matprog.

1. előadás

11.8.

Irodalom:

- Dr. Varga József: Matematikai programozás
- Dr. Varga József: Gyakorlati programozás
- Gáspár – Temesi: Lineáris programozási gyakorlatok
- Dr. Csenyák László: Operációkutatás II.
- Kerko Béla: Optimumszámítás
- Kerko Béla: Lineáris programozás
- Dr. Hosszú Miklós: Matematikai programozás
- Hillier – Lieberman: Bevezetés az operációkutatásba

- A mat-i programozás az opkut. részterülete
- Operációkutatás:
    - kialakulását a 2. vh-tól számítjuk (amikor az angol hadseregbe matematikusokat hívtak, hogy tudományos módszerekkel oldják meg a Brit-szgt-et védő riasztóhálózattal kapcsolatos problémákat)
    - később elterjedt minden hadiüzembe
    - olyan keveréket kellett tudományos módszerekkel előállítani, melyek elősegítették a győzelmet a lehető legkisebb ráfordítással.

Emberi tevékenység szakaszai:

I. Tervezés = döntéselőkészítés

II. Döntés

III. Megvalósítás

IV. Ellenőrzés

A döntéselőkészítés célja: olyan kvantitatív változat készítése, amelyek megkönnyítik a döntéshozatalt.

· A háború végén a kutatók az iparhoz fordultak ⇒ előtérbe került az opkut gazdasági alkalmazása

· Mindig az optimális döntésre törekszünk (gyakorlatban és a gazdasági életben) → ehhez konkrét célt, célokat kell megfogalmazni.

· Optimális az a döntés, amely a célt v. a célokat a lehető legkisebb ráfordítással (vagy a legnagyobb nyereséggel) valósítja meg.

· Operációkutatás: az a tudomány, amely az optimális döntés előkészítésében matematikai módszereket használ.

Az opkut a döntéselőkészítés eszköze, a döntést az ember végzi el, így az ember nem iktatható ki.

· Operációkutatási vizsgálat lépései:

1) A probléma megfogalmazása

fontos: a problémát jól érthetően, precízen fogalmazzuk meg.

2) Matematikai modell felépítése

modell: a valóság többé-kevésbé hű mása

törekedni kell, hogy a lehető legjobban tükrözze a valóságot.

- képszerű: fénykép, makett
- analóg: grafikon, folyamatábra
- matematikai: a probléma tényezőit, illetve a köztük lévő kapcsolatot matematikai ill. logikai szimbólumokkal írja le.

3) A modell megoldása

4) A modell és a megoldás kipróbálása

5) Megvalósítás

A matematikai programozás alapproblémája:

$$\begin{cases} f_1(\underline{x}) \leq b_1 \\ f_2(\underline{x}) \leq b_2 \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \leq b_m \end{cases} \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

Keressük: $f(\underline{x})$, legalább egy szé-t és a szé helyét.

Az egyenlőség-rendszert feltételrendszernek nevezzük. Az egyenlőtlenség-rendszert kielégítő x-ek halmazát lehetséges megoldásoknak nevezzük, az $f(x)$ fgv-t célfüggvénynek nevezzük (ennek a minimumát v.a maximumát keressük.)

A minimumkeresésnél a célfüggvény (-1)-szerese ⇒ a feladat maximumfeladattá alakul.

A lehetséges megoldások közül azokat, amelyek a célfüggvényt maximalizálják, OPTIMÁLIS megoldásnak nevezzük.

Ha: $f_1, f_2 \dots f_n$ és $f(x)$ fgv-ek mind lineárisak ⇒ lineáris programozásról beszélünk.

Kétismeretlenes lineáris programozási feladatok megoldása grafikusan

Példa:

Egy üzem kétféle terméket gyárt, a termékek előállítása 3 gépen (erőforráson) történik. Mennyi terméket állítsunk elő az I-ből és II-ből, hogy a gépek kapacitását ne lépjük túl, és a nyereség a legnagyobb legyen?

