Mátrixok

Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal:

Mátrix fogalma: legyen $(T; +; \cdot)$ test (röviden T test)

Def.: a T test $n \times m$ számú elemének n sorba és m oszlopba történő téglalap alakú elrendezését $n \times m$ típusú mátrixnak nevezzük a T test fölött

jel.: $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$ $a_{ij} \in T$

$i = 1, 2 \dots n$
$j = 1, 2 \dots m$

Beszélünk egy mátrix sorairól, oszlopairól, az i-t sorindexnek, a j-t pedig oszlopindexnek nevezzük. Az a_{ij} tehát a mátrix i-dik sorának j-dik eleme.

Ha egy mátrix n sort és n oszlopot tartalmaz, akkor $n \times n$ típusú négyzetes v. kvadratikus mátrixról beszélünk. Gyakran a mátrixokat a részletes kiírás helyett a következőképpen is jelölik:

$$(a_{ij})_{n \times m} = A_{n \times m} = \underset{n \times m}{A} = A$$

Mj.: Tehát a mátrix egy olyan táblázat, melynek elemei a T testből valók.

pl.: befizetési jegyzék

Mj.: Egy mátrix akkor ismert, ha tudjuk milyen alakú, azaz tudjuk a mátrix típusát és azt, hogy a mátrixban az egyes helyeken a T test mely elemei állnak. Azt a mátrixot, amelynek valamennyi eleme 0, nullmátrixnak v. zérusmátrixnak nevezzük.

jele: $\begin{pmatrix} 0, 0 \dots 0 \\ 0, 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0, 0 \dots 0 \end{pmatrix} = (0)_{n \times m}$

Mátrixok

Bármilyen típusú lehet

Def.: $(a_{ij})_{n \times m} = (b_{ij})_{n \times m} \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$
$(i = 1, 2 \dots n \ ; \ j = 1, 2 \dots m)$

(azaz, mátrixok egyenlősége csak azonos típusú mátrixokra értelmezett. Két azonos típusú mátrix akkor és csak akkor egyenlő, ha a két mátrixban a megfelelő helyen álló elemek rendre egyenlők)

Műveletek mátrixokkal:

1, összeadás

Def.: $(a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij})_{n \times m} \overset{\text{def sz.}}{:=} (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m}$
ahol $i = 1, 2 \dots n$, $j = 1, 2 \dots m$.

Csak azonos típusú mátrixokra értelmezett az összeadás. Két azonos típusú mátrixot úgy adunk össze, hogy a megfelelő helyen álló elemeket rendre összeadjuk.

pl.: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ & \vdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ & \vdots & \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$

Az $n \times m$ típusú test fölötti mátrixok körében az összeadás algebrai művelet.

Tétel: Az $n \times m$ típusú mátrixok körében az „+" kommutatív (a,) és asszociatív (b,) tulajdonságú.

Biz.: a, $(a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij})_{n \times m} \overset{\text{def sz.}}{=} (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} =$
$= (b_{ij} + a_{ij})_{n \times m} \overset{\text{d. sz.}}{=} (b_{ij})_{n \times m} + (a_{ij})_{n \times m}$
mert az „+" T-ben komm.

3. b, Hasonlóképpen igazolható, bizonyítható

Mátrix szorzása T - beli elemmel (skalárral)

Legyen $a \in T$

Def.: $a \cdot (a_{ij}) \stackrel{def.}{:=} (a \cdot a_{ij})$

A mátrix minden egyes elemét megszorozzuk a-val.

$(i = 1,2 \dots n \quad ; \quad j = 1,2 \dots m)$

Mj.: - A def. nem tünteti fel a mátrix típusát, mert tetszőleges típusú mátrixra érvényes

- T-beli elemmel (skalárral) úgy szorzunk, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk T-beli elemmel.

pl.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ kvadratikus mátrix

- mátrixnak skalárral való szorzása nem algebrai művelet a mátrixok körében, mert T-beli elemhez és mátrixhoz mátrixot rendel

Tétel: A mátrixok skalárral való szorzására teljesülnek a következő tulajdonságok:

