4. előadás

III.1.

Problémák a módszer során:

1) Ha az utolsó sorban van 0 és fölötte pozitív szám van ⇒ van több megoldás.

2) Ha több azonos szám van, ilyenkor bármelyiket választhatjuk.

3) Amikor az utolsó sorban van 0, de felette nincs pozitív szám ⇒ nem választhatunk generáló elemet ⇒ 1 megoldás van.

pl.:
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \leq 100 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \leq 80 \\ x_1 + x_3 - x_4 \leq 50 \\ x_i \leq 0 \qquad i = 1..5 \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 \to \max$$

Mego: lsd. lapon (I)

4) Amikor az utolsó sorban még ∃ pozitív szám, de fölötte nincs pozitív szám (nem tudunk generáló elemet választani) ⇒ a feladatnak nincs optimális megoldása, mert a célfüggvény nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán.

Mego: lsd. lapon. (II.)

5) Degeneráció: Akkor beszélünk ~-ről, mikor a szimplex-táblázat utolsó oszlopába 0 kerül.

a) Eleve olyan az egyenletrendszer, h. a konstansok között eleve van 0.

b) Ha nem tudunk egyértelműen legkisebb elemet választani a konstansok osztása során.

(Előbb - utóbb az utolsó oszlopban 0 lesz.)

Előfordulhat végtelen ciklus.

Mego: lsd. lapon (III.)

→ Az x-ek az első sorba visszakerülhet.

Mego: lsd. lapon (IV.)

FELADAT a degenerációra:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 \le 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 \le 14 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_4 \le 28 \\ x_i \ge 0 \quad i = 1..4 \end{cases}$$

$z = 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow max$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	1	0	-1	1	6 ←
u_2	1	-1	0	2	14
u_3	2	-1	0	5	28
$-z$	4	-2	-1	3	0
	↑				

	u_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	-1	1	6
u_2	-1	-1	1	1	8 ← 8/1
u_3	-2	-1	2	3	16 ← 16/2 ←
$-z$	-4	-2	3	-1	-24
			↑		

$-1 - 1 \cdot 0 = -1$
$-1 - 2 \cdot 0 = -1$
$-2 \cdot 4 \cdot 0 = -2$
$0 - 1 \cdot (-1) = 1$
$0 - 2 \cdot (-1) = 2$
$-1 - 4 \cdot (-1) = +3$
$2 - 1 \cdot 1 = 1$
$5 - 2 \cdot 1 = 3$
$3 - 4 \cdot 1 = -1$
$14 - 1 \cdot 6 = 8$
$28 - 2 \cdot 6 = 16$
$0 - 4 \cdot 6 = -24$

Degeneráció lépett fel ⇒ nem lehet egyértelműen legkisebb elemet választani.

u_1	u_2	u_3
1	0	0
-1	1	0
-2	0	1

Fel kell venni egy segédtáblázatot, amelynek annyi sora és oszlopa van, ahány segédváltozó. Megnézzük melyik szerepel az első sorban => így az u_1 értékeit az eredeti táblázat elemei adják. (Ami u_1 alatt van)

u_2 és u_3 nem szerepel az első sorban, itt az értékek 0-k, kivéve, ahol a változó indexe = u indexével. Oda 1 kerül.

A segédtáblázatban osszuk el a táblázatban lévő elemeket a generáló elem „jelölttel". (Mivel a gen elem a 2. és 3. sorban van, a segédtáblázatban is ott dolgozunk.)

$$\begin{matrix} -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{0}{1} \\ -\frac{2}{2} & \boxed{\frac{0}{2}} & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Összehasonlítjuk, és ott állunk meg, ahol a két érték nem egyezik meg.

A két érték közül a kisebbet kell választani és a hozzá tartozó gen. elem lesz jó számunkra => nem keveredünk végtelen ciklusba.

	u_1	x_2	u_3	x_4	
x_1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	14
u_2	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	8
$-z$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{11}{2}$	-48

