$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8$
$4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9$
$2x_1 + 3x_2 - 5x = 7$
$x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -9 & 6 & -16 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{9}{13}\right) \sim \begin{matrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & 0 & & \end{matrix}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3$$
$$9x_1 + x_2 + 4x_3 + -5x_4 = 1$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$$
$$7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 & 9 \\ 1 & 7 & 6 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 14 & -16 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & -15 \\ 0 & 0 & -10 & 20 & -25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & -15 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-6} & \cancel{12} & \cancel{-15} \\ 0 & 0 & -10 & 20 & -25 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 12 & -15 \\ 0 & 0 & -10 & 20 & -25 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -12 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \qquad\quad x_3 \; x_4 \;\; c \end{array}$$

$$-6x_3 + 12x_4 = -15 \qquad /:-3$$

$$2x_3 - 4x_4 = +5$$
$$2x_3 = +5 + 4x_4 \qquad\qquad x_4 := t$$
$$2x_3 = 5 + 4t$$
$$x_3 = 5/2 + 2t$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + 5 + 4t + 2t = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + 6t = -3 \qquad\qquad x_2 := v$$
$$3x_1 = -2v - 6t - 3$$
$$x_1 = -2/3\,v - 2t - 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektortér

$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \mathbb{R}}^{n\text{-szer}}$

$x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$

n dimenziós vektortér $\Rightarrow$ n koordinátája van az x-nek

$n = 2 \quad \mathbb{R}^2 \qquad x = (x_1, x_2)$

$\mathbb{R}^n$ vektortér $\mathbb{R}$ felett

Biz.: $\left.\begin{array}{l} (\mathbb{R}^n, +) \text{ komm. csoport} \\ \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \\ (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x \\ 1 \cdot x = x \\ \lambda \cdot (\mu x) = (\lambda \mu) x \end{array}\right\}$ vektortér legyen

$x, y \in \mathbb{R}^n$
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}^n, +)$ komm csop.

+ : asszociatív : $(x+y)+z = x+(y+z) \qquad x, y, z \in \mathbb{R}^n$

BO: $\left[(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) + (y_1, y_2, y_3 \dots y_n)\right] + (z_1, z_2 \dots z_n) \underset{\text{def.sz.}}{=} \left[x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3 \dots x_n+y_n\right] + (z_1, z_2 \dots z_n) =$

$= (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2 \dots x_n+y_n+z_n)$

JO: $(x_1, x_2 \dots x_n) + \left[(y_1, y_2 \dots y_n) + (z_1, z_2 \dots z_n)\right] = (x_1, x_2 \dots x_n) + \left[y_1+z_1, y_2+z_2 \dots y_n+z_n\right] =$
$= (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2 \dots x_n+y_n+z_n)$

- $\exists$ 0: $\quad 0 = \underbrace{(0, 0 \dots 0)}_{n\text{-szer}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n : 0 + x = x$

- $\exists$ inverzelem : $-x = (-x_1, -x_2, \dots -x_n)$

- kommutatív : $x + y = y + x$

$(x_1+y_1, x_2+y_2 \dots x_n+y_n) = (y_1+x_1, y_2+x_2 \dots y_n+x_n)$

Biz.: $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

BO: $\lambda[(x_1, x_2 \dots x_n) + (y_1, y_2 \dots y_n)] = \lambda(x_1+y_1, x_2+y_2 \dots x_n+y_n) =$

$= \lambda(x_1+y_1), \lambda(x_2+y_2) \dots \lambda(x_n+y_n) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2 \dots \lambda x_n + \lambda y_n) =$

disztributivitás

$= (\lambda x_1, \lambda x_2 \dots \lambda x_n) + (\lambda y_1, \lambda y_2 \dots \lambda y_n) = \lambda(x_1, x_2 \dots x_n) + \lambda(y_1, y_2 \dots y_n) =$

$= \lambda x + \lambda y$

Feladat:

$\underline{a} = (1; 3; 2)$

$\underline{b} = (2; 1; 5)$

$\underline{c} = (3; 4; 2)$

$\underline{p} = 2\underline{a} - \underline{b} + 3\underline{c}$ → lineáris kombináció; a vektorokkal 2-vel −1-el és 3 mal képzett kombinációja.