I, $a \cdot (a_{ij}) = (a_{ij}) \cdot a \qquad a \in T$

II, $(a+b)(a_{ij}) = a \cdot (a_{ij}) + b \cdot (a_{ij}) \qquad a, b \in T$

III, $a\left[(a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij})_{n \times m}\right] = a \cdot (a_{ij})_{n \times m} + a (b_{ij})_{n \times m} \qquad a \in T$

IV, $(ab)(a_{ij}) = [b(a_{ij})]\, a = b[a \cdot (a_{ij})] \qquad a, b \in T$

V, $1 (a_{ij}) = (a_{ij}) \qquad 1 \in T$

Biz.: I, V ; a def közvetlen következménye = TRIVIÁLIS

II, $(a+b)(a_{ij}) \stackrel{d.sz.}{=} ((a+b) a_{ij}) = (a \cdot a_{ij} + b a_{ij}) =$

$= (a \cdot a_{ij}) + (b \cdot a_{ij}) \stackrel{d.sz.}{=} a \cdot (a_{ij}) + b (a_{ij})$

III, $a\left[(a_{ij} + b_{ij})_{n \times m}\right]$

IV,

Tétel: Az $n \times m$ típusú T test fölötti mátrixok halmaza az „+"-ra nézve Abel-csoportot alkot.

Biz.: Azt kell belátni, hogy a T test fölötti $n \times m$ típusú mátrixok körében az „+" assz., komm. és invertálható.
Már bizonyítottuk, hogy ezen mátrixok körében az „+" komm. és assz. most már csak azt kell belátni, hogy az „+" invertálható. ehhez kell belátni, hogy a struktúrának van neutrális eleme és minden elemének van inverze.
Tekintsük az $n \times m$ típusú zérusmátrixot. Ez olyan $(a_{ij})_{n \times m} + (0)_{n \times m} = (a_{ij})_{n \times m}$, ezért az $(0)_{n \times m}$ hozzáadva a mátrixot kapja.
Neutrális elem, additív zérus az „+"-ra nézve
$-1\,(a_{ij})_{n \times m} = (-a_{ij})_{n \times m}$
$(a_{ij})_{n \times m}$ mátrix additív inverze a $(-a_{ij})_{n \times m}$, mert
$(a_{ij})_{n \times m} + (-a_{ij})_{n \times m}) = (0)_{n \times m}$
Tehát minden $n \times m$ típusú mátrixnak van additív inverze, ezért a T test fölötti mátrixok körében az „+" invertálható.
Ezzel a tételt bebizonyítottuk

2, Kivonás

Def.: $(a_{ij})_{n \times m} - (b_{ij})_{n \times m} := (a_{ij})_{n \times m} + (-b_{ij})_{n \times m} = (a_{ij} - b_{ij})_{n \times m}$
$(i = 1, 2 \dots n \quad j = 1, 2 \dots m)$

A kivonás csak azonos típusú mátrixokra érvényes.
Két mátrixot úgy vonunk ki, hogy a megfelelő helyen álló elemeket kivonjuk egymásból.

5,

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -8 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3., Szorzás

Def.: $(a_{ij})_{n\times m} \cdot (b_{ij})_{m\times p} := (c_{ij})_{n\times p}$, ahol $c_{ij} = \sum_{t=1}^{m} a_{it} \cdot b_{tj}$ $(i = 1,2 \dots n,\ j = 1,2 \dots m)$

sor-oszlop kompozíció

Mj.: - Két mátrix szorzata csak olyan mátrixokra van értelmezve a def. szerint, ahol a baloldali tényezőnek annyi oszlopa van, amennyi sora a jobb oldalinak.
- szorzat mátrix típusai a bal oldali tényező sorai és a jobb oldali tényező oszlopai számával egyenlő.

