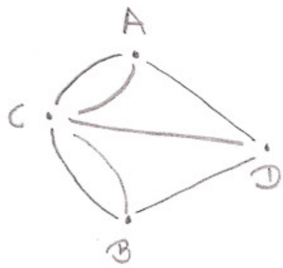
Euler (1736) Königsbergi hidak problémája

Pregel folyó



Egy königsbergi polgár tud-e olyan sétát tenni a városban, hogy minden hídon pontosan egyszer menjen át?

Átfogalmazva:



Lerajzolható 1 vonallal?

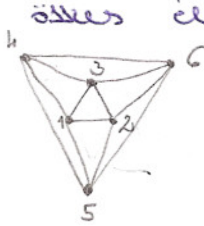
NEM!

Zárt Euler vonal:

A G gráf zárt Euler vonalának nevezzük a gráf összes élét tartalmazó zárt élsorozatot. (G minden élét csak egyszer tartalmazza.)

Nyílt Euler vonal:

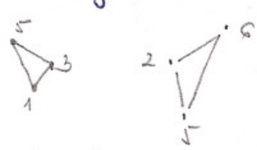
A G gráf nyílt Euler vonalának nevezzük a gráf összes élét tartalmazó nyílt élsorozatot.



1 2 3 6 5 1 folyt. ⇒

3 4 1

2 5 6 2 → 1 2 5 6 2 3 6 4 5 1 3 4 1



10. előadás XI. 24.

Tétel: Egy izolált ponttól mentes G gráfnak $\Leftrightarrow$ $\exists$ zárt Euler-vonala, ha G összefüggő és $\forall$ csúcsának a foka páros

Biz.: 1; Tfh. G izolált ponttól mentes, összefüggő és minden csúcsának a foka páros. Az A_1 pontból ki-indulva kezdjük el bejárni a gráf éleit. Töröljük a gráfból a már bejárt éleket, így a maradék gráfban az A_1 pont és annak a pontnak a foka páratlan, ahol éppen vagyunk, a többi csúcsé páros. Ez a bejárás csak az A_1 pontban érhet véget (hiszen, ha páratlan a fokszám $\Rightarrow$ abból a csúcsból még legalább egy bejáratlan él vezet el egy másik csúcsba.

Egy zárt vonalat kaptunk. Ha ez még nem tartalmazza a gráf összes élét $\Rightarrow$ a maradék gráf ~~egy~~ csúcsai fokszámai párosak. A bejárás során már érintett egy pontból kezdjük el bejárni a maradék gráf egy komponensének éleit. Így egy újabb zárt vonalat kapunk. Ezt egyesíthetjük az előző zárt vonallal. Ha még mindig maradtak bejáratlan élei a G gráfnak, $\Rightarrow$ az eljárást véges sokszor megismételve a G egy zárt Euler-vonalát kapjuk.

2., Tfh: G izolált ponttól mentes ~~G~~ gráfnak ∃ zárt Euler-vonala.

$A_1 \dots x \dots x \dots x \dots A_1$

Mivel a G-nek nincs izolált pontja, ezért a zárt Euler-vonalban ∀ két csúcsot felsoroltunk, ezért G nyilván összefüggő gráf.

Ha az x csúcs a zárt Euler-vonalban m-szer szerepel ⇒ az x fokszáma G-ben 2m. (A_1 fokszáma, ha m-szer fordul elő a zárt Euler-vonalban $2(m-1)$)

Tétel: Egy izolált ponttól mentes G gráfnak ⟺ ∃ nyílt Euler-vonala, ha a gráf összefüggő, és pontosan két csúcsa páratlan fokszámú, a többi páros.

Biz.: 1., Tfh. G izolált ponttól mentes, összefüggő gráf, és pontosan két csúcsának a foka páratlan. Kössük össze egy pótéllel a két páratlan fokszámú csúcsot! A kapott G' gráf izolált ponttól mentes, összefüggő, és minden csúcsának a foka páros, ezért az előző tétel alapján a G'-nek ∃ zárt Euler-vonala. Ebből a pótélt elhagyva az eredeti G gráf egy nyílt Euler-vonalát kapjuk.