	I.	II.	(idő) kapacitás
A	1	2	16
B	1	1	15
C	0	3	18
nyereség (pénz)	3	5	

→ technológiai táblázat

Legyen: x_1 : I-esből gyártandó mennyiség

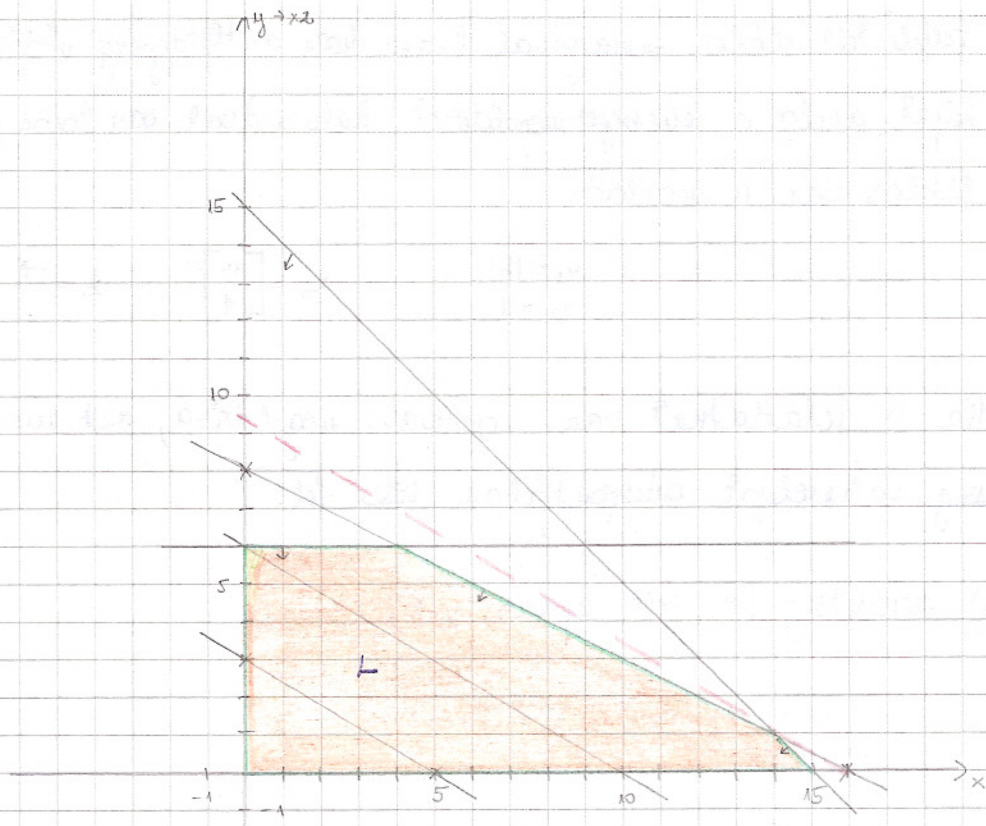
x_2 : II-esből gyártandó mennyiség

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{I.} & x_1 + 2x_2 \leq 16 \\
\text{II.} & x_1 + x_2 \leq 15 \\
\text{III.} & 3x_2 \leq 18 \\
\text{IV.} & x_1 \geq 0 \\
\text{V.} & x_2 \geq 0
\end{array}\right\}
$$

A feladat feltételrendszere

$z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow max$ célfüggvény

A) Kengelymebeet.



I. $x_1 + 2x_2 \leq 16$ ha $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 8$

$x_1 + 2x_2 = 16$ ha $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 16$

II. $x_1 + x_2 \leq 15$ ha $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 15$

$x_1 + x_2 = 15$ ha $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 15$

III. $3x_2 \leq 18$ $x_2 = 6$

$3x_2 = 18$

Mego.: Egyenlőtlenségekhez tartozó félsíkok metszete adja a lehetséges megoldásokat.

