4. előadás

Biz: A biz-t egy n-edrendű det. első sorára fogjuk elvégezni. Bármely sora a bizonyítás hasonlóan történik.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{(1)}{a_{11}} + \overset{(2)}{0} + \overset{(3)}{0} + 0 \ldots + \overset{(n)}{0} & \overset{(1)}{0} + \overset{(2)}{a_{12}} + \overset{(3)}{0} + \ldots + \overset{(n)}{0} & \ldots & \overset{(1)}{0} + \overset{(2)}{0} + \ldots + \overset{(n)}{a_{1n}} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

↳ a_{11}-hez tart. adj. aldet.

$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} \cdots + a_{1n} A_{1n}$ → az első sor elemei rendre meg vannak szorozva a hozzájuk tartozó adj. aldet-sal.

Pl: Hat. meg a kifejtési tétellel a köv. det. értékét!

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{2.\text{ sor szerint}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Tétel: (Ferdekifejtési tétel)

Ha egy det. valamelyik sorának minden egyes elemét megszorozzuk egy másik sor megfelelő elemeihez tartozó adj. aldet-sal és ezeket a szorzatokat összeadjuk, akkor 0-t (zérust) kapunk.

Biz.:

Tekintsük a köv. det.-t!

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + \dots a_{2n} \cdot A_{1n} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{1 \text{ sor szerint}}{=} a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + \dots + a_{2n} \cdot A_{1n} = 0$$

ha egy det két sora $=$, $\Rightarrow$ a det értéke 0.

Mj.: A biz. bármely sorra hasonlóképpen végezhető el.

Tétel: (Laplace-féle kifejtési tétel)

Déf.: Ha egy n-edrendű det-ból kiválasztunk k sort és k oszlopot ($1 \leq k < n$, legyenek $\underbrace{i_1, i_2 \dots i_k}_{\text{sor}}$ és $\underbrace{j_1, j_2 \dots j_k}_{\text{oszlop}}$), akkor e sorok és oszlopok találkozásánál elhelyezkedő elemek meghatároznak egy k-adrendű det-t. Ezt a det.-t az adott n-edrendű det. egy k-adrendű aldet-ának nevezzük.

Pl.:
$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

↳ a negyedrendű det. 2-odrendű ald.-nak nevezzük.

Déf.: Legyen egy n-edrendű det-nak M egy k-adrendű aldeterminánsa. Azt a det-t, amely az n-edrendű det-ból M aldet sorainak és oszlopainak elhagyása után kapunk, az M k-adrendű det komplementer-det-ának nev. és M'-vel jelöljük.

Pl.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad M = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad M' = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Def.: Legyen egy n-edrendű det-nak M k-adrendű aldet.-a. A $(-1)^{i_1+i_2+\dots i_k+j_1+j_2+\dots j_k} \cdot M'$ det-t az M k-adrendű aldet-~~nak~~t, adj. aldet-nak nevezzük (röviden: adjungált)

Laplace-tétel

Ha egy n-edrendű det-ból kiválasztunk k sort v. k oszlopot $(1 \leq k < n)$, és ezen kiválasztott sorokban v. oszlopokban található valamennyi k-adrendű ald-t megszorozzuk a saját adj aldet-ukkal, és ezek a szorzatokat összeadjuk, akkor a det. értékét kapjuk.

Mj.: A Laplace tétel speciális esete a kifejtési tétel.

$k=1$ esetén

Pl.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} (-1)^{2+4+2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} +$$

$k := 2$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+4+5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Akkor célszerű alkalmazni, ha a det. 0-kat tartalmaz.

Két det. szorzata bomló det.

Det-ok szorzása

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|_n \,, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} = |b_{ij}|_{\underset{\text{m-ed rendű}}{\underset{\downarrow}{m}}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ * & * & \dots & * & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ * & * & \dots & * & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}_{n+m} = |a_{ij}|_n \cdot |b_{ij}|_m = |a_{ij}| \cdot (-1)^{2(1+2\dots n)} |b_{ij}|_m$$

ahol a $*$ helyén $\forall$ T-beli elem állhat.