2., Tfh. G izolált ponttól mentes ~~G~~ gráfnak ∃ nyílt Euler-vonala

$A_1 \dots x \dots x \dots A_n$

Mivel G-nek nincs izolált pontja ⇒ a nyílt Euler-vonalban ∀ két csúcsot felsoroltuk, így G nyilván összefüggő gráf.

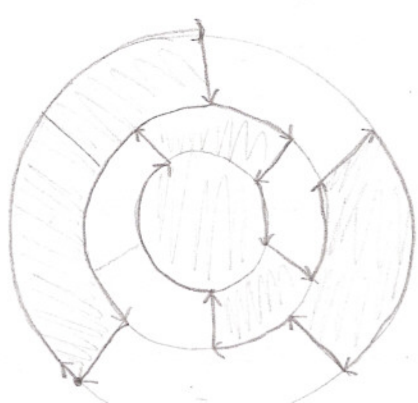
Az A_1 és A_n fokszáma páratlan lesz. Ha x m-szer fordul elő belső pontként a nyílt Euler-vonalban ⇒ a fokszáma $2m$.
Az A_1 és A_n végpontok fokszámai pedig ~~kétsz~~ $2s-1$, ha s-szer fordultak elő a nyílt Euler-vonalban.

Mj.: Ha egy összefüggő gráfnak $2k$ számú páratlan pontja van ⇒ a gráf előállítható k db élidegen (nincs közös pontja) vonal egyesítéseként.

Biz.: Kössük össze k db pótéllel páronként a két k számú páratlan fokú csúcsot. A kapott G' gráf összefüggő, és minden csúcsának a foka páros ⇒ van zárt Euler-vonala. Ebből elhagyva a k db pótélt, a gráfot előállítottuk k db élidegen vonal egyesítéseként.

Hamilton körök

1859 Dodekaéder (focilabdára hasonlító test)
Olyan körutat kell keresni, mely az összes várost tartalmazza pontosan egyszer.



Def.: Egy n szögpontú G gráf Hamilton körének nevezzük a gráf összes csúcsát tartalmazó körét.

Def.: Egy n szögpontú G gráf Hamilton útjának nevezzük a gráf összes csúcsát tartalmazó útját.

Tétel: Ha egy összefüggő G gráf k csúcsát kitépve a maradék gráf legalább k+1 komponensű ⇒ nincs Hamilton köre, ha pedig legalább k+2 komponensű ⇒ nincs Hamilton útja sem.

Biz.: Tfh. a G gráf valamely k csúcsát kitépve a maradék G' gráf legalább k+1 komponensű, és G-nek mégis van K-val jelölt Hamilton kör. A K-ból a k db pont elhagyásával kapott gráfot jelölje K'. K' komponenseinek száma $\leq k$ (legfeljebb k komponensű). G' komponenseinek száma $\leq$ K' komponenseinek számával

Tudjuk: $V(G') = V(K')$; $G' \supseteq K'$

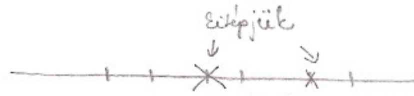
$\rightarrow k+1 \leq$ G' komp. száma $\leq$ K' komp. száma $\leq k$

↯

$k+1 \leq k$

Tfh.: a G gráf valamely k csúcsát kitépve a maradék G' gráf legalább k+2 komponensű, és G-nek mégis van S-sel jelölt Hamilton útja. Az S-ből k db pont elhagyásával kapott gráfot jelölje S'.

S' komponenseinek a száma



1: 2 db
2: 3 db
3: 4 db

$k \Rightarrow k+1$ db

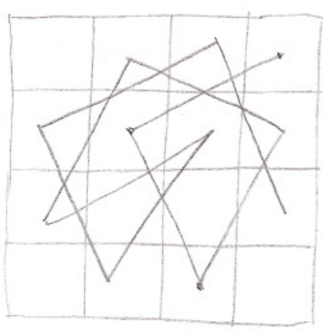
$k+2 \leq$ G' komp. száma $\leq$ S' komp. száma $\leq k+1$