$1-(-1)\cdot(-1) = 1-1=0$
$-1-1\cdot(-1) = -1+1=0$
$-4-3\cdot(-1) = -4+3=-1$

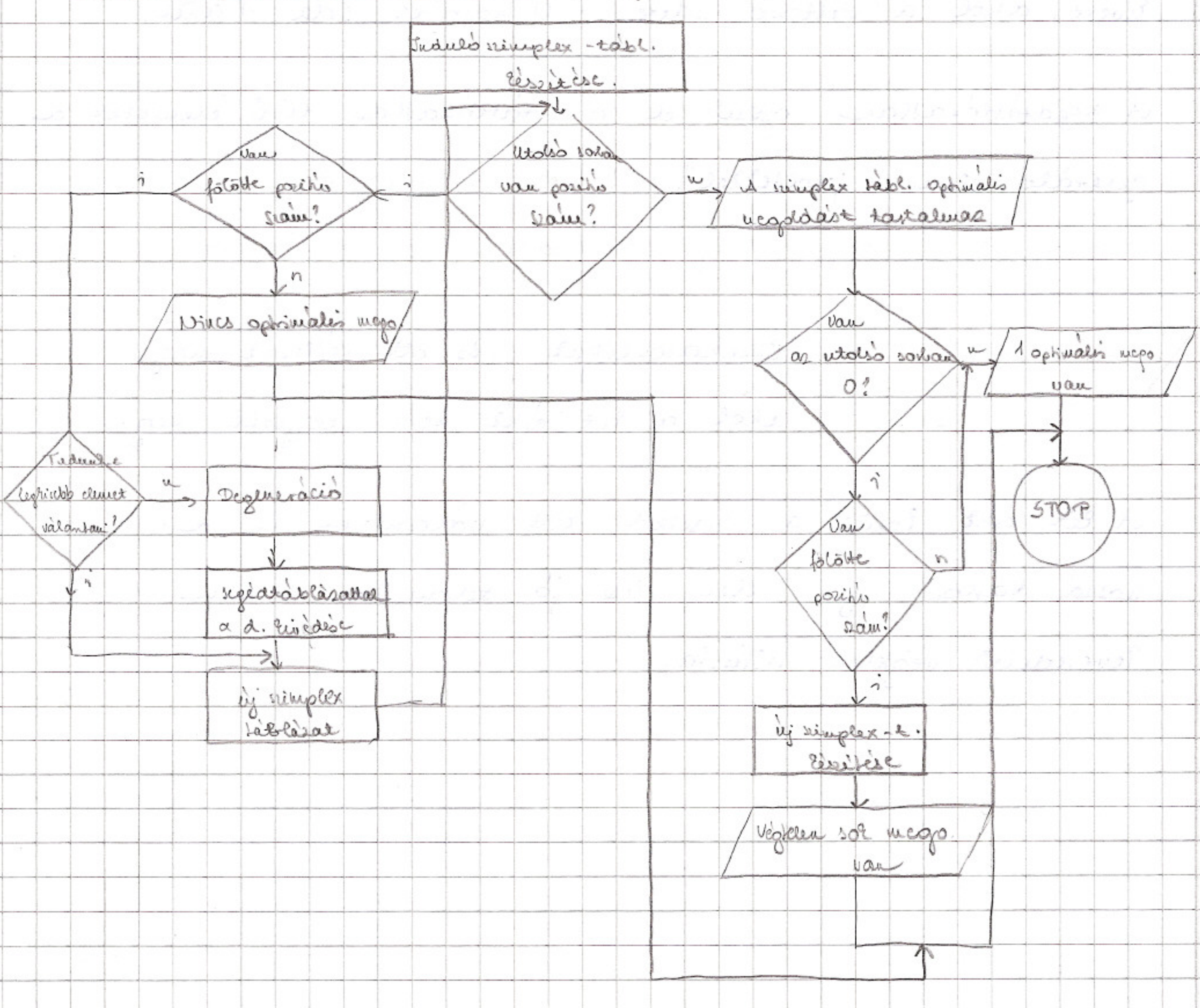
$0-(-1)\cdot(-\frac{1}{2}) = 0-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
$-1-1\cdot(-\frac{1}{2}) = -1+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
$-2-3\cdot(-\frac{1}{2}) = -2+\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$1-(-1)\cdot\frac{3}{2} = 1+\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$
$1-1\cdot\frac{3}{2} = 1-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$
$-1-3\cdot\frac{3}{2} = -1-\frac{9}{2} = -\frac{11}{2}$

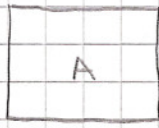
$6-(-1)\cdot 8 = 6+8=14$
$8-1\cdot 8=0$
$-24-3\cdot 8=-48$

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z=48$$

Normál feladat megoldásának algoritmusa:

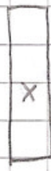


Normál feladat megoldása táblázatkezelővel (SOLVER)



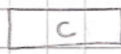
A: ismeretlenek együtthatóiból képzett mátrix

B: konstansokat tartalmazó tartomány



X: Vegyünk fel, annyi cellából álló oszloptartományt, ahány ismeretlenünk van, és minden cellába 0-t írjunk.

ismeretlenek tartománya



C: Írjuk egy sortartományba a célfgv-ben szereplő együtthatókat.

Egyetlen cellában számoljuk ki a célfgv értékét

mszorzat(C;X)

Feltételek:

1. felt
2. felt

Annyit kell adni, ahány egyenlőtlenség van.

A egyenlőségek bal oldala kerül oda az ismeretlenek mellett. (ami most 0.)

mszorzat(A;X) ctrl+shift+enter

Adjuk ki: Eszközök / Solver parancsot.

megjelenik egy panel:
- meg kell adni a célcellát (amelyben a célértéket kiszámoltuk)
- max, min
- módosuló cellák: X tartomány

$\boxed{\text{Hozzáadás}}$ gomb → feltételek megadása

új panel: itt kell megadni a feltételeket

1. felt.	reláció	b első eleme

folyt, míg minden feltétel meg nincs adva

x	$\geq$	0

jobb oldalon: $\boxed{\text{Megoldás}}$ gomb ⇒ a Solver elkezd dolgozni

megjelenik egy új panel, amelyen közli, hogy talált-e megoldást vagy nem.
Ha talált megoldást: Megtartjuk az eredeti induló értékeket, v. írja felül?