L = Mindig konvex, zárt és korlátos vagy nem korlátos.

(Egy félsík zárt, ha a határolópontjai is hozzátartoznak, két zárt félsík metszete is zárt.)

Meg kell keresni, hogy L pontjai közül melyiknél veszi fel a $z = 3x_1 + 5x_2$ maximális értékét.

1) Legyen $z = 15$ ha $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$; ha $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$

2) Legyen $z = 30$

A szintvonalak párhuzamosak.

Felfelé kell eltolni önmagával ||-an, hogy a célfüggvény nőjön. Addig toljuk, amíg a lehetséges megoldások halmazával van közös pontja.

Eltolás után a megoldás:

$$x_1 = 14 \qquad \underline{x_0} = \begin{bmatrix} 14 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad z = 47$$
$$x_2 = 1$$

Ha a feladatnak van optimális megoldása, azt mindig a konvex sokszög valamelyik csúcspontjában veszi fel.

3) meredekség (ki kell fejezni x_2-t)

I. $x_1 + 2x_2 \leq 16$ $\qquad x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 8$

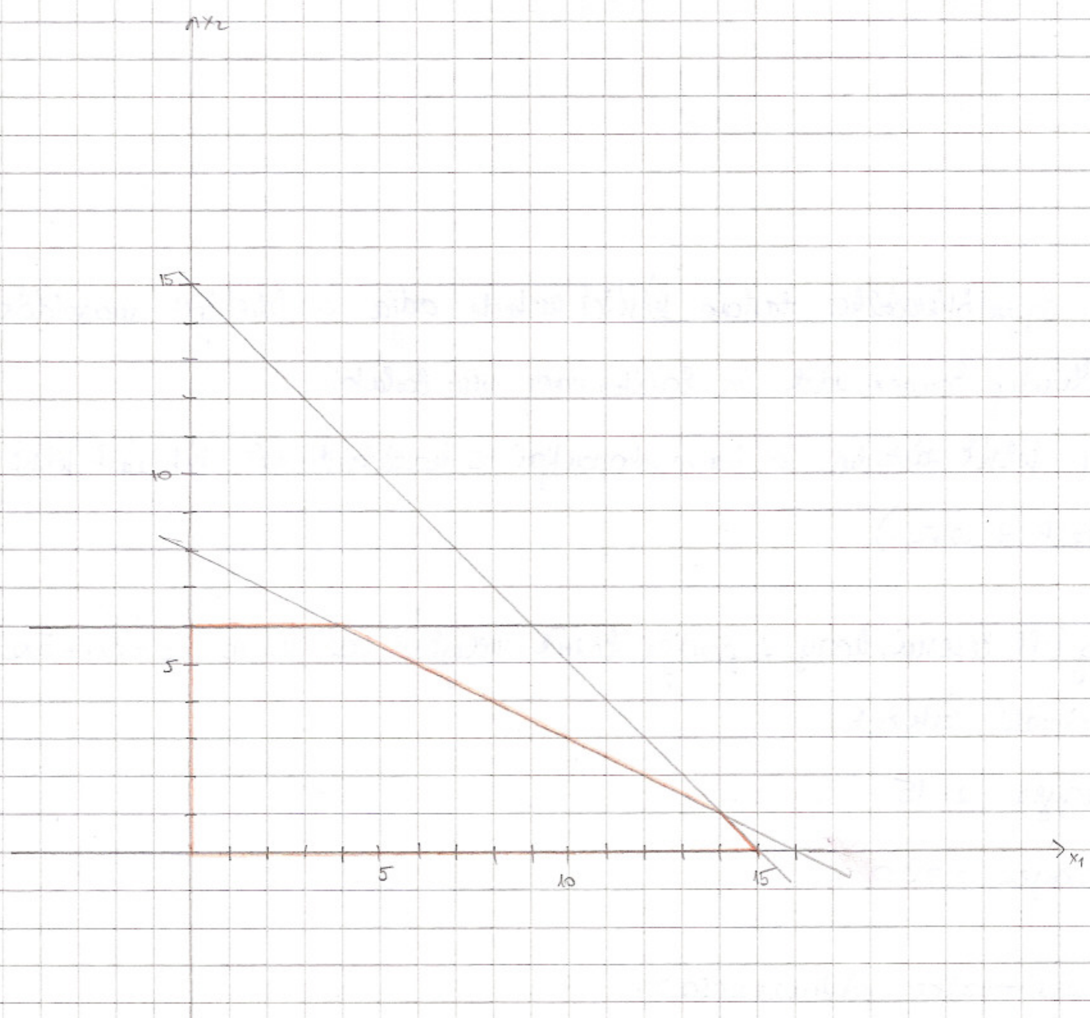
$x_1 + 2x_2 = 16$

II. $x_1 + x_2 \leq 15$ $\qquad x_2 = 15 - x_1$

$x_1 + x_2 = 15$

III. $3x_2 \leq 18$ $\qquad x_2 = 6$

$3x_2 = 18$

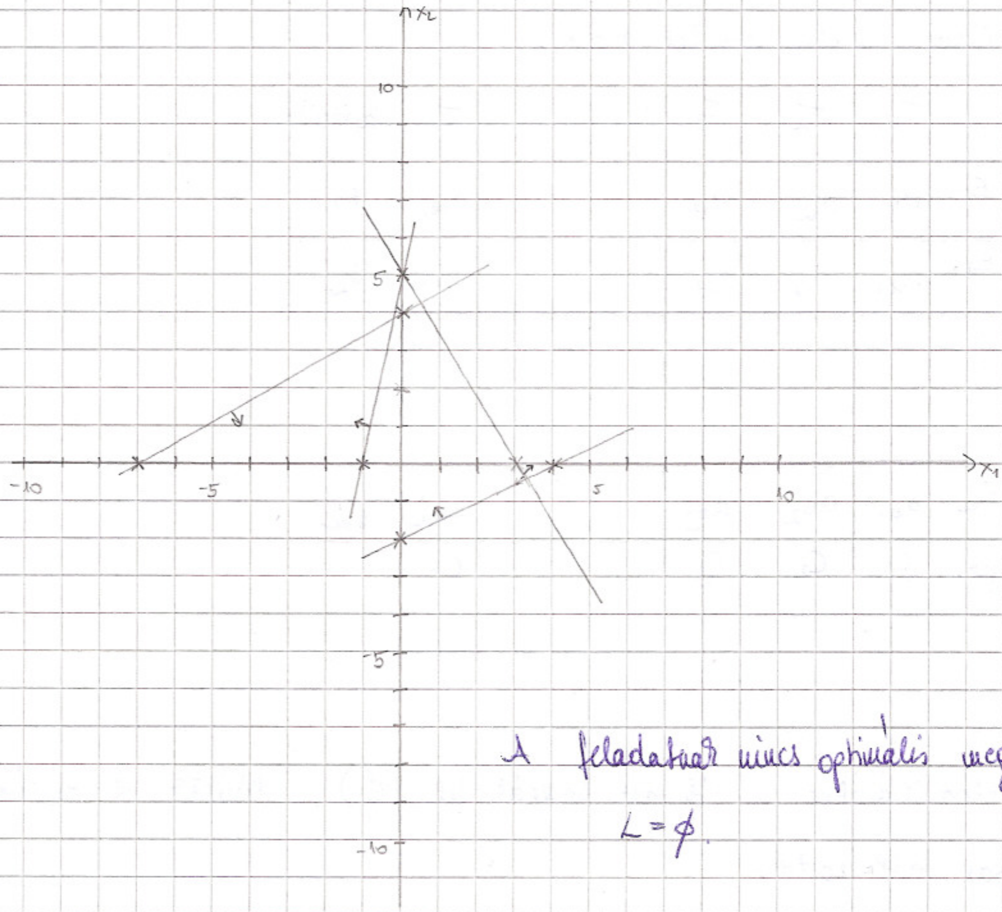


Példa:

$$\left.\begin{array}{c} 5x_1+3x_2 \geq 15 \\ x_1-2x_2 \leq 4 \\ -5x_1+x_2 \geq 5 \\ -4x_1+7x_2 \leq 28 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

$5x_1+3x_2=15$
$x_1-2x_2=4$
$-5x_1+x_2=5$
$-4x_1+7x_2=28$

$$z=2x_1+4x_2 \to \max$$



A feladatnak nincs optimális megoldása.

