Generátorrendszer, bázis, max. lin. független vr.

Legyen U T test fölötti vektortér.

Def.: U T test fölötti vektortér egy vr-ét a vektortér generátorrendszerének nevezzük, ha a vtér minden eleme előállítható ezen vr elemeinek a lin. kombinációjaként

Mj.: n dimenziós vektortérben minden n rangú vr, gr.

Def.: U T test fölötti vtér minimális gr-eit a vtér bázisainak nevezzük. (Egy gr minimális gr, ha ∀ elemét elhagyva a megmaradók már nem alkotnak gr-t.)

pl.:

V_3 legyen a síkbeli vektorok valós számok teste fölötti vtere. Ebben a vtérben ∀ két nem ∥ e_1 és e_2 vektor a vtérnek gr-e, sőt bázisa is.

$\{e_1, e_2, a\}$ → generátorrendszer, de nem bázis

Def.: U T test fölötti vtér egy vr-ét max-an (lin) független vr-nek nevezzük, ha lin. független, de a vtér ∀ v-át hozzávéve a vr-hez már lin. összefüggő vr-t kapunk.

gr: generátorrendszer

Mj: A max. lin. független vr. elemeinek a száma egyenlő a vtér dimenziójával.

Tétel: A bázisok pontosan a független generátorr-ek.
(Minden bázis független gr, és minden független gr bázis)

Biz.: 1; Legyen U T test fölötti vektortérnek A egy bázisa. Ha A nem lenne lin. független, ⇒ van olyan $b \in A$, amelyik felírható az $A \setminus \{b\}$ vr elemeinek lin. kombinációjaként. De ekkor a b v.-t az A vr-ből elhagyva a megmaradók még generátorrendszert alkotnának. Ez pedig ellentmond annak, h. A min gr, vagyis, hogy A bázis.

2; Legyen A a U T test fölötti vtérnek lin. független gr-e. Ha valamelyik v-t elhagyva ebből a vr-ből még továbbra is gr lenne, akkor ez az elhagyott v felírható lenne a megmaradt elemek lin. kombinációjaként és azonban lehetetlen, mert A lin. független vr volt. Tehát A min. gr, vagyis bázis.

Tétel: A bázisok pontosan a max. lin. független vr-ek.

Következmény: A bázis elemeinek a száma egyenlő a vektortér dimenziójával.

10. előadás

Biz.: Legyen V T test feletti vektortérnek A bázisa. A előző tétel értelmében A független genr. Ha A nem lenne maximális lin független vr., akkor lenne a vektortérnek olyan b-eleme ($b \in V$), hogy $A \cup \{b\}$ vr. lin. független lenne. De akkor a b vektor nem írható fel az A lin kombinációjaként, ami ellentmond annak, h A bázis. Ezzel bizonyítottuk, h. minden bázis max-an lin. független vr.

Megfordítva:

Legyen a V T test fölötti vektortérnek A max. lin. független vektorrendszere. A generátorrendszere V-nek, mert A-hoz ∀ vektorát hozzávéve a vtérnek már összefüggő vr-t kapunk, de akkor ez az elem kifejezhető az A vr. elemeinek lin. kombinációjaként. Az A vr-ből egyetlenegy vektort sem lehet elhagyni, mert ha egy vektort is elhagynánk, akkor ez a vektor nem írható fel a megmaradt elemek lin. kombinációjaként. A tehát min. gr, vagyis bázis.

Tétel: Véges dimenziós vektortérben minden lin. független vr. bázissá bővíthető.

Biz.: Legyen V T test fölötti vektortér n dimenziós. Legyen továbbá A egy lin. független vr-e V-nek. Vegyünk hozzá A-hoz egyesével a vektortérből elemeket úgy, h. minden lépésnél lin. független vr-t kapjunk. Két eset lehetséges I. Vagy nem tudunk már hozzávenni egyetlenegy vektort sem A-hoz úgy, h. független vektorendszerhez jussunk. Ekkor A max. lin. független vr, azaz bázis. II. Véges lépésben eljutunk odáig, hogy max. lin. független vr. keletkezik (mert elemeinek a száma : n), ezért bázishoz jutunk.

jel.: $\dim V = n$

Alterek

Def.: V T test fölötti vektortérnek V' nem üres részhalmazát a V vektortér alterének nevezzük, ha V' a V-ben értelmezett műveletekre (összeadás és skalárral való szorzás) nézve maga is vektorteret alkot.

Mj.: 1, Minden vektortérnek önmaga, továbbá a $V' = \{0\}$ (zéró vektortér) altere. Ezeket az altereket a V vektortér TRIVIÁLIS altereinek hívjuk.

2, Egy vektortér önmagától különböző altereit a vektortér VALÓDI altereinek nevezzük.

Tétel: V T test fölötti vektortér $\forall$ V' altere tartalmazza a V zérusvektorát, továbbá $\forall$ vektorral annak additív inverzét is, V' zárt a kivonásra nézve.