- a def szerint a szorzat mátrix i-dik sorának j-dik elemét úgy kapjuk meg, hogy a bal oldali mátrix i-dik sorának elemét rendre megszorozzuk a jobb oldali mátrix j-dik oszlopának elemeivel és ezeket összeadjuk.

pl.: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{m} a_{1t} \cdot b_{t1} & \sum_{t=1}^{m} a_{1t} \cdot b_{t2} & \dots & \sum_{t=1}^{m} a_{1t} \cdot b_{tp} \\ & \vdots & & \\ \sum_{t=1}^{m} a_{nt} \cdot b_{t1} & & \dots & \sum_{t=1}^{m} a_{nt} \cdot b_{tp} \end{pmatrix}$$

pl.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 10 \\ 7 & -6 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

Tétel: A mátrixok szorzására teljesülnek a köv. tulajdonságok.

I. Mátrixok szorzása nem! kommutatív tulajdonságú, sőt, lehet, hogy a mátrixok szorzása fordított sorrendben el sem végezhető a mátrixok típusa miatt. Ha elvégezhető mindkét oldalról a szorzás, akkor sem kommutatív.

pl.:
$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} = \overset{C}{\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$\overset{B}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} = \overset{D}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 26 & 9 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

$(-1)\cdot 2 + 1\cdot 5 = 3$ $\quad (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 3 = 4$

$3\cdot 2 + 4\cdot 5 = 26$ $\quad 3(-1) + 4\cdot 3 = 9$

II. A mátrixok szorzása asszociatív tulajdonságú, feltéve, hogy a műveletek elvégezhetők.

$$[(a_{ij})_{n\times m} \cdot (b_{ij})_{m\times p}] \cdot (c_{ij})_{p\times r} = (a_{ij})_{n\times m} [(b_{ij})_{m\times p} \cdot (c_{ij})_{p\times r}]$$

III. Mátrixok szorzása a mátrixok összeadására nézve mindkét oldalról disztributív, ha a műveletek elvégezhetőek.

a) $[(a_{ij})_{n\times m} + (b_{ij})_{n\times m}] \cdot (c_{ij})_{m\times p} = (a_{ij})_{n\times m} \cdot (c_{ij})_{m\times p} + (b_{ij})_{n\times m} \cdot (c_{ij})_{m\times p}$

jobbról disztributív

b) $(a_{ij})_{n\times m} \cdot [(b_{ij})_{m\times p} + (c_{ij})_{m\times p}] = (a_{ij})_{n\times m} \cdot (b_{ij})_{m\times p} + (a_{ij})_{n\times m} \cdot (c_{ij})_{m\times p}$

balról disztributív

Biz:

a) $[(a_{ij})_{n\times m} + (b_{ij})_{n\times m}] \cdot (c_{ij})_{m\times p} = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times m} \cdot (c_{ij})_{m\times p} =$

$$= \left[\sum_{t=1}^{m} (a_{it} + b_{it}) \cdot c_{tj}\right]_{n\times p} = \left(\sum_{t=1}^{m} a_{it} \cdot c_{tj} + \sum_{t=1}^{m} b_{it} \cdot c_{tj}\right)_{n\times p} =$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{m} a_{it} \cdot c_{tj}\right)_{n\times p} + \left(\sum_{t=1}^{m} b_{it} \cdot c_{tj}\right)_{n\times p} = (a_{ij})_{n\times m} \cdot (b_{ij})_{m\times p} +$$

$$+ (b_{ij})_{n\times m} \cdot (c_{ij})_{m\times p}$$

2. előadás

II. 13.

Speciális mátrixok:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Főátlója: $a_{11}, a_{22}\ a_{33} \cdots a_{nn}$

hasonlóan: $a_{12}\quad a_{2,n-1}, a_{3,n-2} \dots a_{n1}$ ⇒ mellékátló

1, Egy kvadratikus mátrixot DIAGONÁL(IS) mátrixnak nevezzük, ha csak a főátlója tartalmaz zérustól különböző elemet.

pl.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → 3x3-as diagonál mátrix

2, Egy diagonál mátrixot EGYSÉGMÁTRIX-nak nevezzük, ha a főátlójában csupa 1-es szerepel.

pl.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = (\delta_{ij}) = E_{n \times n}$

egységmátrix jelölés

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ha } i = j \\ 0, \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

δ_{ij} = Kronecker-féle deltának is szokták nevezni.