$v(G') = v(S')$; $G' \supseteq S'$

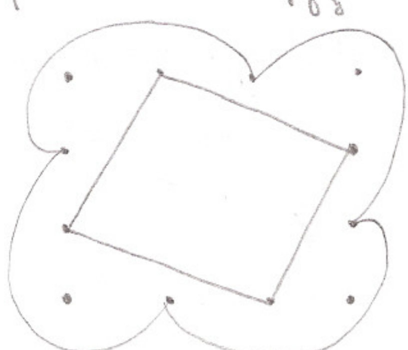
$k+2 \leq k+1$ ↯

Feladat:

Be tudunk-e járni egy 4×4-es sakktáblát lóugrással, úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk



Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai a 16 mező. 2 csúcs ⇔ szomszédos, ha lóugrásnyira vannak egymástól. A sarokból 2, szélről 3, belső pontból 4 helyre lehet ugrani. A 4 belső pontot elhagyjuk.



$k=4$

A maradék gráf $6 = k+2$ komponensű, így az előző példa alapján nincs Hamilton köre, ~~sőt~~ sőt, Hamilton útja sem. Így a 4×4-es sakktábla nem járható be lóval úgy, h. minden mezőt pontosan egyszer érintünk.

Tétel: (Dirac Gábor)

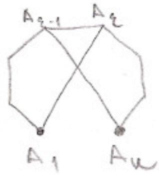
Ha egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka $\geq \frac{n}{2}$ akkor a gráfnak van Hamilton köre. $(n \geq 3)$

Biz.:

A K_n gráfnak $\exists$ Hamilton köre. Pl.: $A_1, A_2 \dots A_n A_1$ ilyen.

Indirekt:

Tfh. G olyan n csúcspontú egyszerű gráf, amelyben $\forall$ pont foka $\geq \frac{n}{2}$ és mégsincs Hamilton köre. Húzzunk be további éleket a G gráfba mindaddig, míg a kapott egyszerű gráfnak továbbra sem lesz Hamilton köre. Így véges sok lépésben egy olyan G' gráfot kapunk amelyben $\forall$ két nem szomszédos pontot, ha összekötnénk $\Rightarrow$ már Hamilton kört kapunk. Feltehető, hogy az $A_1 A_n$ él hiányzik a G-ből, tehát ha behúznánk $\Rightarrow$ egy Hamilton kört kapnánk. Ha A_1 szomszédos A_k-val $\Rightarrow A_n$ nem lehet szomszédos A_{k-1}-gyel, mert különben G' tartalmazná az $A_1 A_k \dots A_n A_{k-1} \dots A_1$ Hamilton kört. Ha $d(A_i)$ jelöli az i-dik csúcs fokszámát G'-ben $\Rightarrow$ $d(A_n) \leq n-1-d(A_1)$



$$n = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \leq d(A_n) + d(A_1) \leq n-1$$

újabb éleket húztunk be, tehát a fokszám csak növekedhetett

$\lightning$

$$n \leq n-1$$

Fagráfok

Def: Egy gráfot fagráfnak (fa) nevezünk, ha összefüggő, és körmentes. Erdőnek (liget) nevezzük azokat a gráfokat, amelyek minden komponense fa.

Tétel: Az $n \geq 2$ nögpontú G gráfra vonatkozó alábbi állítások (5 állítás) egymással páronként ekvivalensek.

1) G összefüggő és körmentes.

2) Ha $n=1 \Rightarrow G$ izomorf K_1-gyel $(G \cong K_1)$ Ha $n \geq 2 \Rightarrow \forall$ két pontját pontosan egy út köti össze.

3) Ha $n=1 \Rightarrow G$ izomorf K_1-gyel. Ha $n \geq 2 \Rightarrow \forall$ élét elhagyva két komponensű gráfot kapunk.

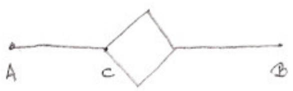
4) G összefüggő és $n-1$ éle van.

5) G körmentes és $n-1$ éle van.

Biz.:

1⇒2. G összefüggő és körmentes. Ha $n=1$ ⇒ a körmentesség miatt nincs éle, így éleinek száma: $E(G)=0=1-1$. $G\cong K_1$

Ha $n\geq 2$, akkor Ifh: ∃ olyan A és B csúcsa a G-nek, amelyet két különböző út köt össze. Ekkor a két út egyesítésével kapott zárt élsorozatból kiválasztható kör. Ellentmondás a G körmentességének.