Biz.: Legyen V T test fölötti vektortérnek V' altere.

1, Mivel V' altér, ezért $a \in V'$ esetén $\lambda a \in V'$ $(\lambda \in T)$

$0 = 0 \cdot a \in V'$, $(0 \in T)$

linalg EA.

2, $a \in U' \Rightarrow (-1)a \in U'$ $(-1 \in T)$

$-a \in U'$

3, $a - b = a + (-b) \in U'$

$a, b \in U'$

A kivonás mindig elvégezhető az altérben

Tétel: (Altérkritérium)

U T test fölötti vektortér U' nem üres részhalmaza $\Leftrightarrow$ altere U-nak, ha teljesül a köv. két feltétel:

1, Minden a-ra és minden b-re $(a, b \in U')$; $a + b \in U'$

2, Minden a-ra $(a \in U')$; $\lambda a \in U'$ $(\lambda \in T)$

Biz: I. Ha U' altere U-nak, $\Rightarrow$ az 1-es és 2-es pont nyilvánvalóan teljesül.

II. Legyen U T test fölötti vektortérnek U' nem üres részhalmaza $\overset{1.}{\Rightarrow}$ U' zárt az összeadásra nézve, továbbá $\overset{2.}{\Rightarrow}$ U' zárt a skalárral való nozásra nézve.

A $\oplus$ és a skalárral való $\odot$ tulajdonságai automatikusan teljesülnek U'-ben.

Példák:

1, Amint az ismeretes a térbeli vektorok V_3 halmaza a $\mathbb{R}$ test fölött vektortér. Legyen α V_3-nak egy síkja, és tekintsük ...

Ebbe az α síkba eső vektorok összessége szintén vektort alkot $\mathbb{R}$ fölött. És utóbbi vektortér altere V_3-nak.

2, Tekintsük V_3 $\mathbb{R}$ fölötti vektorterét, és legyen e egyenes a tér egy egyenese. V_3-nak ezen egyenessel $\parallel$ vektorainak összessége szintén vektorteret alkot $\mathbb{R}$

fölött. És a v.tér is altere V_3-nak.

3; Legyen T test, $(a_1, a_2 \dots a_n)$ rendezett elem n-esek halmazát $(\in V_n)$, $(a_i \in T)$. V_n vektorteret alkot T test fölött.

Tekintsük a köv halmazt: $(0, a_2, a_3 \dots a_n) \in V'_n \subset V_n$; $(V'_n \neq 0)$ $(a_i, 0 \in T)$ $(i = 2, 3 \dots n)$.

V'_n ugyancsak v.teret alkot T fölött. És a vektortér altere V_n-nek.

Mj.: Az altér dimenziója nem lehet nagyobb a vektortér dimenziójánál.

Tétel: Az altér dimenziója nem lehet nagyobb a vektortér dimenziójánál.

Biz.: 1, A „Mj" szerint is a részhalmazból nem lehet több elemű lin. független vr-t kiválasztani, mint az egészből, ezért az altér dimenziója nem lehet nagyobb a vektortér dimenziójánál. 2, Ha az altér dimenziója megegyezik a vektortér dimenziójával, és ez „n", akkor az eredeti vektortér minden vektora egyértelműen írható fel az altér egy n elemű lin. független vektorrendszere elemeinek lin. kombinációjaként, azaz a vektortér minden egyes eleme eleme az altérnek is, tehát az altér egyenlő magával a vektortérrel.

Def: Legyen V T test fölötti vektortérnek V_1 és V_2 altere. A két altér közös részén v. metszetén értjük a $V_1 \cap V_2$ halmazt, ellátva V beli műveletekkel. ($\oplus$, és a skalárral való $\odot$)

linalg EA.

Tétel: Két altér metszete is altér.

Biz: 1, Legyen U_1, U_2 altere U-nak. Biz be, h. $U_1 \cap U_2$ is altér. $U_1 \cap U_2 \neq 0$, mert U_1 és U_2 is tartalmazza a zérust, így nem lehet üreshalmaz a metszet.

Legyen $a, b \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow a; b \in U_1$, $a; b \in U_2$

Kihasználjuk, h. U_1, U_2 altér $\Rightarrow a+b \in U_1$ és $a+b \in U_2 \Rightarrow a+b \in U_1 \cap U_2$

Teljesül az első kritérium.

2, Legyen $a \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow a \in U_1$ és $a \in U_2 \overset{U_1, U_2 \text{ altér}}{\Longrightarrow} \lambda a \in U_1$ és $\lambda a \in U_2$, ahol $\lambda \in T \Rightarrow \lambda a \in U_1 \cap U_2$ $(\lambda \in T)$

Teljesül a második kritérium.

Tehát $U_1 \cap U_2$ altere U-nak.

Def.: Legyen U T test feletti vtérnek U_1 és U_2 altere. A két altér összegén értjük és U_1+U_2-vel jelöljük az $a+b$ alakú elemek halmazát, ahol $a \in U_1$, $b \in U_2$.