3, Permutáló mátrix: P. m-nak nevezzük azt a kvadratikus m-ot, amely az egységmátrixból sorok v. oszlopok más sorrendű felírásával állhat elő.

pl.: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$

4; Δ mátrixnak (trianguláris m.) nevezzük azt a kvadratikus mátrixot, amelynek főátlója alatt v. felett csupa 0. áll.

pl.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ felső Δ mátrixnak szokták nevezni

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ alsó Δ m. (→ mátrix)

5., Egy kv. (→ kvadratikus) mátrixot szimmetrikusnak nevezzük, ha elemei a főátlóra szimmetrikusan helyezkednek el.

pl.: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & -7 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ 3×3-as szimm. mátrix

6., Egy kv. m-ot NILPOTENS m-nak nevezünk, ha $\exists$ olyan természetes szám, amelyre a m-t hatványozva a zérusmátrixot kapjuk.

$A_{n \times m}$ $\quad A^t_{n \times m} = (0)_{n \times m}$ $\quad t \in N$

7; Egy kv. m-ot projektor (vetítőm.) m-nak nevezünk, ha a m. minden „⊕" egész kitevős hatványa az adott m-szal egyenlő.

$P = P^2 = P^3 = \ldots = P^n$

8; Egy kv. m-ot KONTINUÁNS m-nak nevezünk, ha csak a főátlójában és az azzal ‖ szomszédos átlókban szerepel zérustól különböző elem.

pl.: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & 7 \end{pmatrix}$ 4x4-es kontinuáns m.

Az n^2 rangú teljes mátrixgyűrű

$n \times n$ típusú T test fölötti mátrixok körében az „+" és a „·" (skalárral való szorzás is) mindig elvégezhető.

Érvényes a következő tétel:

A T test fölötti $n \times n$ típusú m-ok halmaza m-ok összeadására és szorzására nézve gyűrűt alkot, amely gyűrű ált. nem kommutatív, de egységgyűrű. (egységelemes gyűrű)

Biz.: azt kell belátni, hogy T test fölötti $n \times n$-es m-ok halmaza az „+"-ra nézve Abel-csoportot, a „·"-ra nézve félcsoportot alkotnak, továbbá a „·" az „+"-ra nézve disztributív.

1., „+" komm.
2., „+" asszo.
3., „+" invertálható, mert $(0)_{n\times n}$ neutrális elem, és $(a_{ij})_{n\times n}$ additív inverze: $(-a_{ij})_{n\times n}$

4., „·" ált. nem komm.
5., „·" asszo.
6., „·" az „+"-ra nézve disztributív

$(\delta_{ij})_{n\times n} = E_{n\times n}$ → a szorzásra vonatkozó neutrális eleme, tehát egységeleme

Ezt az $n \times n$-es T test fölötti m.-gyűrűt n^2 rangú teljes mátrixgyűrűnek nevezzük.

Mátrixok transponáltja

Def.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

Ezen T test fölötti m. transponáltján értjük azt a m-ot, amelynek sorait az adott m. oszlopai alkotják az adott sorrendben.

jel.: $A^T = A^t = A^*$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & & & a_{nm} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$$(a_{ij})^T_{n \times m} := (a_{ji})_{m \times n}$$

pl.: $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}^T_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

Kvadratikus m. transponáltja nem más, mint a m. főátlóra való tükrözött mátrixa.

pl.: $$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Mátrixok transp.-jának képzésére teljesülnek a köv. tulajdonságok:

1, $\left[(a_{ij})_{n\times m} + (b_{ij})_{n\times m}\right]^T = (a_{ij})^T_{n\times m} + (b_{ij})^T_{n\times m}$ $\qquad (A+B)^T = A^T + B^T$

$\Downarrow$

azonos típusú m-kat kell venni az „+" miatt.