⇓

2.

2⇒3.: $n=1$ ✓

Ha $n\geq 2$ ⇒ G ∀ két csúcsát egyetlen út köti össze. ⇒ G összefüggő. Ha elhagyjuk a G gráf {A,B} élét ⇒ mivel ez volt az egyetlen út A és B között, ezért A és B a maradék $G'=G-\{A,B\}$ gráf különböző komponenseiből való. Legyen $C\in V(G')=V(G)$. Ekkor ∃ az A-t a C-vel összekötő út G-ben. Ha ez nem tartalmazza az {A,B} élet ⇒ ez út G'-ben is, így C az A-val egy komponensből való. Ha ez az út tartalmazza az {A,B} élet ⇒ ezt elhagyva B-t a C-vel összekötő G'-beli utat kapunk, és így C a B-vel egy komponensből való. ⇒ G' pontosan 2 komponensű.

3⇒4., Ha $n = 1 \Rightarrow G \cong K_1$. Ha $n \geq 2 \Rightarrow$ összefüggő és $\forall$ élét elhagyva a maradék gráf 2 komponensű. n-re vonatkozó teljes indukció.

$n = 1$. $|E(K_1)| = |V(K_1)| - 1$ ✓   1 csúcs, 0 db él

$n = 2$. $\Rightarrow |E(G)| = 2 - 1 = 1$ ✓

Tfh a 3., tulajdonságú legfeljebb $n-1$ $(n \geq 2)$ csúcsú gráfokra igaz az állítás, azaz összefüggőek és eggyel kevesebb élük van mint csúcsuk.

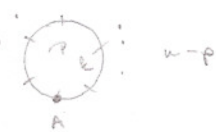
Hagyjuk el a G gráf egy $\{A, B\}$ élét. A maradék gráf két komponensét jelölje G_1 illetve G_2. Ezekre alkalmazva az indukciós feltevést $|E(G_1)| = |V(G_1)| - 1$, $|E(G_2)| = |V(G_2)| - 1$. Így $|E(G)| = 1 + |E(G_1)| + |E(G_2)| = 1 + |V(G_1)| - 1 + |V(G_2)| - 1 = n - 1$

4⇒5., G összefüggő és $|E(G)| = n-1$

↳ nem kell bizonyítani most, mert itt is szerepel.

Elegendő belátni, hogy G körmentes.

Indirekt: Tfh.: G összefüggő, $|E(G)| = n - 1$ és $\exists$ $K \subset G$ kör, melynek p éle és p csúcsa van. $\Rightarrow$ A kör egy tetszőleges



A pontjába a maradék gráf minden $(n-p)$ pontjából indul út. Tehát a G gráf éleinek száma legalább $p + (n-p) = n \Rightarrow$ ellentmond az $|E(G)| = n-1$ feltételnek.

$5 \Rightarrow 1.$, G körmentes és $n-1$ éle van.

Tegyük fel, hogy G komponensei $G_1, G_2 \dots, G_k$ $k \geq 1$.

A G_i komponens ($1 \leq i \leq k$) összefüggő és körmentes, így teljesül rá az 1., feltétel, de $\Rightarrow$ 2, 3, 4, is, azaz $|E(G_i)| =$
$= |V(G_i)| - 1$ $i = 1, 2 \dots k$ $\Rightarrow \underline{\underline{n-1}} = |E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E(G_i)| =$
$= \sum_{i=1}^{k} (|V(G_i)| - 1) = \underline{\underline{n-k}}$ $= k = 1$ azaz G összefüggő.

Ha G egy n szögpontú fa ($n \geq 2$) $\Rightarrow$ G páros gráf.

Biz.: Legyen A_1 egy tetszőleges szögpontja G-nek. Az előző tétel 2. pontja alapján A_1-ből minden $A_i \in V(G)$ ($1 \leq i \leq n$) pontba pontosan egy út vezet. Legyen $A_i \in A$ illetve $A_i \in B$ aszerint, hogy $A_1 \dots A_i$ út páros vagy páratlan élből áll. Innen könnyen látható, hogy G egy A, B pontosztályú páros gráf.