Tétel: Két altér összege is altér.

Biz.: 1; Legyen a_1+b_1; $a_2+b_2 \in U_1+U_2 \Rightarrow a_1, a_2 \in U_1$, és $b_1, b_2 \in U_2 \overset{U_1/U_2 \text{ altér}}{\Longrightarrow} a_1+a_2 \in U_1$, $b_1+b_2 \in U_2 \overset{\text{def sz.}}{\Longrightarrow}$

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2) \in U_1+U_2 \Rightarrow (a_1+b_1)+(a_2+b_2) \in U_1+U_2$$

Tehát: U_1+U_2 zárt az $\oplus$-ra nézve $\Rightarrow$ teljesül az első altérkritérium.

2; $a+b \in U_1+U_2 \Rightarrow a \in U_1$ és $b \in U_2 \Rightarrow \lambda a \in U_1$ és $\lambda b \in U_2$

$(\lambda \in T) \overset{\text{def. sz.}}{\Longrightarrow} \lambda a + \lambda b \in U_1+U_2 = \lambda(a+b) \in U_1+U_2$

Tehát: U_1+U_2 zárt a skalárral való szorzásra.

Teljesül a 2. altérkritérium, azaz U_1+U_2 altere U-nak.

Mj.: 1, A két utóbbi tétel felhasználásával egy vektortér altereiből újabb altér képezhető.

2, Alterek metszete és összege kiterjeszthető véges, vagy akár végtelen sok altérre is.

Tétel: (Alterek összegének dimenziótétele)

<u>Véges</u> dimenziós vektortérben két altér összegének a dimenziója egyenlő az egyik altér dimenziója plusz a másik altér dimenziója, kivonva ebből a két altér metszetének a dimenzióját.

$$\dim (U_1 + U_2) = \dim (U_1) + \dim (U_2) - \dim (U_1 \cap U_2)$$

Biz.: Legyen U T. test fölötti vektortér és $\dim = n$, legyen U_1 és U_2 altere U-nak. Ebből következik, h. $U_1 \cap U_2$ altere U-nak. Legyen $\dim (U_1 \cap U_2) = r$, $\dim U_1 = r_1$, $\dim U_2 = r_2$. Azt kell belátni, h.:

$$\dim (U_1 + U_2) = (r_1 + r_2) - r$$

Legyen $(a_1, a_2 \cdots a_r)$ vr. bázisa $U_1 \cap U_2$-nek.

Legyen $(a_1, a_2 \ldots a_r, b_{r+1}, b_{r+2} \ldots, b_{r_1})$ bázisa U_1-nek.

$(a_1, a_2, \ldots a_r, c_{r+1}, c_{r+2} \ldots c_{r_2})$ bázisa U_2-nek.

Tekintsük a köv. vektorrendszert:

$$(a_1, a_2 \ldots a_r, b_{r+1}, b_{r+2} \ldots b_{r_1} \cdots c_{r+1}, \cdots c_{r_2})$$

Ez a vr. gr-e a (U_1+U_2)-nek, mert U_1+U_2 minden eleme előállítható ezen vektorok lin. kombinációjaként.

Kimutatjuk, h. ez a gr. független, azaz bázisa a U_1+U_2-nek.

Képezzük a köv. lin kombinációt!

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \beta_{r+2} b_{r+2} + \dots \beta_{r_1} b_{r_1} + \gamma_{r+1} c_{r+1} + \gamma_{r+2} c_{r+2} +$

$+ \dots + \gamma_{r_2} c_{r_2} = 0 \qquad (\alpha_i, \beta_j, \gamma_l \in T)$

Rendezzük az egyenlőséget!

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \beta_{r+2} b_{r+2} + \dots \beta_{r_1} b_{r_1} =$

$= -\gamma_{r+1} c_{r+1} - \dots - \gamma_{r_2} c_{r_2}$

A bal oldalt jelöljük el „d”-vel!

$d \in V_1$

A jobb oldal is egyenlő d-vel! $d \in V_2$

$\Downarrow$

$\underline{d \in V_1 \cap V_2}$

d kifejezhető $(a_1, a_2 \dots a_r)$ lin. kombinációjaként

d felírható $(c_{r+1}, c_{r+2} \dots c_{r_2})$ elemek lin. kombinációjaként.

Ez a két lin. kombináció megegyezik, ez csak a követ-kezőképpen lehetséges:

$d = 0a_1 + 0a_2 + \dots 0a_r + (-\gamma_{r+1}) c_{r+1} + (-\gamma_{r+2}) c_{r+2} \dots + (-\gamma_{r_2}) c_{r_2}$

$d = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots \alpha_r a_r + 0 \cdot c_{r+1} + \dots \qquad 0 c_{r_2}$

$\Downarrow$

$\underbrace{\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0. \; ; \; \gamma_{r+1}}= \gamma_{r+2} = \dots = \gamma_{r_2} = 0.$

Ebből az következik, hogy „d” zérusvektor.