Feladat:

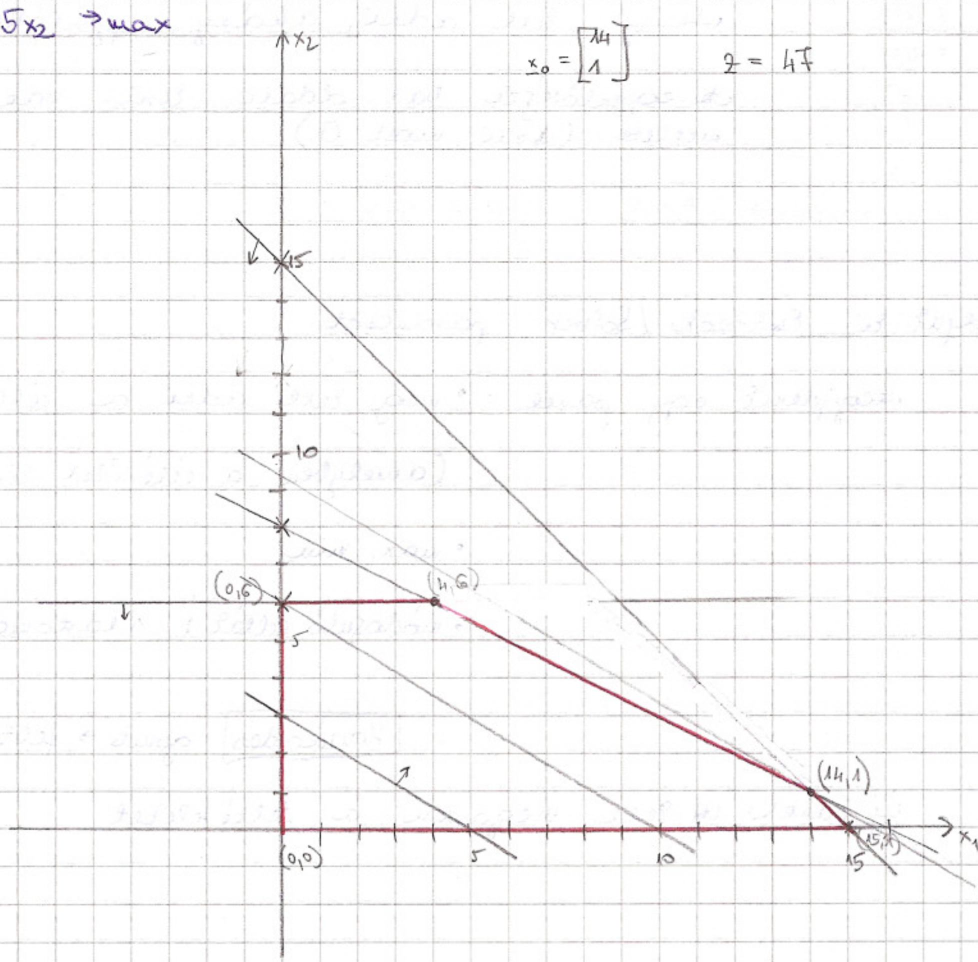
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ 3x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$15 = 3x_1 + 5x_2$

$30 = 3x_1 + 5x_2$

$z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow max$

$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 14 \\ 1 \end{bmatrix}$ $z = 47$



	x_1	x_2		
u_1	1	2	16	$16/2$
u_2	1	1	15	$15/1$
u_3	0	3	18	$18/3$
$-z$	3	5	0	

	x_1	u_3	
u_1	1	$-2/3$	4
u_2	1	$-1/3$	9
x_2	0	$1/3$	6
$-z$	3	$-5/3$	-30

$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\quad z = 30$

	u_1	u_3	
x_1	1	$-2/3$	4
u_2	-1	$1/3$	5
x_2	0	$1/3$	6
$-z$	-3	$1/3$	-42

$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\quad z = 42$

	u_1	u_2	
x_1	-1	2	14
u_3	-3	3	15
x_2	1	-1	1
$-z$	-2	-1	-47

$\underline{x_0} = \begin{bmatrix} 14 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad z = 47$

III. 8.

5. előadás

Módosított normál feladat megoldása

A lin. prog-i feladatok között azokat, amelyeknek a feltételében a $\leq$ -en kívül $=$ -ek is szerepelnek, módosított normál feladatnak nevezzük.