2, $\left[(a_{ij})_{n\times m} \cdot (b_{ij})_{m\times p}\right]^T = (b_{ij})^T_{m\times p} \cdot (a_{ij})^T_{n\times m}$ $\qquad (A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Biz.: 1, $\left[(a_{ij})_{n\times m} + (b_{ij})_{n\times m}\right]^T \overset{\text{összead. def. sz.}}{=} (a_{ij} + b_{ij})^T_{n\times m} \overset{\text{transp. def. sz.}}{=} (a_{ji} + b_{ji})_{m\times n} =$

$= (a_{ji})_{m\times n} + (b_{ji})_{m\times n} = (a_{ij})^T_{n\times m} + (b_{ij})^T_{n\times m}$

A 2. tul. biz. lsd. gyakorlaton!

—— o ——

$1\times m$, $n\times 1$ } beszélünk ilyen m-ekről is

pl.: $1\times m \Rightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{13} \dots, a_{1m})$

Ekkor rakunk az elemek közé vesszőt.

röviden $(a_1, a_2, a_3 \dots a_m)$

Ez sormátrixnak v. sorvektornak nevezzük.

pl.: $n\times 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ röviden $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Ezt oszlopmátrixnak v. oszlopvektornak hívjuk.

A sormátrix transzponáltja az oszlopmátrix.

pl.: $(a_1, a_2, a_3 \dots a_n)^T_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$

Fordítva is igaz!

Mátrix inverze:

Kvadratikus m-ok esetén bizonyos feltételek mellett beszélünk egy mátrix reciprokáról v. inverzéről.

Déf.: $A_{n\times n}$ inverze $B_{n\times n}$ T test fölötti m, ha teljesül, hogy $A_{n\times n} \cdot B_{n\times n} = B_{n\times n} \cdot A_{n\times n} = (\delta_{ij})_{n\times n} = E_{n\times n}$

jel.: $A^{-1}_{n\times n} = B_{n\times n}$

Tehát ahhoz, hogy egy m.-nak inverze legyen, szükséges, de nem elégséges feltétel, hogy a m. kvadratikus legyen. Hogy a kv. m.-ok között melyiknek van inverze azt a determinánsok tárgyalása után fogjuk megvizsgálni.

13

Determinánsok

A másod- és harmadrendű determináns:

A det. (determináns) egy Év.-m-hoz rendelt T-beli elem.

a, Másodrendű det.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ezen mátrix det-án értjük

$$\underbrace{D = \det A = |A| = \left|(a_{ij})_{2\times 2}\right|}_{\text{jelölés}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} \in T$$

(A főátlóbeli elemek szorzatából levonjuk a mellék-átlóban elhelyezkedő elemek szorzatát ⇒ Másodrendű det. értékének kiszámítása)

<A m táblázat, a det. egy test beli elem.>

pl.: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$

$$|A| = D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -18 - 35 = -53$$

b, Harmadrendű det.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

T test fölötti det. → kezesség.

Ezen mátrix det. alatt értjük (és 3-adrendű det-nak nev.):

$$D = \det A = |A| = \left|(a_{ij})_{3\times 3}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} -$

$- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \in T = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \in P_3} (-1)^J a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot a_{3i_3}$ a determináns

P_3: 3 elem permutációjának halmaza

$J: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1, & i_2, & i_3 \end{pmatrix}$

„+"

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

„−"

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

|| átló és a tőle legtávolabbi elem

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \in P_3} (-1)^J a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot a_{3i_3}$$

J: a permutációban az inverziók száma.

pl.: $a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $J = 2$.

↳ a tag előjele pozitív

Sarrus-szabály:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

A főátló és a vele || átlók a ⊕ előjelűek

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

A mellékátló és az azzal ||-ok a ⊖ előjelűek

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Mj.: Néha beszélünk elsőrendű det.-ról is. Ez a mátrixhoz rendelt első T-beli elem.

$$A = (a_{11})$$

$$|A| = |a_{11}| = a_{11} \quad \Rightarrow \text{Akkor magát az } a_{11} \text{ elemet értjük.}$$

pl.:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix} = 0+0+(-1\cdot 2\cdot 3)-(5) = -6-5 = \underline{\underline{-11}}$$

Az n-ed rendű det. fogalma és tulajdonságai

Def.: Az
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
T test fölötti $n \times n$-es mátrixból értelmezett n-edrendű det-on a következőket értjük.

$$D = |A| = \det A = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \sum_{\binom{1\,2\,\dots\,n}{i_1\,i_2\,\dots\,i_n} \in P_n} (-1)^J a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

ahol P_n jelenti az $1, 2 \dots n$ elemek összes permutációinak $\binom{1\,2\,\dots\,n}{i_1\,i_2\,\dots\,i_n}$ halmazát, J jelenti a permutációban az inverziók számát.