$d = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \dots \beta_{r_1} b_{r_1} = d = 0$

Mivel d gr-e V-nek, csak úgy lehet felírni, ha minden koordinátája 0.

$\underline{\beta_{r+1} = \beta_{r+2} = 0}$

Csak triviális módon tudjuk előállítani a zérusvektort, az $a_1, a_2 \dots a_r, b_{r+1}, \dots b_{r_1}, c_{r+1}, \dots c_{r_2}$ lin. független vr, azaz bázis (bázisa $V_1 \cap V_2$-nek)

11. előadás

Legyen U_1, U_2 U T test fölötti alterei.

$U_1+U_2 = \{a+b \mid a \in U_1, b \in U_2\}$

U_1+U_2 is altér.

Def.: Legyen U_1 és U_2 U T test fölötti vektortérnek alterei.

A két altér U_1+U_2 összegét direkt összegnek nevezzük, és $U_1 \oplus U_2$ -vel jelöljük, ha U_1 és U_2 altér metszete csupán a zérusvektort tartalmazza.

$U_1 \cap U_2 = \{0\}$

Tétel: U_1 és U_2 alterek összege $\Leftrightarrow$ direkt összeg, ha U_1+U_2 $a+b$ alakú elemeinek az előállítása egyértelmű.

Azaz a U_1+U_2 minden eleme csak egyféleképpen állítható elő. $a \in U_1$ $b \in U_2$ $a+b = \underline{\underline{c}}$

Mátrixok rangszámtétele

Tekintsük:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ T test fölötti mátrixot.

Minden sora tekinthető 1 sorvektornak (n komponensű), de a mátrix minden oszlopa tekinthető 1 oszlopvektornak.

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2} \dots a_{in})$$

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Tétel: Ha egy mátrix rangja r, akkor a mátrixból kiválasztható r számú lin. független sorvektor v. oszlopvektor r-nél több azonban nem. Ezt a tételt nevezzük a MÁTRIXOK RANGSZÁMTÉTELÉNEK.

Következmény: Egy mátrix maximális lin. független sorvektorainak a száma egyenlő a maximálisan lin. független oszlopvektorainak a számával, és ez egyenlő a mátrix rangjával.

Lineáris egyenletrendszerek és mátrixok.

Lin. erendszerek és vektorok.

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Az $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n}\\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$ az (1) lin. erendszer mátrixának nevezzük.

$\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$ mátrixot az (1) lin. er. kibővített mátrixának nevezzük.

Tétel: (KRONECKER–CAPELLI-tétel)

Az (1) lin. e.r. $\Leftrightarrow$ oldható meg, ha az e.r. mátrixának a rangja egyenlő az e.r. kibővített mátrixának a rangjával. $r(A)=r(\bar{A})$

linalg ea.

Biz: 1, Tfh. az (1) lin e.r. megoldható. Bebizonyítjuk, hogy
$r(A) = r(\bar{A})$

Legyen ~~az~~ (1) megoldása $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$ ... $x_n = \alpha_n$ $(\alpha_i \in T)$

Mivel megoldások,
$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n &= b_m \end{aligned}$$

Így felírható:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}\alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}\alpha_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\alpha_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ebből látható, hogy a konstans oszlopvektor felírható az A mátrix ~~a~~ oszlopvektorainak a lin. kombinációjaként. Ismeretes, hogy egy vektorrendszer rangja nem változik, ha a vr-t egy olyan vektorral bővítjük, amelyik felírható a vr elemeinek a lineáris kombinációjaként. Ezért a rangszámtétel értelmében: $r(A) = r(\bar{A})$

2., $r(A) = r(\bar{A}) = r$

Megmutatjuk, hogy ekkor (1) megoldható

Mivel $r(A) = r$, ezért az A mátrix maximálisan lin. független sorvektorainak és oszlopvektorainak a száma r. És az r számú max. lin. független sor- és oszlopvektorrendszer max. lin. független vr lesz az $\bar{A}$ mátrixban is. Ezért az $\bar{A}$ mátrix utolsó oszlopa felírható az r számú lin. független oszloprendszer következésképpen az A mátrix oszlopainak lin. kombinációjaként.

azaz: $$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \beta_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \beta_1 \,, \; x_2 = \beta_2 \,, \dots \; x_n = \beta_n$$

Ha az (1) lin. e.r. megoldható, akkor a megoldásokat a lin. egyenletrendszer megoldásai között bármelyikkel megkereshetjük.

Lin. e.r-ek és vektorok:

Tekintsük:

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \; a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \; a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \; a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} ; \; v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} , \dots , \; v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} , \; w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ezek felhasználásával az (1) lin. e.r. a következő vektoregyenlet formájában írható fel.

$$(2) \quad v_1x_1 + v_2x_2 + \dots \; v_nx_n = w$$

Tétel: $v_1, v_2 \dots v_n$ vektorok lin. kombináció az m komponensű T test fölötti V_m m dimenziós vektortér ~~tere~~ egy alteret alkotják.