$p = (p_1, p_2, p_3)$

$2\underline{a} = (2; 6; 4)$

$-\underline{b} = (-2; -1; -5)$

$3\underline{c} = (9; 12; 6)$

$p = (9; 17; 5)$

$p_1 = 9$; $p_2 = 17$; $p_3 = 5$

$p_1 = 2a_1 - b_1 + 3c_1$

~ o ~

$\underline{q} = ?$

$\underline{q} = (4; 7; 14)$

$q = \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c}$

$?: \alpha, \beta, \gamma$

$q_1 = \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 + \gamma \cdot c_1$

$q_2 = \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot c_2$

$q_3 = \alpha \cdot a_3 + \beta b_3 + \gamma \cdot c_3$

$$\left.\begin{aligned} 4 &= \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ 7 &= 3\alpha + \beta + 4\gamma \\ 14 &= 2\alpha + 5\beta + 2\gamma \end{aligned}\right\}$$

linalg gy.

(Cramer-sz.)

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$$

$$\alpha = \frac{D_1}{|A|} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \\ 14 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 75 \qquad \alpha = 3$$

$$\beta = \frac{D_2}{|A|} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 14 & 2 \end{vmatrix} = 50 \qquad \beta = 2$$

$$\gamma = \frac{D_3}{|A|} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 14 \end{vmatrix} = -25 \qquad \gamma = -1$$

$$\underline{q} = 3\underline{a} + 2\underline{b} - c$$

~ o ~

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a} = (1;2;3) \\ \underline{b} = (2;4;6) \end{array}\right\rangle \text{lin. független-e?}$$

Az $\underline{a_1} \dots \underline{a_n}$ vektorok lin. függetlenek, ha

$\lambda_1 \underline{a_1} + \dots + \lambda_n \underline{a_n} = 0$ csak úgy teljesül, ha

$\lambda_1 = \dots \lambda_n = 0$.

$$\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} = 0$$

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 = 0$$
$$\lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 = 0$$
$$\lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \cancel{2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0} \\ \cancel{3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0} \end{array}\right\} \text{homogén lin. e.r.}$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$\lambda_1 = -2\lambda_2$ pl: $\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = -2$ esetén

$-2\underline{a} + \underline{b} = 0$

Az a és b lin függőek, mert teljesül, h. az egyenlet 0, de a és b mégsem 0.

~ o ~

$\underline{a} = (4; -2; 6)$
$\underline{b} : (6; -3; 8)$ lin függetlenek?

$\lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b} = 0$

$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot b_1 = 0$
$\lambda_1 \cdot a_2 + \lambda_2 \cdot b_2 = 0$
$\lambda_1 \cdot a_3 + \lambda_2 \cdot b_3 = 0$

$\cancel{4\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0}$
$* \; -2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$
$6\lambda_1 + 8\lambda_2 = 0$

Gauss:
$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$-\lambda_2 = 0$ $\quad$ $-2\lambda_1 + 0 = 0$
$\underline{\underline{\lambda_2 = 0}}$ $\quad$ $\underline{\underline{\lambda_1 = 0}}$

A λ_1 és λ_2 is 0, tehát a és b lin. függetlenek

~ o ~

$\underline{a} = (1; 2; 1)$
$\underline{b} = (1; 1; -1)$ lin. függetlenek?
$\underline{c} = (1; -1; 1)$

$\lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b} + \lambda_3 \cdot \underline{c} = 0$

$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$
$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$
$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

Gauss:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{matrix}$$

a, b, c : lin. függetlenek

linalg GY

$\underline{a} = (1; x)$

$\underline{b} = (-3; 4)$

$x = ?$ $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lin. függőek legyenek

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot b_1 = 0$$

$$x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3x_2$$

$$3 \cdot a_1 + 1 \cdot b_1 = 0$$
$$3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x + 4 = 0 \\ 3a_2 + 1 \cdot b_2 = 0 \end{cases}$$

$$3x = -4$$
$$x = \frac{-4}{3}$$

Ha $\underline{a} = (1; -\frac{4}{3})$ $\underline{b} = (-3; 4) \Rightarrow$

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ lin függőek

~ o ~

$\underline{a}_1 = (1; 0)$ $\underline{a}_2 = (2; 3)$ $\underline{a}_3 = (3; 0)$

$\underline{a}_4 = (-2; -3)$ $\underline{a}_5 = (4; 0)$

Ezek vektorteret alkotnak. Adjuk meg az összes bázist!

Bázis: Lin. független generátorrendszer.