Laplace tételéből következik ez az állítás.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Det szorzása:

Tekintsük $|a_{ij}|_n$ és $|b_{ij}|_n$ $\quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$

$$|a_{ij}|_n \cdot |b_{ij}|_n = |c_{ij}|_n \quad \text{, ahol} \quad c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{tj}$$

Biz: Képezzük a köv det-t!

$$|a_{ij}|_n |b_{ij}|_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots 0 & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

Az első oszlop b_{11} x-esét adjuk hozzá az $n+1$-dik oszlophoz. A 2. oszlop b_{21}-szeresét adjuk hozzá az $n+1$-dik oszlophoz. Az n. oszlop b_{n1} x-esét is adjuk hozzá az $n+1$. oszlophoz. Majd az első oszlop b_{12} x-esét adjuk hozzá az $n+2$. oszlophoz. A 2. oszlop b_{22} x-esét adjuk hozzá az $n+2$. oszlophoz. Az n. oszlop b_{n2} x-esét adjuk hozzá az $n+2$. oszlophoz. ..stb. Végül az 1. oszlop b_{1n}-x-esét, a 2. oszlop b_{2n} x-esét ..., az n. oszlop b_{nn} szeresét az utolsó oszlophoz adjuk. Ezáltal a köv. det-hoz jutunk.

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

ahol
$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \dots + a_{1n} b_{n1} = \sum_{t=1}^{n} a_{1t} \cdot b_{t1}$$
$$\vdots$$
$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{tj}$$
$$\vdots$$
$$c_{nn} = a_{n1} \cdot b_{1n} + a_{n2} b_{2n} + \dots + a_{nn} \cdot b_{nn} = \sum_{t=1}^{n} a_{nt} \cdot b_{tn}$$

Az utóbbi det. $n+1$. sorát n db szomszédos sorcserével vigyük fel az első sorba. Az $n+2$. sorát ugyancsak n szomszédos sorcserével a 2. sorba. stb. Végül a det. utolsó sorát ugyancsak n szomszédos sorcserékkel vigyük fel az n-dik sorba.

Így a köv. det.-hoz jutunk.

$$= (-1)^{n+n+\dots+n} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^{n^2+n}}_{2 \mid \oplus} \cdot |c_{ij}|_n = |c_{ij}|_n$$

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{tj}$$

Pl.:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

kiegészítjük: $1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

5. előadás

Mátrix inverze. A mátrix rangja.

Def.: $A_{n\times n}$ T test fölötti mátrixnak inverze a $B_{n\times n}$ T test fölötti mátrix, ha $A_{n\times n}\cdot B_{n\times n} = B_{n\times n}\cdot A_{n\times n} = E_{n\times n} = (\delta_{ij})_{n\times n}$

jelölése: $A^{-1}_{n\times n} = B_{n\times n}$

Csak négyzetes v. quadratikus mátrixnak lehet inverze.

Tétel: Egy T test fölötti quadratikus mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha a mátrix determinánsa nem $\emptyset$.

Mj.: Egy quadratikus m-ot reguláris mátrixnak nevezünk, ha a mátrix determinánsa nem 0. Ellenkező esetben a mátrixot szinguláris mátrixnak hívjuk.

Biz.: 1, Legyen $A_{n\times n}$, $A^{-1}_{n\times n} = B_{n\times n}$

$\downarrow$ T test fölötti $\downarrow$ T test fölötti

Megmutatjuk, hogy $|A_{n\times n}| \neq 0$.

$$A_{n\times n}\cdot B_{n\times n} = B_{n\times n}\cdot A_{n\times n} = E_{n\times n}$$

Képezzük ezek determinánsát.

$$|A_{n\times n}\cdot B_{n\times n}| = |B_{n\times n}\cdot A_{n\times n}| = |E_{n\times n}|$$

$$|A_{n\times n}||B_{n\times n}| = |B_{n\times n}||A_{n\times n}| = |E_{n\times n}| = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |A_{n\times n}| \neq 0$ (ha 0 lenne, nem lehetne a szorzat 1.)

2, Legyen $A_{n\times n}$ T test fölötti mátrix

$|A_{n\times n}| \neq 0$.

Megmutatjuk, hogy $A_{n\times n}$-es mátrixnak $\exists$ inverse.

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix},\qquad |A_{n\times n}|=\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

Képezzük a következő mátrixot!

$$\frac{1}{|A_{n\times n}|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

A_{ij}: a mátrix det-nak a_{ij} elemhez tartozó adj. aldet-a.