Biz: V'_m a $v_1, v_2, \dots v_n$ lin. kombinációjának a halmazát jelöljük. $V'_m \subseteq V_m$

Megmutatjuk, h. V'_m-ben is teljesülnek az altérkritériumok.

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_n v_n \in U'_m$ $(\alpha_i \in T)$

$u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots \beta_n v_n \in U'_m$ $(\beta_i \in T)$

1, Adjuk össze a két sort!

$v + u = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \dots (\alpha_n + \beta_n) v_n \in U'_m$

U'_m zárt az összeadásra nézve!

2, $\lambda \cdot v = (\lambda\alpha_1) v_1 + (\lambda\alpha_2) v_2 + \dots (\lambda\alpha_n) v_n \in U'_m$ $\lambda \in T$

U'_m zárt a skalárral való szorzásra nézve is.

U'_m - ben teljesülnek az altérkritériumok, ezért valóban

U'_m altere U_m-nek.

Tétel:
A (2) vektoregyenlet és így az (1) lin. e.r. ⇔ oldható meg, ha a w vektor benne van a $v'_1, v'_2 \dots v'_n$ vektorok lin kombinációinak az alterében, azaz $w \in U'_m$

Biz.: (1,) Tfh. a (2) vektoregyenlet megoldható. Legyen $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2 \dots, x_n = \alpha_n$ megoldások, ahol $\alpha_i \in T$.

Teljesül, h. $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_n v_n = w \Rightarrow w \in U'_m$ altérben

(2,) Tfh. $w \in U'_m \Rightarrow w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots \beta_n \cdot v_n \Rightarrow$ $(\beta_i \in T)$

$x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2 \dots, x_n = \beta_n$

A (2) és így az (1) lin. egyenletrendszer megoldásai.

A vektor~~ok~~rendszer rangjának segítségével az előző tétel a következőképpen is megfogalmazható:

A (2) vektoregyenlet, és így az (1) v.r. ⇔ oldható meg, ha a $v_1, v_2 \dots v_n$ v.r. rangja megegyezik a $v_1, v_2; v_n = w$ v.r. rangjával.

Vektorterek homogén lineáris leképezési és transzformációi

Def.: Legyenek V_1 és V_2 T test fölötti vektortérek. A $f: V_1 \to V_2$ $(x \to fx \quad x \in V_1)$ leképezést homogén lin. leképezésnek, röviden lin. leképezésnek nevezzük, ha teljesülnek a köv. feltételek:

1., $\forall x \, \forall y \; (x, y \in V_1)$, $f(x+y) = fx + fy \Rightarrow$ additív tulajdonság

2., $\forall x \; (x \in V_1)$ és $\forall \lambda \; (\lambda \in T)$ teljesül, h. $f(\lambda x) = \lambda \cdot fx \Rightarrow$

$\Rightarrow$ homogén tulajdonság

Def.: Legyen V T test fölötti vektortér. A $f: V \to V$ $(x \to fx \in V, x \in V)$ homogén lin. leképezést lin. transzformációnak nevezzük (egy vektortérnek önmagába történő homogén lin. leképezése a lin. transzformáció)

Tétel: A f homogén lin. leképezés V_1 zérusvektorát V_2 zérusvektorára képezi le.

Biz.: Legyenek V_1 és V_2 T test fölötti vektorterek, $f: V_1 \to V_2$ $(x \to f_x)$

$0_1 \in V_1$ (zérusvektora), $0_2 \in V_2$

$0_1 + 0_1 = 0_1$

$f(0_1 + 0_1) = f(0_1)$

$$f(0_1) + f(0_1) = \underbrace{f(0_1)}_{f0_1 = 0_2} \qquad (f0_1 \in V_2) \qquad (a + x = a)$$

Mj.: A homogén lin transformáció a vektortér zérusvektorát változatlanul hagyja. (Önmagát rendeli hozzá.)

Def.: Legyenek U_1 és U_2 T test fölötti vektorterek. A $f: U_1 \to U_2$ $(x \to fx)$ leképezést izomorf leképezésnek nev., ha teljesülnek a köv. feltételek.

- f bijektív
- $\forall x \, \forall y \, (x, y \in U_1) \; f(x+y) = fx + fy$
- $\forall x \, (x \in U_1) \, \forall \lambda \, (\lambda \in T) \; f(\lambda \cdot x) = \lambda (fx)$

röviden: a $f: U_1 \to U_2$ izomorf leképezés, ha homogén lin leképezés, és a leképezés bijektív

Def.: A U_1 és U_2 T test fölötti vektortereket egymással izomorfaknak nevezzük, ha létezhető közöttük izomorf leképezés.