Az n-edrendű det. tehát $n!$ tagból álló algebrai összeg, amelynek tagjai az összes olyan n tényezős szorzat, amelyek minden sorból és minden oszlopból 1-1 tényezőt tartalmaznak, a tag előjele pedig ⊕ v. ⊖ aszerint, hogy az indexek permutációja páros v. páratlan.

Mj.: A det $n=3,2,1$ esetében az előzőekben tárgyalt harmad-, másod- és elsőrendű det-t jelenti.

Tulajdonságai:

1, Det.-nak is beszélünk a transzponáltjáról.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \; ; \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A det. értéke egyenlő a transzponált det. értékével.

$$D = D^T$$

Biz.:

$$D = \sum_{\binom{1,2,\dots n}{j_1,j_2\dots j_n} \in P_n} (-1)^J a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots a_{nj_n}$$

$$D^T = \sum_{\binom{j_1,j_2\dots j_n}{1\ 2\ \dots\ n}} (-1)^{J'} a_{j_1 1} \cdot a_{j_2 2} \cdot \dots a_{j_n n}$$

$J' : \binom{j_1,\ j_2,\ j_3 \dots j_n}{1\ \ 2\ \ 3 \dots n}$ perm. inverziók száma

Mindkét det-ban a tagok ugyanazon elemekből képezett n tényezős szorzatok. Mindkettőben a tényezők a det. minden sorából és oszlopából egyet tartalmaznak. Ezért a D det. minden egyes tagjának van egy megfelelő tagja a D^T det-ban, amelyek csak a tényezők sorrendjében különböznek egymástól.

Vizsgáljuk meg, h. milyen ezek előjele!

Legyen $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ a D det. tagjának, megfelelő tagja $a_{j_1 1} \cdot a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$ tag (itt a tényezők csak a sorrendben térnek el)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & & n \end{pmatrix}$$

Ha a $(j_1, j_2 \dots j_n)$ elemeket átrendezzük úgy, hogy $(1, 2 \dots n)$ sorrendbe kerüljenek, akkor az $(1, 2 \dots n)$ oszlopindexek (sorszáma) $(i_1, i_2 \dots i_n)$ sorrendbe kerülnek.

Ez azt jelenti, h. $\begin{pmatrix} j_1, j_2 \dots j_n \\ 1\ 2 \dots n \end{pmatrix}$ permutáció egyenlő

$\begin{pmatrix} 1, 2, \dots n \\ i_1\ i_2 \dots i_n \end{pmatrix}$.

⇓ mindebből az következik, h.

$\begin{pmatrix} 1, 2, \dots n \\ j_1, j_2 \dots j_n \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1, & 2 \dots n \\ i_1, & i_2 \dots i_n \end{pmatrix}$ permutációk egymás inverzei.

(Ha egymás inverzei ⇒ azonos a paritásuk) Ez azt jelenti, h. D det. minden egyes tagja azonos előjellel szerepel a D^T det.-ban.

Vagyis $D = D^T$

Mj.: Ebből a tul.-ból következik, h. minden tul., amely igaz a det. soraira, igaz a det. oszlopaira is. Ezért elegendő csak sorokra megfogalmazni a tul-ot.

2, Ha egy det. valamely sorában minden elem $\emptyset$, akkor a det. értéke is $\emptyset$-val egyenlő.

Biz.: A det. minden egyes tagja minden sorból tartalmaz egy szorzótényezőt, ezért minden tagban fellép a

$\emptyset$ szorzótényezőként. Minden tag $\emptyset \Rightarrow$ a det. is $\emptyset$.

M.: Ha egy det. minden eleme $\emptyset$, $\Rightarrow$ a det. értéke $\emptyset$.