$L=\emptyset$.

II. 15. 2. előadás

elmaradt.

II. 22. 3. előadás

Tfh: egy üzem n db terméket gyárt.

	T_1	T_2	T_3	...	T_n	kapacitás
E_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1n}	b_1
E_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2n}	b_2
$\vdots$						
E_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}		a_{mn}	b_m
nyer.	C_1	C_2	C_3		C_n	

A termék előállításához m erőforrást használ fel. (E) Készítsük el az ún. technológiai táblázatot.

a_{ij}: az i. erőforrásból mennyit használ a j. termék

Legyen az 1-es termék nyeresége C_1 ...stb.

Mennyit kell gyártani az egyes termékekből, hogy a kapacitásokat ne lépjük túl és a nyereség a legnagyobb legyen?

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1..n) \end{cases}$$

A feladat feltételrendszere.

$$z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \to max$$

mat. prog.

Az ismeretlenek együtthatóiból képzett mátrix legyen A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Kapacitások:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{c}^* \Rightarrow \underline{c}$ transzponáltja $\qquad \underline{c}^* = [c_1, c_2 \dots c_n]$

Ezzel a jelöléssel a feladat:

$$\left.\begin{array}{l} A\underline{x} \leq \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{array}\right\} \text{felt. rendszer}$$

$$z = \underline{c}^* \underline{x} \to \max$$

Azokat az $\underline{x}$-eket, amelyek a felt-r-t kielégítik ⇒ lehetséges megoldások. A lehetséges mego között, amelyiknél a célfgv felveszi a max-t, optimális mego-nak nevezzük.

Lin. programozási feladatok osztályozása:

1) Normál feladatok:

alakja:
$$\left.\begin{array}{l} A\underline{x} \leq \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \\ \underline{b} \geq \underline{0} \end{array}\right\}$$

$$z = \underline{c}^* \underline{x} \to \max$$

2) Módosított normál feladatok:

$$\left.\begin{array}{l} A_1\underline{x} \leq \underline{b}_1 \\ A_2\underline{x} = \underline{b}_2 \\ \underline{x} \geq 0 \quad \underline{b}_1 \geq \underline{0} \quad \underline{b}_2 \geq \underline{0} \end{array}\right\}$$

$$z = \underline{c}^* \underline{x} \to \max$$

3) Általános feladat:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \underline{x} \leq \underline{b_1} \\ A_2 \underline{x} = \underline{b_2} \\ A_3 \underline{x} \geq \underline{b_3} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \quad \underline{b_1} \geq \underline{0} \quad \underline{b_2} \geq \underline{0} \quad \underline{b_3} \geq \underline{0} \end{array}\right\}$$

$$z = \underline{C}^* \cdot \underline{x} \rightarrow \max$$

Szerepelhet $\leq, =, \geq$ reláció. (Mindenképpen kell szerepelnie $\geq$-nek!)

<u>Normál feladatok megoldása:</u>

- 1947: Dantzig ekkor lett módszer a ~-ra ⇒ SZIMPLEX módszer
- lényege (pl-n keresztül)

Pl.: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30 & u_1 \\ x_1 + x_3 \leq 20 & u_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 35 & u_3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$

Normál feladat, mert csak $\leq$ szerepel és minden jobb oldali érték pozitív

$$z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + u_1 = 30$$
$$x_1 + x_3 + u_2 = 20$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + u_3 = 35$$

$\underline{x} = \underline{0}$ $\quad x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$

↳ triviális megoldás, ekkor: $u_1 = 30$; $u_2 = 20$; $u_3 = 35$ $\quad \underline{u} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 35 \end{bmatrix}$

$z = 0$

Addig kell csinálni, míg (kiindulva egy megoldásból) el nem jutunk az opt. mego-hoz, v. kiderül, h. a feladatnak nincs opt. meg-a.