Pl.: Legyen V_n T test fölötti n dimenziós vektortér

Legyen $B = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ bázisa ennek

$x \in V_n$

Ismeretes, h. x egyértelműen írható fel:

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \dots ; \; (x_i \in T)$

$x \to (x_1, x_2 \dots, x_n)$ hozzárendelést v. leképezést koordinátázásnak nevezzük V_n-ben a B bázisra vonatkozóan.

Könnyen megmutatható, h. a leképezés V_n-nek önmagára történő izomorf leképezése, amit röviden izomorfizmusnak mondunk.

$x \overset{f}{\leftrightarrow} (x_1, x_2 \dots, x_n)$

$\to$ 1; $f: U \to U$ bijektív

2; $x \to (x_1, x_2 \dots, x_n)$
$y \to (y_1, y_2 \dots, y_n)$

képezzük: $x+y \Rightarrow (x_1+y_1;\ x_2+y_2;\ \dots\ x_n+y_n) = (x_1, x_2 \dots x_n) + (y_1, y_2 \dots y_n)$

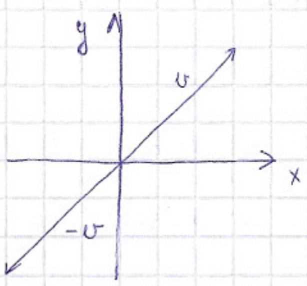
$$f(x+y) = fx + fy$$

3, $\lambda \cdot x \Rightarrow \lambda(x_1, x_2 \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda x_2 \dots \lambda x_n)$

$$f(\lambda x) = \lambda(fx)$$

Példák homogén lin. leképezésre:

- ha V_1 vektortér minden egyes eleméhez a V_2 vektortér zérusvektorát rendeljük, akkor ez homogén lin. leképezése V_1-nek V_2-re.
- ha egy vektortér minden egyes eleméhez önmagát rendeljük képelemként (identikus leképezés), akkor ez a leképezés hom. lin. leképezés, sőt, lin. transzformáció.
- Tekintsük a koordinátarendszer által meghatározott síkot.



$$fv = -v$$

$$f: V_2 \to V_2$$

Ez a f leképezés a síkbeli vektorok valós számok fölötti vektorterének önmagába történő hom. lin. leképezése, sőt, lin. transzformáció.

Az izomorf vektortesek egyik jellemző sajátossága, hogy egy vektorrendszer $\Leftrightarrow$ lin. összefüggő, ha izomorfizmus melletti képeik is lin. összefüggők.

U, U', T test fölötti

$f: U \to U'$ $(x \to fx)$ izomorf leképezés

$a_1, a_2 \dots a_r \in U$

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots \lambda_r a_r = 0$ (λ_i nem mind 0)

$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r) = f0 = 0 \in U'$

$\lambda_1 fa_1 + \lambda_2 fa_2 + \dots + \lambda_r fa_r = 0 \in U'$

Mj: Ha egy vektorrendszer lin. független, ebből nem következik az, hogy izomorfizmus melletti képeleinek is lin. függetlenek.

Tétel:
Bármely két n dimenziós vektortér izomorf egymással.

Bz:
U, U' T test fölötti vektortesek

$\dim U = \dim U' = n$

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ egy bázisa U-nak

$\mathcal{B}' = \{e_1', e_2' \dots e_n'\}$ egy bázisa U'-nek

Legyen $x \in U \Rightarrow x = x_1 e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots x_n e_n$ $(x_i \in T)$

Tekintsük a köv. leképezést!

$f: U \to U'$

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots x_n \cdot e_n \xleftrightarrow{f} x_1 e_1', x_2 e_2' + \dots + x_n e_n'$

Megmutatható, h. ez a f leképezés bijektív és homogén lin. leképezés, azaz izomorfizmus.

Tehát valóban U és U' n dimenziós vektortesek izomorfak egymással.

Köv: Izomorfizmustól eltekintve 1db n dimenziós vektortér létezik.

Homogén lin. leképezés megadása:

Tétel:

Legyen U, U' T test fölötti vektorterek. A $f: U \to U'$ homogén lin. leképezést a báziselemek képei egyértelműen meghatározzák, továbbá a báziselemek képeit tetszőlegesen megválasztva mindig van olyan homogén lin leképezés, amelyek a báziselemeket a megadott képekbe viszik át.

Biz:

a, Legyen $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ homogén lin. leképezés

$B = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ bázisa U-nak $x \in U$

$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ $(\alpha_i \in T)$

$fx = f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n)$

$fx = \alpha_1 (fe_1) + \alpha_2 (fe_2) + \dots + \alpha_n (fe_n)$

b, Legyen $fe_i = u_i \in U'$ $(i = 1, 2 \dots n)$

Megmutatjuk, h. a f leképezés homogén lin. leképezés

$a \in U$ $b \in U$

$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ $(\alpha_i \in T)$

$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$ $(\beta_i \in T)$

$f(a+b) = f[(\alpha_1+\beta_1)e_1 + (\alpha_2+\beta_2)e_2 + \dots (\alpha_n+\beta_n)e_n]$

$fa = \alpha_1 \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ fe_1}}{u_1} + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$

$fb = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n$

$fa + fb = (\alpha_1+\beta_1)u_1 + (\alpha_2+\beta_2)u_2 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)u_n =$

$= f[(\alpha_1+\beta_1)e_1 + (\alpha_2+\beta_2)e_2 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)e_n]$

$f(a+b) = fa + fb$

A f leképezés additív tulajdonságú. Hasonlóan megmutatható, h. teljesül a homogén tul. is.