Mat. formája:

$$\begin{cases} A_1 \underline{x} \leq \underline{b}_1 \\ A_2 \underline{x} = \underline{b}_2 \\ \\ \underline{x} \geq \underline{0} \; ; \; \underline{b}_1 \geq \underline{0} \; ; \; \underline{b}_2 \geq \underline{0} \end{cases}$$

$$z = \underline{c}^* \cdot \underline{x} \rightarrow \max.$$

Vezessük be $\underline{u}$ segédvektort (eltérés vektor), hogy az egyenlőtlenségeket egyenlőséggé írjuk.

$$A_1 \underline{x} + E_1 \underline{u} = \underline{b}_1 \qquad E_1 : \text{egységmátrix}$$

Egyenlőségeknél bevezetjük $\hat{\underline{u}}$ -t az egységes felhasználás miatt.

$$A_2 \underline{x} + E_2 \hat{\underline{u}} = \underline{b}_2$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}, \; \underline{b}_1 \geq \underline{0}, \; \underline{b}_2 \geq \underline{0} \qquad \hat{\underline{u}} = \underline{0}$$

Írjuk fel az induló szimplex táblázatot!

	$\underline{x}^*$	
$\underline{u}$	A_1	$\underline{b}_1$
$\hat{\underline{u}}$	A_2	$\underline{b}_2$
$-z$	$\underline{c}^*$	0
$-\hat{z}$	$\underline{1}^* A_2$	0

Ha $\underline{x}=\underline{0}$ mego lenne: $\underline{u}=\underline{b}_1$, $\hat{\underline{u}}=\underline{b}_2$ ↯ $\hat{\underline{u}}=\underline{0}$

Sima szimplex-módszerrel nem lehet megoldani, kétfázisú szimplex módszerrel oldjuk meg.

Először: keresünk lehetséges megoldást

2.: megkeressük az opt. megoldást, ha van.

$\hat{z}$: másodlagos célfüggvény: $\hat{z} = \underline{1}^* \cdot A_2 \, \underline{x}$

↳ az egyenlőségeket összeadjuk

<u>Példa</u>:

1 $\quad x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 90$

2 $\quad 3x_2 + x_4 + 2x_5 \leq 50$

3 $\quad x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 60$

4 $\quad x_1 + x_3 + x_5 = 80$

$x_i \geq 0 \quad i = 1..5$

$z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 \to \max$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
u_1	1	4	1	2	0	90	90/1
u_2	0	3	0	1	2	50	
$\hat{u}_1$	1	2	0	1	1	60 ←	60/1
$\hat{u}_2$	1	0	1	0	1	80	80/1
$-z$	4	3	1	5	1	0	
$-\hat{z}$	2	2	1	1	2	0	
	↑						

Másodlagos célfgv:

$\hat{z} = (3) + (4)$

$\hat{z} = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 140$

	$\hat{u}_1$	x_2	x_3	x_4	x_5		
u_1		2	1	1	-1	30	30/1
u_2		3	0	1	2	50	
x_1		2	0	1	1	60	
$\hat{u}_2$		-2	1	-1	0	20	20/1
$-z$		-5	1	1	-3	-240	
$-\hat{z}$		-2	1	-1	0	-120	

Az első oszlopot nem számoljuk, nehogy $\hat{u}_1$ visszakerüljön balra, mert így az értéke 0.

$4 - 1 \cdot 2 = 2$ $\quad$ $2 - 1 \cdot 1 = 1$

$3 - 0 \cdot 2 = 3$ $\quad$ $1 - 0 \cdot 1 = 1$

$0 - 1 \cdot 2 = -2$ $\quad$ $0 - 1 \cdot 1 = -1$

$3 - 4 \cdot 2 = -5$ $\quad$ $5 - 4 \cdot 1 = 1$

$2 - 2 \cdot 2 = -2$ $\quad$ $1 - 2 \cdot 1 = -1$

$0 - 1 \cdot 1 = -1$ $\quad$ $90 - 1 \cdot 60 = 30$

$2 - 0 \cdot 1 = 2$ $\quad$ $50 - 0 \cdot 60 = 50$

$1 - 1 \cdot 1 = 0$ $\quad$ $80 - 1 \cdot 60 = 20$

$1 - 4 \cdot 1 = -3$ $\quad$ $0 - 4 \cdot 60 = -240$

$2 - 2 \cdot 1 = 0$ $\quad$ $0 - 2 \cdot 60 = -120$

	$\hat{u}_1$	x_2	$\hat{u}_2$	x_4	x_5		
u_1		4		2	-1	10	10/2
u_2		3		1	2	50	50/1
x_1		2		1	1	60	60/1
x_3		-2		-1	0	20	
$-z$		-3		2	-3	-260	
$-\hat{z}$		0		0	0	-140	

$2 - 1 \cdot (-2) = 4$ $\quad$ $1 - 1 \cdot (-1) = 2$

$3 - 0 \cdot (-2) = 3$ $\quad$ $1 - 0 \cdot (-1) = 1$

$2 - 0 \cdot (-2) = 2$ $\quad$ $1 - 0 \cdot (-1) = 1$

$-5 - 1 \cdot (-2) = -3$ $\quad$ $1 - 1 \cdot (-1) = 2$

$-2 - 1 \cdot (-2) = 0$ $\quad$ $-1 - 1 \cdot (-1) = 0$

$30 - 1 \cdot (20) = 10$

$50 - 0 \cdot 20 = 50$

$60 - 0 \cdot 20 = 60$

$-240 - 1 \cdot 20 = -260$

$-120 - 1 \cdot 20 = -140$

Most tartalmaz a táblázat egy lehetséges megoldást.