$(i,j=1,2\dots n)$

A mátrixnak képezzük a transzponáltját!

$$\frac{1}{|A_{n\times n}|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{|A_{n\times n}|} & \frac{A_{21}}{|A_{n\times n}|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A_{n\times n}|}\\ \vdots & & & \\ \frac{A_{1n}}{|A_{n\times n}|} & \frac{A_{2n}}{|A_{n\times n}|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A_{n\times n}|}\end{pmatrix}$$

Azt állítjuk, hogy ez a mátrix az adott $A_{n\times n}$-es mátrix inverze.

Ezt úgy látjuk be, hogy megmutatjuk, hogy szorzatuk bármilyen sorrendben az $E_{n\times n}$ mátrixot adja.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{|A_{n\times n}|} & \frac{A_{21}}{|A_{n\times n}|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A_{n\times n}|}\\ \frac{A_{12}}{|A_{n\times n}|} & \frac{A_{22}}{|A_{n\times n}|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A_{n\times n}|}\\ \vdots & & & \\ \frac{A_{1n}}{|A_{n\times n}|} & \dots & & \frac{A_{nn}}{|A_{n\times n}|}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|A_{n\times n}|}\begin{pmatrix}a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+\dots+a_{1n}\cdot A_{1n} & a_{11}\cdot A_{21}+a_{12}\cdot A_{22}+\dots+a_{1n}A_{2n} & \dots & a_{11}\cdot A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\dots+a_{1n}A_{nn}\\ \vdots & & & \\ a_{n1}A_{11}+a_{n2}\cdot A_{12}+\dots+a_{nn}A_{1n} & a_{n1}\cdot A_{21}+a_{n2}\cdot A_{22}+\dots+a_{nn}A_{2n} & \dots & a_{n1}\cdot A_{n1}+a_{n2}\cdot A_{n2}+\dots+a_{nn}\cdot A_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}|A_{n\times n}| & \overset{\text{Ferde kif. tétel}}{0} & 0 & \dots & 0\\ 0 & |A_{n\times n}| & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n\times n}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{|A_{n\times n}|}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}=E_{n\times n}$$

Hasonlóképpen megmutatható, hogy ez a mátrix fordított sorrendben szorozva is egységmátrixot ad eredményül.

$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A_{n\times n}|} & \frac{A_{21}}{|A_{n\times n}|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A_{n\times n}|} \\ \vdots & & & \\ \frac{A_{nn}}{|A_{n\times n}|} & \cdots & & \frac{A_{nn}}{|A_{n\times n}|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = E_{n\times n}$$

Tehát:

$$A^{-1}_{n\times n} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A_{n\times n}|} & \frac{A_{21}}{|A_{n\times n}|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A_{n\times n}|} \\ \vdots & & & \\ \frac{A_{n1}}{|A_{n\times n}|} & \frac{A_{2n}}{|A_{n\times n}|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{A_{n\times n}} \end{pmatrix}$$

Ha egy $n\times n$-es mátrix det-a nem 0, akkor létezik inverze, és ezt az inverzet az előzőek szerint állíthatjuk elő.

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Van-e inverze, és ha igen, akkor határozzuk meg.

1, Hat. meg a det-át.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$ Ennek a mátrixnak van inverze.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ +1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & -\frac{4}{16} \\ +\frac{1}{16} & \frac{2}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ +\frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ +\frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Akkor is teljesül, ha:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrix rangja

Def.: Ha egy mátrixból kiválasztunk k sort és k oszlopot ($1 \le k \le \min(m,n)$ m: sorok, n: oszlopok száma), akkor e sorok és oszlopok találkozásánál elhelyezkedő elemek meghatároznak egy $k \times k$-s quadratikus mátrixot, amelynek a det-át az adott mátrix egy k-adrendű aldet-ának nevezzük.

Def.: Egy mátrix rangján (det. rangján) értjük a mátrix zérustól különböző értékű aldeterminánsai rendjének a maximumát.

Másképpen: azt mondjuk, hogy a mátrix rangja „r", ha a mátrixból kiválasztható legalább egy nem 0 értékű r-edrendű aldetermináns, de minden r-nél magasabbrendű kiválasztható aldet. értéke 0.

Példa: Hat. meg a def. alapján a mátrix rangját!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 27 - 36 + 6 - 27 + 36 = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 9 \end{matrix}$$

Emiatt a mátrix rangja nem lehet 3.