$f(\lambda a) = (\lambda\alpha_1)fe_1 + (\lambda\alpha_2)fe_2 + \dots + (\lambda\alpha_n)fe_n =$

$= \lambda(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) = \lambda(fa)$

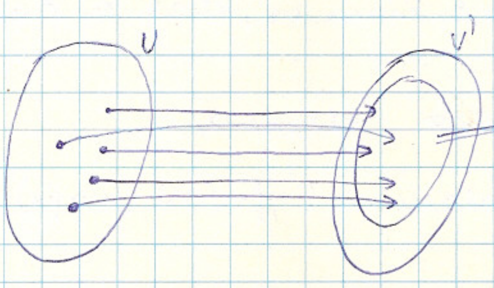
A f leképezés homogén lin. leképezés

Lineáris leképezés képtere, magja és rangja.

Def: Legyen U és U' T test fölötti vektortérek. $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ homogén lineáris leképezés.

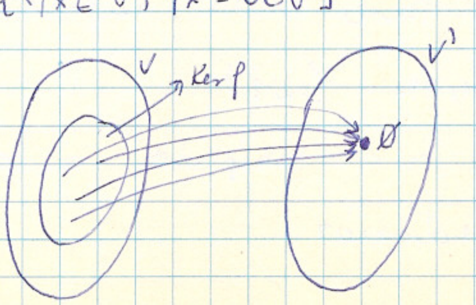
A lin. leképezés képterén értjük és $\mathrm{Im}\, f$-vel jelöljük a következő halmazt.

$\mathrm{Im}\, f := \{y \mid y \in U'$ és alkalmas $x \in U$, $fx = y\}$



Def.: Legyen U és U' T test fölötti vektortérek. $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ homogén lin. lek. Ezen hom. lin. lek. magján értjük és $\mathrm{Ker}\, f$-vel jelöljük a következő halmazt.

$\mathrm{Ker}\, f := \{x \mid x \in U,\ fx = 0 \in U'\}$



Tétel: Legyen U, U' T test fölötti vektortér $f: U \to U'$

$(x \to fx)$ hom. lin. leképezés.

A homogén lin. leképezés képtere altérét képezi

U'-nek, a ker f pedig altere U-nak.

Biz.:

Biz be, h. ker f altere U-nak. (hasonlóan bizonyít-

ható, h. im f altere U'-nek) $\Rightarrow$ Hf!

Be kell látni, h. ker f-ben teljesülnek az altérkrité-

riumok.

$$1;\ x_1, x_2 \in \ker f \qquad x_1, x_2 \in U\ ,\ x_1+x_2 \in U$$

$$f(x_1+x_2) \Rightarrow \underbrace{fx_1}_{0\in U'} + \underbrace{fx_2}_{0\in U'} \Rightarrow 0 \in U' \overset{\text{def. sz.}}{\Rightarrow} x_1+x_2 \in U'$$

$\Rightarrow$ $x_1+x_2 \in \ker f$-nek. Ker f zárt az összeadásra nézve

$$2;\ x_1 \in \ker f \Rightarrow x_1 \in U \Rightarrow \lambda x_1 \in U$$

$$f(\lambda x_1) = \lambda \underbrace{fx_1}_{0\in U'} = \lambda 0 \in U' = 0 \in U' \Rightarrow \lambda x_1 \in \ker f$$

Teljesül a másik altérkritérium is, tehát ker f altere U-nak.

Tétel: Legyen U, U' T test fölötti vektorterek

Legyen $\dim U = n$, valamint $\exists$ $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ hom

lin leképezés

Ekkor $\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f) = n$

Biz.:

Mivel $\dim U = n$ $\exists$ bázis: $B = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ ($\Rightarrow U$ bázisa)

$\exists$ $\dim(\ker f) = k$ $\quad B' = \{e_n, e_{n-1}, \dots e_{n-(k-1)}\}$

Biz be!, h. $fe_1, fe_2 \dots fe_{n-k}$ bázisa im f-nek

$(B'' = \{fe_1, fe_2 \dots fe_{n-k}\}$

Mivel f hom lin lek, és a leképezést a bázis elemei

egyértelműen meghatározzák:

$f e_1, f e_2 \dots f e_{n-k}, \underbrace{f e_{n-(k-1)} \dots}_{0 \in U'} \overset{0 \in U'}{\overset{f e_n}{}}$ generátorrendszere $\mathrm{im}\, f$-nek
$\rightarrow$ elhagyható

$f e_1, f e_2 \dots f e_{n-k}$ generátorrendszere $\mathrm{im}\, f$-nek

Kimutatjuk, hogy ez a vektorrendszer lin. független.