- nincs $\hat{u}$ bal oldalon
- nincs poz. érték az utolsó sorban
- a konstans → 140.

lehetséges megoldás:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \end{bmatrix} \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az elsődleges célfgv-nyel dolgozunk tovább.

	$\hat{u}_1$	x_2	$\hat{u}_2$	u_1	x_5	
x_4		2		$1/2$	$-1/2$	5
u_2		1		$-1/2$	$5/2$	45
x_1		0		$-1/2$	$3/2$	55
x_3		0		$1/2$	$-1/2$	25
$-z$		-7		-1	-2	-270

$3 - 1 \cdot 2 = 1$
$2 - 1 \cdot 2 = 0$
$-2 - (-1) \cdot 2 = 0$
$-3 - 2 \cdot 2 = -7$

$2 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$
$1 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$
$0 - (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$
$-3 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

$50 - 1 \cdot 5 = 45$
$60 - 1 \cdot 5 = 55$
$20 - (-1)5 = 25$
$-260 - 2 \cdot 5 = -270$

$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 55 \\ 0 \\ 25 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z = 270 \qquad \underline{\hat{u}} = \underline{0}$

Nincs megoldása a módosított normál feladatnak megoldása, ha:

1) Nincs lehetséges megoldás.

   a) Az $\underline{\hat{u}}$ elemei nem kerülnek fel az első sorba.

   b) A másodlagos célfüggvény nem egyenlő $\underline{b}_2$-vel. ($\hat{z} \neq \underline{b}_2$)

2) Van lehetséges megoldás, de az elsődleges célfüggvény nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán.
(az utolsó sorban még van pozitív szám, de felette már nincs.)

Általános feladat.

Azokat a lin. progr.-i feladatokat, amelyekben $\geq$ relációk is szerepelnek, általános feladatoknak nevezzük.

$$
\begin{cases}
A_1 \underline{x} \leq \underline{b}_1 \\
A_2 \underline{x} = \underline{b}_2 \\
A_3 \underline{x} \geq \underline{b}_3 \\
\\
\underline{x} \geq \underline{0}, \quad \underline{b}_1 \geq \underline{0}, \quad \underline{b}_2 \geq \underline{0}, \quad \underline{b}_3 \geq \underline{0}
\end{cases}
$$

$$z = \underline{c}^* \cdot \underline{x} \to \max.$$

1 $\underline{u}: A_1 \underline{x} + E_1 \underline{u} = \underline{b}_1$

2 $\underline{\hat{u}}_1: A_2 \underline{x} + E_2 \underline{\hat{u}}_1 = \underline{b}_2$

$\underline{w}: A_3 \underline{x} - E_3 \underline{w} = \underline{b}_3 \to \underline{\hat{u}}_2$

3 $A_3 \underline{x} - E_3 \underline{w} + E_4 \underline{\hat{u}}_2 = \underline{b}_3$

$\underline{x} \geq \underline{0}, \ \underline{b}_1 \geq \underline{0}, \ \underline{b}_2 \geq \underline{0}, \ \underline{b}_3 \geq \underline{0}$

$\underline{\hat{u}}_1 = \underline{0}, \ \underline{\hat{u}}_2 = 0.$

Az 1, 2, 3 egyenleteket figyelembe véve, visszavezettük normál módosított feladatra, csak a w-t is ismeretlennek kell tekinteni.

	$\underline{x}^*$	$\underline{w}^*$	
$\underline{u}$	A_1	0	$\underline{b}_1$
$\underline{\hat{u}}_1$	A_2	0	$\underline{b}_2$
$\underline{\hat{u}}_2$	A_3	$-E_3$	$\underline{b}_3$
$-z$	$\underline{c}^*$	$\underline{0}^*$	0
$-\hat{z}$	$\underline{1}^* \cdot A_1 + \underline{1}^* \cdot A_3$	$-\underline{1}^*$	0

→ nullmátrix

→ nullvektor

2 + 3

Példa:

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30 \\
x_1 + x_2 = 10 \\
x_1 + x_2 + x_3 \geq 8 \\
\\
x_i \geq 0 \quad i = 1..3
\end{cases}
$$

$\to x_1 + 2x_2 + x_3 + u_1 = 30$

$\to x_1 + x_2 + \hat{u}_1 = 10$

$\to x_1 + x_2 + x_3 - w_1 + \hat{u}_2 = 8$

$$z = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \to \max$$

	x_1	x_2	x_3	w_1	
u_1	1	2	1	0	30
$\hat{u}_1$	1	2	0	0	10
$\hat{u}_2$	1	1	1	-1	8
$-z$	2	-1	4	0	0
$-\hat{z}$	2	2	1	-1	0

$\hat{z} = 2x_1 + 2x_2 + x_3 - w_1 \rightarrow$ 18

A módosított normál f. és az ált. feladat táblázatkezelőben jól megoldható.