3., Ha egy det. valamelyik sorát megszorozzuk egy $\lambda \in T$ elemmel, akkor a det. értéke is szorzódik λ-val. (lambda)

Biz.: Mivel a det. minden tagja minden sorból tartalmaz egy szorzótényezőt, ezért minden tagban fellép a λ szorzótényező, tehát a det. valóban λ-val szorzódik.

Következmény: 1, A det. soraiból v. oszlopaiból a közös szorzótényező a det. elé kiemelhető.

2, Ha egy n-edrendű det. minden sorát megszorozzuk $\lambda \in T$-vel, akkor a det. értéke λ^n-nel szorzódik.

4., Ha egy det.-ban két sort felcserélünk, akkor a det. értéke (-1)-gyel szorzódik.

Biz.:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cseréljük fel a k. és j. sorát.

Legyen az eredeti det-nak $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ki_k} \cdot a_{ji_j} \cdots a_{ni_n}$ egy tagja. Ezek a tényezők a det. minden sorából és oszlopából egyet tartalmaznak. Ha a két sort felcseteljük, akkor ezek a tényezők továbbra is a det különböző soraiból és oszlopaiból kerülnek ki, tehát a felcserélt sorú det. tagja lesz.

Előjele:

$$a_{1i_1} \cdots a_{ki_k} \cdots a_{ji_j} \cdots a_{ni_n} \quad , \quad a_{1i_1}, a_{2i_2} \cdots a_{ji_j} \cdots a_{ki_k} \cdots a_{ni_n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & & i_j & \dots & i_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_j & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

Ha ebbe a perm-ban a i_j és i_k elemeket felcseréljük, akkor az eredeti perm.-t kapjuk. De ismert, hogyha egy perm-ban két elemet felcserélünk, a perm. paritása megváltozik. Ezért az eredeti det minden tagja ellentétes előjellel szerepel a felcserélt sorú det-ban. Ez azt jelenti, hogy a det. értéke (-1)-gyel szorzódik.

5, Ha egy det-ban két sor elemei rendre egyenlőek, akkor a det. értéke $\emptyset$.

$$\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ l \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = d$$

Biz: $(D=0.)$

Cseréljük fel a det.-ban a két azonos sort. Az előző tel. értelmében a det. értéke (-1)-gyel szorzódik. De a két sor felcserélése a det.-t nem változtatja meg, akkor $d=-d$ egyenlőség teljesül.

$$\Downarrow$$
$$2d=0$$
$$\Downarrow$$
$$d=0.$$

Tul. következménye: Ha egy det. két arányos sort tartalmaz, ⇒ a det. értéke ∅.

6,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k_1}+b_{k_1} & a_{k_2}+b_{k_2} & \dots & a_{kn}+b_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \overset{D_1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k_1} & a_{k_2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} + \overset{D_2}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{k_1} & b_{k_2} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Ha 1 n-edrendű det. k. sorának minden egyes eleme kéttagú összeg, akkor a det. két olyan n-edrendű det-összegére bontható, amelynek sorai a k. sor kivételével megegyeznek az eredeti det. soraival, a k. sorban pedig az első tagban rendre az összegek első tagjai a második det. k. sorában pedig rendre az összegek második tagjai állnak.

Biz.:

$$D = \sum_{\binom{1\,2\,\dots\,n}{i_1 i_2 \dots i_n} \in P_n} (-1)^I a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot (a_{ki_k} + b_{ki_k}) \cdot \dots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{\binom{1\,2\,\dots\,n}{i_1 i_2 \dots i_n} \in P_n} (-1)^I a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ki_k} \cdots a_{ni_n} + \sum_{\binom{1\,2\,3\,\dots\,n}{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} \in P_n} (-1)^I \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot b_{ki_k} \cdots a_{ni_n} =$$

$$\overset{\text{def sz.}}{=} D_1 + D_2$$

7, A det. értéke nem változik, h. valamelyik sorának $\lambda (\in T)$-szorosát egy másik sorhoz hozzáadjuk.