Szimplex táblázat elkészítése:

általánosan:

	$\underline{x}^*$	
$\underline{u}$	ism. együtthatók A	$\underline{b}$
$-z$	$\underline{c}^*$	0

$\underline{c}^*$ → célfgv. ismeretlenei együtthatói

Ezért kell (-z)-t írni, hogy erre a sorra is alkalmazhatók legyenek ugyanazok a műveletek.

- vektorok a változóknak, amelyek az 1. sorban vannak : 0.
- A bal oldali változók értékei = jobb oldali konstansok értékeivel.
- A célfgv értékének (-1)-szeresét a jobb alsó sarokból olvassuk ki.

Készítsük el korábbi feladatra a szimplex táblát!

	x_1	x_2	x_3		
u_1	1	2	1	30	30/1
u_2	1	0	1	20	20/1
u_3	2	1	1	35	35/1
$-z$	2	1	4	0	
			↑		

Ha az utolsó sor középső részében nincs pozitív szám → a feladat optimális megoldást szolgáltat.

Válasszuk a legnagyobb értéket

↳ ő növeli a legjobban a célfüggvény értékét.

A hozzá tartozó oszlopot : GENERÁLÓ oszlopnak nevezzük.

A generáló oszlopban lévő pozitív értékekkel osztjuk el a konstansokat. A így kapott számok közül kell a legkisebbet kiválasztani (a felt-r. teljesülése miatt). A hozzá tartozó sort GENERÁLÓ sornak nevezzük. A metszetben lévő elemet GENERÁLÓ elemnek nevezzük.

	x_1	x_2	u_2		
3. u_1	0	2	−1	10	10/2
x_3	1	0	1	20	1.
u_3	1	1	−1	15	15/1
$-z$	−2	1	−4	−80	

1. A generáló sorhoz tartozó új sor elemeit számoljuk ki. Vegyük a generáló elem reciprokát, és szorozzuk meg a generáló sor elemeit a reciprokkal. Az így kapott értékeket írjuk be a sorba, kivéve a generáló elemet. 2. Ezután a generáló oszlop elemeit számoljuk ki. Megkapjuk, ha az elemeket megszorozzuk a generáló elem reciprokának (−1)-szeresével. A generáló elem helyére annak reciprokát írjuk.

A többi elemet úgy kapjuk meg, hogy eredeti értékükből kivonjuk a régi generáló oszlopbeli megfelelő elem és az új generáló sorbeli elem szorzatát.

$1-1\cdot1=0$ $\qquad 2-1\cdot0=2$ $\qquad 30-1\cdot20=10$

$35-1\cdot20=15$

$2-1\cdot1=1$ $\qquad 1-1\cdot0=1$ $\qquad 0-4\cdot20=-80$

$2-4\cdot1=-2$ $\qquad 1-4\cdot0=1$

Kiolvasható: $x_1=0$, $x_2=0$ → még az első sorban van ⇒ 0.

$x_3=20$

$z=80$

$u_1=10$; $u_2=0$; $u_3=15$

3. Még nem optimális, mert az utolsó sorban van pozitív szám. A hozzá tartozó oszlop a gen. oszlop.

x_2 helyet cserél u_1-gyel.

	x_1	u_1	u_2	
x_2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5
x_3	1	0	1	20
u_3	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	10
$-z$	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	-85

$-\frac{1}{2}$ a gen reciprokának ellentettje.