Szállítási feladat:

- Speciális lineáris programozási feladat.
- Megoldható szimplex módszerrel is, de kis feladat esetén nagy táblázattal kell számolni, és sokat.
- Ezeket a feladatokat HOOPMANS (1947) által kidolgozott disztribúciós módszerrel oldjuk meg.
- 1951: Danzig bebizonyította, h. a disztribúciós módszer a szállítási feladat speciális tulajdonságait figyelembe vevő szimplex módszer.

Legyen M feladó

$\boxed{m}$	F_1	F_2	...	F_m
készlet $\boxed{f}$	f_1	f_2	...	f_m
legyen $\boxed{n}$ megrendelő	R_1	R_2	...	R_n
megr. igény $\boxed{r}$	r_1	r_2	...	r_n

Minden feladó készletét el kell szállítani, illetve minden megrendelő igényét ki kell elégíteni!

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{j=1}^{n} r_j$$

Ha ez megegyezik, a feladatunk lesz optimális megoldása

Jelöljük c_{ij}-vel, hogy az i-dik feladó a j-dik megrendelőnek egységnyi mennyiséget milyen költséggel szállít.

Ekkor:

$$\left.\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{matrix}\right\} \text{költségmátrix}$$

Jelöljük x_{ij}-vel, hogy az i-dik feladó a j-dik megrendelőnek mennyit szállít majd!

Ezt a mátrixot fogjuk keresni.

$$x = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} & \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} \end{array}$$

összköltség

$$K = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{mn}x_{mn}$$

Melyik feladó melyik megrendelőnek szállítson, hogy az összköltség minimális legyen.

Feltételrendszer:

1) $\sum_{i=1}^{k} f_i = \sum_{j=1}^{k} r_j$

2) Negatív szállítás nincs! Min. 0 lehet.

⇓

$i, j \geq 0 \qquad i = 1 \dots n \qquad j = 1 \dots m$

$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = f_1$

$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = f_2$

$\vdots$

$x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nm} = f_n$

$x_{11} + x_{21} + x_{n1} = r_1$

$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{n2} = r_2$

$\vdots$

$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{nm} = r_m$

3) Keressük a K függvények (összköltségnek) a minimumát.

$K = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \dots + C_{mn}x_{mn} \to \min$

6. előadás III.15.

elmarad.

7. előadás III.22.

elmaradt.

8. előadás III.28.

Disztribúciós módszerek:

1. Kezdő megoldás adása

a) Északnyugati sarokmódszer:

Meg kell nézni, hogy az összkészlet megegyezik-e az összigénnyel?

	R_1	R_2	R_3	R_4	készlet
F_1	3 / 2	5	8	1	~~3~~
F_2	3 / 2	8 / 2	5 / 4	2 / 4	~~18~~ ~~15~~ ~~7~~ ~~2~~
F_3	8	8	1	9 / 3	~~9~~
igény	~~6~~ ~~3~~	~~8~~	~~5~~	~~11~~ ~~9~~	30 / 30

megoldáshoz tartozó költség

$$x = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$K = \overbrace{3\cdot 2 + 3\cdot 2}^{12} + \overbrace{8\cdot 2 + 5\cdot 4}^{36} + \overbrace{2\cdot 4 + 9\cdot 3}^{35} = 83$$

b) Sorminimum:

	R_1	R_2	R_3	R_4	készlet	
F_1	2	5	8	3 / 1	~~3~~	
F_2	6 / 2	8 / 2	4 / 4	4	~~18~~	~~14~~ 4
F_3	8	8	1 / 1	8 / 3	~~9~~	~~8~~
igény	~~6~~	~~8~~	~~5~~	~~11~~		
			~~4~~	~~8~~		

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$K = \underbrace{3\cdot 1 + 6\cdot 2}_{15} + \underbrace{8\cdot 2 + 4\cdot 4}_{32} + \underbrace{1\cdot 1 + 8\cdot 3}_{25} = 72$$

Ha F két egyforma, + választhatjuk

Ezzel a módszerrel az optimális költséghez közelebb jutunk.

c) Oszlopminimum:

	R_1	R_2	R_3	R_4	k.	
F_1	3 / 2	5	8	1	~~3~~	0
F_2	3 / 2	8 / 2	4	7 / 4	18	~~15~~ ~~7~~ 0
F_3	8	8	5 / 1	4 / 3	~~9~~	~~4~~ 0
i	~~6~~	~~8~~	~~5~~	~~11~~		
	~~3~~	0	0	~~7~~ 0		

$$x = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$K = 6 + 6 + 16 + 28 + 5 + 12 = 73$$

d) Bástya módszer: Csak függőlegesen v. vízszintesen lehet haladni.

Kiválasztjuk a legkisebb költségű helyet, és a köv. legkisebbet (oszlopban v. sorban) választjuk.