Tétel: A $d_1 \dots d_n$ ($n \geq 2$) pozitív egész számokhoz $\Leftrightarrow \exists$ olyan n szögpontú fa, melynek fokszámsorozata éppen $d_1, d_2 \dots d_n$, ha $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot (n-1)$

Biz.: a, Ha $d_1 \dots d_n$ egy n szögpontú G fa fokszámsorozata $\Rightarrow$
$\sum_{i=1}^{n} d_i = |E(G)| = n-1$. ✓

b, n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

Legyen $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$

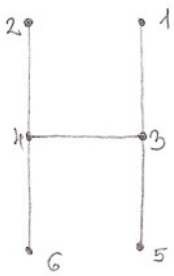
Ha $n = 2 \Rightarrow d_1 + d_2 = 2 \Rightarrow d_1 = d_2 = 1$ $G \cong t_2$

Tfh.: $n \geq 3$ és ha $d_1' \dots d_{n-1}' \in \mathbb{Z}^+$, $\sum_{i=1}^{n} d_i' = 2(n-2) \Rightarrow \exists$ olyan $n-1$ szögpontú G' gráf, melynek fokszámai $d_1' \dots d_{n-1}'$.

$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$-ből következik, hogy $\exists$ a $d_1 \dots d_n$ számok között 1-es. Ugyanis különben $2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n$. Feltehető, hogy $d_n = 1$. Nem lehet $d_1, \dots d_n$ mindegyike 1-es, mert akkor $\sum_{i=1}^{n} d_i = 1 \cdot n = 2(n-1) \Rightarrow n = 2$, ami ellentmond $n \geq 3$ feltételnek. Feltehetjük, hogy $d_{n-1} \geq 2$.

Legyen $d'_1 = d_1 \dots d'_{n-2} = d_{n-2}$, $d'_{n-1} = d_{n-1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} d'_i = \overset{2(n-1)-2}{2(n-2)} \Rightarrow \exists G'$ $n-1$ szögpontú fa, amelynek fokszámsorozata $d_1 \dots d_{n-2}, d_{n-1}$. Egészítsük ki ezt a fát az n. csúccsal és az n. csúcsot az $n-1$ edik csúccsal összekötő éllel. Az így kapott G fagráf fokszámsorozata éppen $d_1 \dots d_n$.

Prüfer kód



	b_k	a_k (szomszéd)
1	1	3
2	2	4
3	5	3
4	3	4
5		
6		

$\rightarrow$ Prüfer kód

kitépjük a legkisebb csúcsot.

Def: Legyen $V = \{1, 2 \dots n\}$ 1 n szögpontú $n \geq 3$ T fa csúcshalmaza. A T fa Prüfer kódjának nevezzük azt az $a_1 \dots a_{n-2}$-vel jelölt $n-2$ tagú sorozatot, amelynek tagjait a következő eljárás szolgáltatja: Jelölje b_1 a $T_1 = T$ fa elsőfokú csúcsai közül a legkisebbet, a_1 a b_1 szomszédját T_1-ben, T_2 a b_1 csúcs T_1-ből való kitépésével (ami az $\{a_1, b_1\}$ él elhagyását is jelenti) kapott gráfot. T_2 egy $n-1$ szögpontú fa. Általában $k = 1, 2 \dots n-2$-re jelölje b_k a T_k fa elsőfokú csúcsai közül a legkisebbet, a_k a b_k szomszédját, a T_k fában, és T_{k+1} a b_k szögpontnak a T_k fából (az $\{a_k, b_k\}$ éllel együtt) való kitépésével kapott gráfot. (ami szintén fa)

Megj.: A T_k fa Prüfer kódja: $a_k, a_{k+1} \dots a_{n-2}$ $k = 1, 2 \dots n-2$

Tétel: A T $n(\geq 3)$ szögpontú fa Prüfer kódjában az i $(1 \leq i \leq n)$ szám $d(i)-1$-szer szerepel, (ahol d_i az i csúcs fokszámát jelöli a T gráfban).