$1-0\cdot 0=1$	$1-0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1$	$20-0\cdot 5=20$
$1-1\cdot 0=1$	$-1-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1+\frac{1}{2}=-0{,}5$	$15-1\cdot 5=10$
$-2-1\cdot 0=-2$	$-4-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-3{,}5$	$-80-1\cdot 5=-85$

Van optimális mego.:

$x_1=0$
$x_2=5$
$x_3=20$

$$\underline{x}_0=\begin{bmatrix}0\\5\\20\end{bmatrix}$$

$z=85$

Felmerülő problémák a szimplex-módszer alkalmazásakor:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2 &\le 10\\ x_1+x_2 &\le 7\\ x_1 &\le 6\\ x_2 &\le 4\\ x_1 &\ge 0\\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\}$$

$z=3x_1+6x_2 \Rightarrow \max$

$\underline{x}=\underline{0} \Rightarrow z=0$

	x_1	x_2			
u_1	1	1	10		10/1
u_2	1	1	7		7/1
u_3	1	0	6		
u_4	0	1	4	←	4/1
$-z$	3	6	0		
		↑			

(-1)·reciprokkal szorozzuk

	x_1	u_4			
u_1	1	-1	6		6/1
u_2	1	-1	3	←	3/1
u_3	1	0	6		6/1
x_2	0	1	4		
$-z$	3	-6	-24		
	↑				

→ gen. elem reciproka

→ reciprokkal szorozzuk

$1 - 1 \cdot 0 = 1$ $\quad$ $10 - 1 \cdot 4 = 6$

$1 - 1 \cdot 0 = 1$ $\quad$ $7 - 1 \cdot 4 = 3$

$1 - 0 \cdot 0 = 1$ $\quad$ $6 - 0 \cdot 4 = 6$

$3 - 6 \cdot 0 = 3$ $\quad$ $0 - 6 \cdot 4 = -24$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad z = 24$

	u_2	u_4	
u_1	-1	0	3
x_1	1	-1	3
u_3	-1	1	3
x_2	0	1	4
$-z$	-3	-3	-33

$\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$z = 33$

$-1 - 1 \cdot (-1) = 0$ $\quad$ $6 - 1 \cdot 3 = 3$

$0 - 1 \cdot (-1) = 1$ $\quad$ $6 - 1 \cdot 3 = 3$

$1 - 0 \cdot (-1) = 1$ $\quad$ $4 - 0 \cdot 3 = 4$

$-6 - 3 \cdot (-1) = -3$ $\quad$ $-24 - 3 \cdot 3 = -33$

Hibás volt a feltételrendszer!

Hf:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

$x_1 + 2x_2 = 10$
$x_1 + x_2 = 7$
$x_1 = 6$
$x_2 = 4$

$z = 3x_1 + 6x_2 \to \max$ $6 = 3x_1 + 6x_2$; $12 = 3x_1 + 6x_2$

	x_1	x_2		
u_1	1	2	10	10/2
u_2	1	1	7	7/1
u_3	1	0	6	
u_4	0	1	4	4/1
$-z$	3	6	0	

	x_1	u_4		
u_1	1	-2	2	2/1
u_2	1	-1	3	3/1
u_3	1	0	6	6/1
x_2	0	1	4	
$-z$	3	-6	-24	

$1 - 2 \cdot 0 = 1$ $10 - 2 \cdot 4 = 2$
$1 - 1 \cdot 0 = 1$ $7 - 1 \cdot 4 = 3$
$1 - 0 \cdot 0 = 1$ $6 - 0 \cdot 4 = 6$
$3 - 6 \cdot 0 = 3$ $0 - 6 \cdot 4 = -24$

	u_1	u_4		
x_1	1	-2	2	-1
u_2	-1	1	1	1
u_3	-1	2	4	2
x_2	0	1	4	4
$-z$	-3	0	-30	

$-1 - 1 \cdot (-2) = -1 + 2 = 1$
$0 - 1 \cdot (-2) = 2$
$1 - 0 \cdot (-2) = 1$
$\mapsto -6 - 3 \cdot (-2) = 0$
$3 - 1 \cdot 2 = 1$
$6 - 1 \cdot 2 = 4$
$4 - 0 \cdot 2 = 4$
$-24 - 3 \cdot 2 = -30$

	u_1	x_1		
u_4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	2
u_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	4
u_3	0	1	6	6
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	10
$-z$	-3	0	-30	