$\lambda_1 (f e_1) + \lambda_2 (f e_2) + \dots + \lambda_{n-k} (f e_{(n-k)}) = 0 \quad (\lambda_i \in T)$

$f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{n-k} e_{n-k}) = 0 \in U'$

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \dots + \lambda_{n-k} e_{n-k} \in \ker f$

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{n-k} e_{n-k} = \lambda_{n-(k-1)} e_{n-(k-1)} + \dots + \lambda_n e_n$

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_{n-k} e_{n-k} - \lambda_{n-(k-1)} e_{n-(k-1)} - \dots - \lambda_n e_n = 0$

Mivel $e_1, e_2 \dots e_{n-k}, e_{n-(k-1)} \dots e_n$ vektorrendszer lin. független (mert U-nak a bázisa) ezért a zérusvektort csak triviális módon tudjuk előállítani.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-k} = \lambda_{n-(k-1)} = \dots = \lambda_n = 0.$

$\lambda_1 f e_1 + \lambda_2 f e_2 + \dots + \lambda_{n-k} (f e_{n-k}) = 0 \Rightarrow$ Ez az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a λ-i együtthatók 0-k, ez pedig azt jelenti, h.

$f e_1, f e_2, f e_{n-k}$ lin független

$\{ f e_1, f e_2 \dots, f e_{n-k} \}$ bázisa az $\mathrm{im} f$-nek

Végül azt kaptuk, h. $\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = k + n - k = \underline{\underline{n}}$

Def.: Legyen U, U' T test fölötti vektortér, $f: U \to U'$ $(x \Rightarrow f x)$ hom. lin. leképezés.

Ezen homogén lin. leképezés rangján értjük az $\mathrm{Im} f$ altér dimenzióját. Defektusán pedig a $\mathrm{Ker}\, f$ dimenzióját értjük

Def.: Legyen U, U' T test fölötti vektortér, $f: U \to U'$ $(x \Rightarrow f x)$ hom. lin. leképezés.

Ezt a hom. lin. leképezést nem elfajulónak nevezzük, ha $x_1, x_2 \in U$ és $x_1 \neq x_2 \Rightarrow fx_1 \neq fx_2$

Tétel: A $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ hom. lin. lek. $\Leftrightarrow$ nem elfajuló, ha magja csupán a zérusvektort tartalmazza

Def.: Legyen U T test fölötti vektortér, továbbá $f: U \to U$ $(x \to fx \in U)$ lin. transzformáció. U vektortér U' alterét invariáns altérnek nevezzük, ha $\forall\, x \in U'$ esetén a fx is $\in U'$, azaz a lin. leképezés nem vezet ki a U' altérből.

Pl.: $f: U \to U$ $(x \to fx)$ lin transzformációjának a $\operatorname{Ker} f$ és $\operatorname{Im} f$ is invariáns alterei

Műveletek lin. leképezésekkel és transzformációkkal

Def.: Legyen U, U' T test fölötti vektorterek, és $\varphi, f: U \to U'$ $(x \to fx)$ hom. lin. leképezései. A két lin. leképezés összegén értjük, és a szokásos módon $\varphi + f$-vel jelöljük a következő leképezést:

$$(\varphi + f)x = \varphi x + fx \qquad \forall\, x \in U \text{ esetén}$$

Def.: Legyen U, U' T test fölötti vektortér, φ és $f: U \to U'$ hom. lin. leképezések.

A f hom. lin. leképezés λ-szorosán értjük és (λf)-vel jelöljük a köv. leképezést.

$$x - \lambda \cdot f_x \qquad \forall\, x \in U \text{ esetén}$$

Egyszerű számolással igazolhatók a köv. tételek:

Tétel: Két hom. lin. leképezés összege is, valamint egy hom. lin. leképezés λ-szorosa ($\lambda \in T$) is hom. lin. leképezés.

Tétel: Jelöljük $Hom(U, U')$-vel a $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ összes hom. lin. leképezésének halmazát.

$Hom(U, U')$ a leképezések összeadására és skalárral való szorzására nézve vektorteret alkot a T test fölött

Def.: Legyen U, W, U T test fölötti vektortérek
! $f: U \to W$ $(x \to fx)$ hom. lin. lek.
! $\varphi: W \to U$ $(fx \to \varphi(fx))$ hom. lin. lek.
A két leképezés szorzatán értjük és φf-vel jelöljük a következő leképezést.

$(\varphi f)x = \varphi(fx)$, $\forall$ $x \in U$ esetén

Mj: $\varphi f: U \to U$ $(x \to \varphi(fx))$

Tétel: $\varphi f: U \to U$ $(x \to \varphi(fx))$ hom. lin. leképezések szorzata is hom. lin. leképezés.