Biz.: Alkalmazzuk a Prüfer kód definíciójában szereplő jelöléseket! A T_k $(1 \leq k \leq n-2)$ $n+1-k$ (≥ 3) szögpontú fában elsőfokú pont nem lehet elsőfokú pontnak szomszédja. Így az elsőfokú i pontokra igaz az állítás, mert 0-szor szerepelnek a T Prüfer kódjában. Ha az i fokszáma legalább 2, a $T = T_1$ fában $\Rightarrow$ a $T_1, T_2, \dots T_{n-1}$ sorozatban figyelve az i fokszámának változását, az i T_{k+1} beli fokszáma $\Leftrightarrow$ eggyel kisebb, mint az i T_k-beli fokszáma, ha $i = a_k$. Tehát az i T_1-beli d_i fokszáma egészen egyig csökken egyesével, és minden ilyen fokszám csökkenésnél a Prüfer kód megfelelő tagja $=$ i-vel. Így az i valóban d_i-1-szer fordul elő a $T=T_1$ fa Prüfer kódjában.

Prüfer kód: 3 4 3 4

	b_k	a_k
1	1	3
2	2	4
3	5	3
4	3	4
5		
6		

Tétel: A T, n $(n \geq 3)$ szögpontú fát egyértelműen meghatározza a $V = \{1, 2 \dots n\}$ csúcshalmaza és $a_1, a_2 \dots a_{n-2}$ Prüfer kódja.

XII. 15.

12. előadás

Biz.: Elegendő meghatároznunk a T élhalmazát, ha $T=T_1$ fa prüfer kódja definíciója alapján az ott bevezetett jelöléseket használva: Az előző tételből

$b_1 = \text{minimuma}(\{1; \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, A_{n-2}\})$

$k=2, \dots n-2,\ b_k = \min((\{1, \dots, n\} \setminus \{b_1, \dots, b_{k-1}) \setminus \{a_k, \dots a_{k-2}\})$

Az n szögpontú fának n-1 éle van a $\{b_k, a_k\}$ $k=1,2 \dots n-2$ élek és a Prüfer kód képzésekor megmaradó $\{1,2 \dots n\} \setminus \{b_1, \dots b_{n-2}\}$ él.

Tétel: (Cayley-tétel")

A $V=(1,2 \dots n)$ csúcshalmazú különböző számozott fagráfok száma n^{n-2}.

Mj.: Az azonos V csúcshalmazú fákat itt különbözőknek tekintjük, ha élhalmazaik különbözőek. Tehát akkor is különbözőeknek tekintjük őket, ha izomorfak. Az n pontú, nem izomorf fák számára nincs ismert képlet

Biz.: Az előző tételből adódban különböző n szögpontú fákat egyértelműen meghatározzák Prüfer kódjaik. Ez utóbbiak pedig azonosak az $1,2 \dots n$ számok $(n-2)$-ed osztályú ismétléses variációival, így számuk:

$$V_n^{n-2,i} = n^{n-2}$$

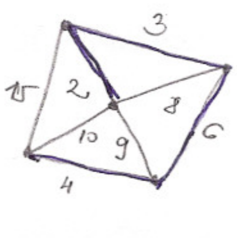
Minimális költségű kifeszítő fa keresése

Def.: Egy összefüggő gráf kifeszítőfájának nevezzük a gráf minden pontját tartalmazó fa részgráfját.

Mj.: kifeszítőfa létezik, ha a gráfban ∃ kör akkor annak 1 élét elhagyva a gráf összefüggő marad. Ezt ismételve végül a gráf egy kifeszítőfájához jutunk.

Feladat:

5 falu elhatározza, hogy regionális vízművet hoznak létre. Az egyik faluban kutat fúrnak, a falvak között vezetékrendszert fektetnek le.



Az alábbi ábra mutatja a tervet. Az egyes vezetékek melletti számok az építési költségek valamilyen pénzegységben. Mely vezetékeket építsék meg, h. minden faluba eljusson a víz, de az összköltség minimális legyen.

gráfos megfogalmazás: Adott 1 n pontú összefüggő gráf, melynek minden éléhez hozzárendeltünk egy pozitív valós számot, egy költséget. Meghatározandó a gráfnak egy részgráfja, amely összefüggő, a gráf minden pontját tartalmazza és az előbbi feltételek mellett költsége minimális.