$-1 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -0{,}5$
$-1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 1 = 0$
$0 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
$-3 - 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$

$1 - 1 \cdot (-1) = 2$
$4 - 2 \cdot (-1) = 6$
$4 - 1 \cdot (-1) = 5$
$-30 - 0 \cdot (-1) = -30$

	u_1	u_4	
x_1	1	-2	2
u_2	-1	1	1
u_3	-1	2	4
x_2	0	1	4
$-z$	-3	0	-30

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 = -1$

$0 - 1 \cdot 1 = -1$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 = 0$

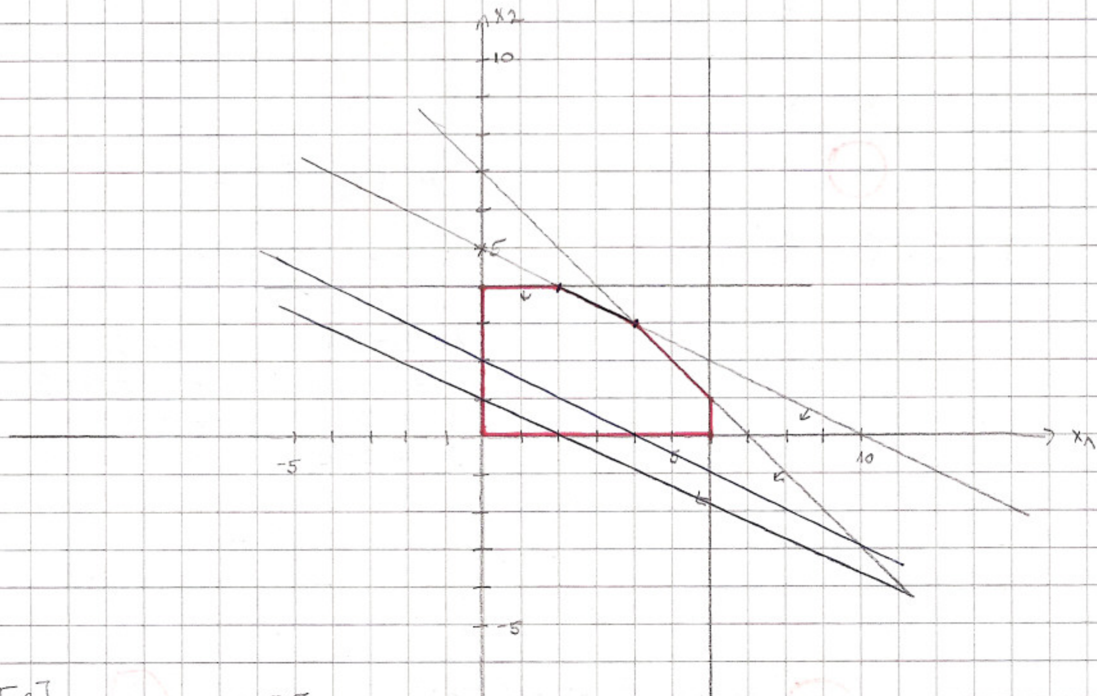
$-3 - 0 \cdot 1 = -3$

$2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

$6 - 1 \cdot 2 = 4$

$5 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 4$

$-30 - 0 \cdot 2 = -30$



$\underline{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\underline{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\underline{x}_0 = \lambda \underline{x}_0^{(1)} + (1-\lambda) \underline{x}_0^{(2)}$ $0 \le \lambda \le 1$

$z = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 6 + 24 = 30$

$z = 3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 12 + 18 = 30$