Biz.:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k_1} & a_{k_2} & \dots & a_{kn} \\ a_{l_1} & a_{l_2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

21.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k_1}+\lambda a_{l_1} & a_{k_2}+\lambda a_{l_2} & \dots & a_{k_n}+\lambda a_{l_n} \\ a_{l_1} & a_{l_2} & \dots & a_{l_n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$$

Az előző tul. értelmében:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{k_1} & a_{k_2} & \dots a_{k_n} \\ \vdots & & \\ a_{l_1} & a_{l_2} & \dots a_{l_n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{l_1} & \lambda a_{l_2} & \dots \lambda a_{l_n} \\ a_{l_1} & a_{l_2} & \dots a_{l_n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}}_{\emptyset \text{, mert 2 sora arányos}} = D$$

8, Ha egy n-edrendű det-ban a főátlóban elhelyezkedő elemek kivételével valamennyi elem $\emptyset$, akkor a det. értéke egyenlő a főátlóban elhelyezkedő elemek szorzatával.

Biz.:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 \dots & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Mivel az n-edrendű det. minden tagja, minden sorból és oszlopból 1-1 szorzótényezőt tartalmaz, ezért $a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$ tag kivételével a det. többi tagja $\emptyset$, ezért igaz a tulajdonság.

Det. redukálása alacsonyabb rendű determinánssá.

A determináns kifejtése

Tétel: Ha egy n-edrendű det. első sorában az első elem kivételével minden elem $\emptyset$, akkor a det. értéke egyenlő a nem $\emptyset$ elem szorozva azzal az $(n-1)$-edrendű det.-sal, amelyet úgy kapunk, hogy a det-ből az első sort és első oszlopot elhagyjuk.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & a_{n3} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}^{D_{n-1}}$$

Biz.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{def sz.}}{=} \sum_{\binom{1\,2 \dots n}{1\,i_2 \dots i_n} \in P_n} (-1)^J a_{11} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} =$$

ahol: J jelenti $\binom{1\,2 \dots n}{1\,i_2 \dots i_n}$ perm.-ban az inverziók száma

$$= a_{11} \sum_{\binom{2,3, \dots n}{i_2 i_3 \dots i_n} \in P_{n-1}} (-1)^J a_{2i_2} \cdot a_{3i_3} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} =$$

$J: \binom{2\,3 \dots n}{i_2 i_3 \dots i_n}$ permutációban az inv.-k száma

$$\overset{\text{def. sz.}}{=} a_{11} \cdot D_{n-1}$$

Def.: Egy n-edrendű det. a_{ij} eleméhez tartozó aldeterminánsán értjük azt az $(n-1)$-edrendű det-t, amely az eredetiből az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyása után keletkezik.

Jelölése: D_{ij}

a_{ij}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_{ij}$$

Def.: Egy n-edrendű det. a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsán értjük és A_{ij}-vel jelöljük:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Adj. aldet előjellel ellátott aldet.

Tétel: Ha egy n-edrendű det. i-dik sorában a_{ij} elem kivételével minden elem $\emptyset$, akkor a det. értéke egyenlő az a_{ij} · (szorozva) a hozzá tartozó adj. aldet-sal.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Biz.: A det. i-dik sorát szomszédos sorcserékkel visszük fel az első sorba! Majd ezután a j-dik oszlopot szomszédos sorcserékkel visszük az első oszlop helyére. Ezek után egy olyan det-t kapunk, amely első sorában az első elem a_{ij}, a többi elem $\emptyset$, ezért az előző tétel értelmében a det. értéke az a_{ij} „·" azzal a det-sal, amely az eredetiből a i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával keletkezik.

Azt kell megvizsgálni, hány szomszédos sor és oszlop csere volt, mert annyiszor váltott előjelet a det.

Adj: adjungált

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1+j-1=i+j} \cdot a_{ij} \cdot D_{ij} = a_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} D_{ij}}_{A_{ij}} = a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Tétel: (Kifejtési tétel)

Ha egy det. valamelyik sorának (v. oszlopának) minden egyes elemét megszorozzuk a hozzájuk tartozó adj. aldet-sal és ezeket a szorzatokat összeadjuk, akkor a det. értékét kapjuk.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} = (1)$$

Ez a det i-dik sora szerinti kifejtése.