Mj.: A keresett részgráfban nincs kör, így kifeszítőfa.
Ha az élekhez rendelt költségek csupa különböző pozitív valós számok, ⇒ a legolcsóbb kifeszítőfát a köv. algoritmus szolgáltatja. Kiválasztjuk a legolcsóbb élt, ezután ismételten a még ki nem választott élek közül a legolcsóbb olyat választjuk, amely a kiválasztott élek által alkotta részgráfban nem hoz létre kört. (MOHÓ ALGORITM)

Síkbeli v. síkba rajzolható gráfok

Def.: Egy gráfot síkba rajzolhatónak mondunk, ha izomorf egy olyan gráffal, melynek szögpontjai egy síkban vannak és semelyik kettő két-két csúcsot összekötő síkbeli vonalnak nincs közös belső pontja.

Minden síkgráf a síkot páronként közös belsőpont nélküli tartományokra bontja. Ha a gráf összefüggő síkgráf, ⇒ a tartományok közül az egyik nem korlátos, a többi tartományt pedig olyan körök határolják amelyeknek nem nemnéldes(?) szögpontjait vagy nem köti össze él, vagy ha igen, az a kört nem darabolja ketté. (Minimális körök)

Tétel: (Euler)

Legyen a síkbeli összefüggő ~~g~~ G gráf csúcsainak száma c, éleinek száma E, és a G síkot L db tartományra bontja. Ekkor $c-E+L=2$.

Biz: L-re vonatkozó teljes indukcióval.

$l=1$ ⇒ a ~~g~~ G összefüggő gráfban nincs kör ⇒ G fagráf

$e=c-1$ $\qquad c-E+L=c-(c-1)+1=2$ ✓

Tfh: $l\geq 2$ és ∀ összefüggő $l-1$ tartományú síkgráfra teljesül az állítás. Ekkor tekintsük az eredeti G gráfot. Mivel $l\geq 2$ van legalább 1 köre. Ennek egy élét elhagyva olyan gráfot kapunk, aminek c csúcsa, $e-1$ éle és $l-1$ tartománya van.

$$c-(e-1)+l-1=2 \Rightarrow \underline{c-e+l=2}$$ ✓

1. következmény: A K_5 nem síkgráf

Biz: indirekt Tfh K_5 síkgráf. Mivel K_5 összefüggő is, ezért az előző tételt alkalmazva:

$c=5$, $e=\binom{5}{2}=10$ $\qquad l=2-c+e=2-5+10=7$

Járjuk körbe a tartományt az őt határoló ~~tarto~~ élek mentén. ∀ él (2x járjuk) → $20=2e\geq l\cdot 3$

↓ a legkisebb kör és 3 élű

$20=2e\geq l\cdot 3=21$

↯

2. Következmény:

A $K_{3,3}$ nem síkgráf.

Biz.: indirekt

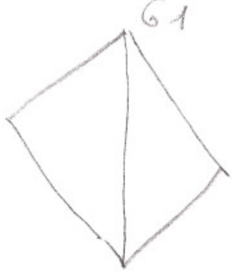
Tfh.: $K_{3,3}$ síkgráf. $\Rightarrow$ az előző tételt (Euler) használva

$c = 6\ (2\cdot 3)$ $\quad e = 3\cdot 3 = 9$ $\quad \ell = 2 - c + e = 2 - 6 + 9 = \underline{\underline{5}}$

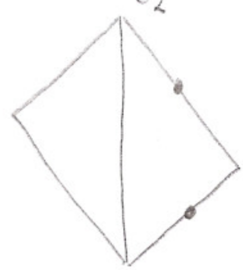
$$18 = 2e \geq 4\ell = 20 \ \lightning$$

Páros gráf minden köre páros sok élet tartalmaz.

G1



G_2



Def: Két gráfot G_1-et és G_2-t topologikusan izomorfak-nak nevezzük, a másodfokú pontok létesítése vagy letörlése ismételt alkalmazásával egymásba átvihetők. (Ha G_1 síkbeli $\Rightarrow$ G_2 is az.)

Tétel (Kuratowski)

Egy gráf $\Leftrightarrow$ síkbeli gráf, ha nem tartalmaz ~~ko~~ részgráfként a K_5 gráffal, vagy a $K_{3,3}$ gráffal topologikusan izomorf gráfot.