$\underline{a}_1, \underline{a}_2$ lin. függetlenek

$$3\underline{a}_1 + 0 \cdot \underline{a}_2 = \underline{a}_3$$

$$0 \cdot \underline{a}_1 + (-1)\underline{a}_2 = \underline{a}_4$$

$$4 \cdot \underline{a}_1 + 0 \cdot \underline{a}_2 = \underline{a}_5$$

$\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ = generátorrendszer

lin. komb.-juk segítségével az összes többi elem a vektortérben előállítható.

lin. fgetlenek: $\underline{a}_4, \underline{a}_5$; $\underline{a}_3; \underline{a}_4$; $\underline{a}_1, \underline{a}_4$; $\underline{a}_2, \underline{a}_3$; $\underline{a}_2, \underline{a}_5$;

minden pár gen. r $\Rightarrow$ bázis

Hf: ellenőrizni

~o~

$\underline{a}_1 = (1;0;0;0)$

$\underline{a}_2 = (3;0;1;0)$

$\underline{a}_3 = (0;2;0;0)$

$\underline{a}_4 = (0;0;0;1)$

$\underline{a}_5 = (0;0;4;0)$

$\underline{a}_6 = (1;2;3;4)$

Mennyi az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ által generált vektortér dimenziója?

Def.: Végesen generált vektortér dimenziója a bázisok számossága.

$\underline{a}_1 = (1;0;0;0)$

$\underline{a}_2 = (3;0;1;0)$

$\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ bázis (nincs más)

elemeinek a száma 2: az általuk generált v.tér dim-ja 2.

$\underline{a}_2$ és $\underline{a}_3$: bázis dim: 2.

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$: bázis dim: 3

$\underline{a}_7 = (4;0;0;0)$ $\underline{a}_8 = (2;4;6;8)$

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4, \underline{a}_6, \underline{a}_7, \underline{a}_8$

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4, \underline{a}_6$ lin független és generátorrendszer ($\underline{a}_7$ és $\underline{a}_8$ előállítható)

BÁZIS

$\underline{a}_7 = 4\,\underline{a}_1 + 0\cdot\underline{a}_2 + 0\,\underline{a}_4 + 0\cdot\underline{a}_6$

$\underline{a}_8 = 2\cdot\underline{a}_6 + 0\cdot\underline{a}_1 + 0\cdot\underline{a}_2 + 0\cdot\underline{a}_4$

$\underline{a}_2; \underline{a}_4; \underline{a}_6, \underline{a}_7$ bázis

$\underline{a}_2; \underline{a}_4; \underline{a}_7; \underline{a}_8$ bázis dimenzió: 4

$\underline{a}_1; \underline{a}_2; \underline{a}_4; \underline{a}_8$ bázis

~o~

$\underbrace{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5, \underline{a}_6}_{\text{bázis}}$ dim: 6

$\underline{a}_1 - \underline{a}_6; \underbrace{\underline{a}_7; \underline{a}_8}_{\text{elő tudjuk állítani a bázisból}}$ bázis $\Rightarrow \underline{a}_1 - \underline{a}_6$ dim 6

10 gyak: ZH!

$f: \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \mathbb{R}[x]$ $\quad f(x) = f'(x)$

$\Downarrow$

legfeljebb másodfokú polinom, amelynek az együtthatói $\mathbb{R}$-ből származnak

$p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $\quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$p'(x) = 2\alpha x + \beta$

$\Rightarrow$

f: homogén lin. leképezés

Lineáris algebra zh.
2003. május

1.) feladat: Oldja meg az alábbi lineáris egyenlet-rendszert a Cramer-szabály segítségével:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \;! \end{aligned}$$

$x_1 = 5$
$x_2 = 2$
$x_3 = 1$

(7p.)

2.) feladat: Oldja meg az alábbi lineáris egyenlet-rendszert Gauss eliminációval:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \;! \end{aligned}$$

$x_1, x_2, x_3 = 0$

(5p)

3.) feladat: Vizsgálja meg, hogy a következő vektor-rendszer lineárisan független-e:

$\underline{a} = (1, 0, -1, 2)$, $\underline{b} = (3, 2, -1, 4)$ $\underline{c} = (-1, 2, -1, 0)$ (5p)

4.) feladat: Adottak a következő vektorok:

$\underline{a}_1 = (1, 0, 0)$, $\underline{a}_2 = (0, 4, 0)$, $\underline{a}_3 = (0, 0, 1)$,
$\underline{a}_4 = (6, 0, 0)$, $\underline{a}_5 = (0, 0, -1)$

a.) Az adott vektorok közül válassza ki minden lehetséges módon azokat, melyek a vektortér egy bázisát adják! a_1, a_2, a_3; a_1, a_2, a_5; a_2, a_3, a_4; a_2, a_4, a_5; (4p)

b.) Mennyi a következő vektorok által generált vektortér dimenziója?

1.) $\underline{a}_1, \underline{a}_2$; 2 3.) $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4, \underline{a}_5$; 3 (4p)

2.) $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$; 3 4.) $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5$; 3