	R_1	R_2	R_3	R_4	k	
F_1	2	5	8	3 / 1	~~3~~	0
F_2	6 / 2	8 / 2	4 / 4	4	~~18~~	~~14~~ ~~6~~
F_3	8	8	1 / 1	8 / 3	9	~~1~~ 0
i	~~6~~	~~8~~	~~5~~	~~11~~		
	0	0	~~4~~	~~8~~		

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$K = \underbrace{3 + 12}_{15} + \underbrace{16 + 16}_{32} + \underbrace{1 + 24}_{25} = 72$$

e) Vogel-Korda módszer:

Minden sorban és minden oszlopban képezzük a két legkisebb költség különbségét (nagyobból a kisebbet)

2	5	2	1	3	2-1=1
2	2	4	4	18	2-2=0
8	8	1	3	9	3-1=2
6	8	5	11		
2-2=0	5-2=3	4-1=3	3-1=2		

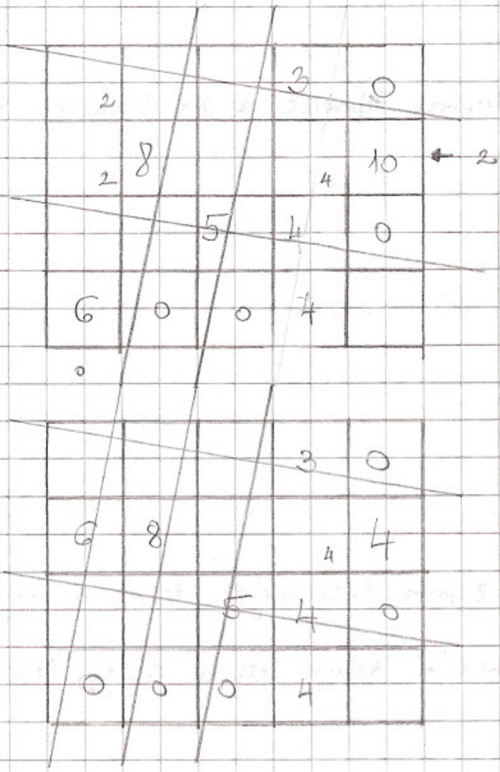
max(1; 0; 2; 0; 3; 3; 2) = 3 a így kapott különbségek közül a legnagyobbat választjuk.

Ebben az oszlopban a legkisebb költségű helyre kell a lehető legnagyobb mennyiséget szállítani.

2	5	8	1	3		1
2	8 2	4	4	~~18~~	10	2
8	8	1	3	9		2
6	~~8~~	5	11			
0		3	2			

2	5	8	1	3		1
2	8 2	4	4	~~18~~	10	2
8	8	5 1	3	~~9~~	4	5
6	~~8~~	~~5~~	11			
0			2			

2	5	2	3 1	~~3~~	0	1
2	8 2	4	4	~~18~~	10	2
8	8	5 1	4 3	~~9~~	~~4~~	
6	~~8~~	~~5~~	~~11~~			
0			~~7~~ 4			
			3			



			3	0
6	8		4	0
		5	4	0
0	0	0	0	

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$K = 64$

Ezzel a módszerrel előállított megoldás van mindig a legközelebb az optimális megoldáshoz, néha meg is egyezik vele.

Azokat a helyeket, ahová történt szállítás, KÖTÖTT HELYnek, ahová nem, SZABAD HELY-nek nevezzük.

Minden szabad helyhez tartozik egy HUROK. (A szabad helyről indulunk. Csak függőlegesen és vízszintesen haladunk. Elfordulni kötött helyen lehet [illegible]-ben és vissza kell jutni a szabad helyhez.)

+, – jeleket írunk felváltva, a szabad helynél + -szal kezdve.

ÉNY módszerből indulunk:

3 (2)	(5)	(8)	(1)
3 (2)	8 (2)	5 (4)	2 (4)
(8)	(8)	(1)	9 (3)

min $(2;3)=2$.

A költségnövekedést megkapjuk, ha a ⊕ sarokban lévő költségeket összeadjuk.

A költségcsökkenést megkapjuk, ha a ⊖ sarokban lévő költségeket összeadjuk.

1) $K_{növ} = 5+2=7$ $\qquad 7-4=3\geq 0$
$K_{csökk} = 2+2=4$

Ha minden szabad helyre igaz, hogy $K_n - K_{cs} \geq 0 \Rightarrow$ a táblázat optimális megoldást tartalmaz.

2) $K_n = 8+2=10$ $\qquad 10-6=4\geq 0$
$K_{cs} = 4+2=6$

3) $K_n = 1+2=3$ $\qquad 3-6\leq 0$
$K_{cs} = 4+2=6$

Ha erre a helyre szállítunk, a költség csökkenni fog.
Mennyit szállítsunk oda?

A negatív sarokban lévő mennyiségek közül a kisebbet kell erre a szabad helyre szállítani.
Ezt a mennyiséget a ⊕ sarokhoz hozzá kell adni, a ⊖-ból le kell vonni.

1 (2)	(5)	(8)	2 (1)
5 (2)	8 (2)	5 (4)	(4)
(8)	(8)	1 (1)	9 (3)

1) $K_n = 7$ $\qquad 7-4=3\geq 0$
$K_{cs} = 4$

4) $K_n = 4$ $\qquad 4-9=-5\leq 0$
$K_{cs} = 9$

2) $K_n = 10$ $\qquad 10-6=4\geq 0$
$K_{cs} = 6$

min $(9;1;8)=1$.

3) $K_n = 6$ $\qquad 6-3\geq 0$
$K_{cs} = 3$

(+) 2	5	(+) 8	(−) 3 / 1
6 / (+) 2	8 / 2	(+) 4 / 4	4
8	8	(−) 1 / 1	(+) 8 / (+) 3

1) $9 - 4 \geq 0$
2) $12 - 4 \geq 0$
3) $11 - 2 \geq 0$
4) $5 - 7 \leq 0$

$\min(4;8) = 4$

+ ✓ 2	+ ✓ 5	+ ✓ 8	− 3 1
− 6 2	− 8 2	+ ✓ 4	+ + 4 4
+ ✓ 8	+ ✓ 8	− 5 1	− + 4 3

1) $6-3 \geq 0$
2) $9-3 \geq 0$
3) $11-2 \geq 0$
4) $7-5 \geq 0$
5) $12-5 \geq 0$
6) $12-5 \geq 0$

$$K = \underbrace{3+12}_{15}+\underbrace{16+16}_{32}+\underbrace{5+12}_{17} = 64$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

9. előadás

IV. 5.

Szállítási feladat megoldása „modi" módszerrel

(Módosított disztribúciós módszer, potenciálok módszere)

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	3 (2)	(5)	(8)	(1)	~~3~~
F_2	3 (2)	8 (2)	5 (4)	2 (4)	~~18~~ ~~15~~ ~~7~~ ~~2~~
F_3	(2)	(8)	(1)	9 (3)	~~9~~
	~~6~~ ~~3~~	~~8~~	~~5~~	~~11~~ ~~9~~	30 / 30

1) ÉNY-i sarokmódszerrel kezdőmegoldást adunk.

	$v_1 = 2$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 4$
$u_1 = 0$	3 (2) −	(5)	(8)	x (1) +
$u_2 = 0$	3 (2) +	8 (2)	5 (4)	2 (4) −
$u_3 = -1$	(2)	(8)	(1)	9 (3)

A sorokhoz vezessük be az $u_1, u_2 \dots u_m$ potenciálokat.

Vezessük be az oszlopokhoz a $v_1, v_2 \dots v_n$ -et.

Kötött helyek száma: $m+n-1$.

A költségek:
$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$c_{ij} = u_i + v_j$

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 2 \\ u_2 + v_1 &= 2 \\ u_2 + v_2 &= 2 \\ u_2 + v_3 &= 4 \\ u_2 + v_4 &= 4 \\ u_3 + v_4 &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} u_1 &= \emptyset \\ v_1 &= 2 \\ u_2 &= 0 \\ v_2 &= 2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} v_3 &= 4 \\ v_4 &= 4 \\ u_3 &= -1 \end{aligned}$$

Eggyel kevesebb egyenletem van, mint ismeretlenem.

Az egyik változónak tetszőleges értéket adunk. → Legyen ez a változó u_1 és az értéke legyen $\emptyset$.

- Ha minden szabad helyre igaz a $c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0 \Rightarrow$ optimális megoldása van.

- Ahol $\geq$ mint $\emptyset$, oda $\oplus$ jelet teszünk, ahol nem ilyen, ott $\ominus$ jelet és odaírjuk az értékét is.

első sor: $5-(0+2)=3$ +
$8-(0+4)=4$ +
$1-(0+4)=-3$ −

második sor: nincs szabad hely

harmadik sor: $8-(-1+2)=7$ +
$8-(-1+2)=7$ +
$1-(-1+4)=-2$ −

$\min(-3; -2) = -3$.

Ehhez a szabad helyhez keressük a kurzot.

	$v_1=2$	$v_2=2$	$v_3=4$	$v_4=1$
$u_1=0$	1 (2)	(5)	(8)	2 (1)
$u_2=0$	5 (2)	8 (2)	5 (4)	(4)
$u_3=2$	(8)	(8)	× (1)	9 (3)

$u_1+v_1=2$
$u_1+v_4=1$
$u_2+v_4=4$
$u_3+v_1=8$
$u_3+v_2=8$
$u_3+v_3=1$

$u_1=0$ $v_1=2$
$v_4=1$

$u_2=0$ $v_2=2$
$v_3=4$

$u_3=2$ $u_3+v_4=3$
$u_3+1=3$
$u_3=2$

$5-(2+0)$ +
$8-(4+0)$ +
$1-(4+0)$ − (-3)
$4-(1+0)$ +
$8-(2+2)$ +
$8-(2+2)$ +
$1-(4+2)$ − (-5)

$\min(-5; -3) = -5$

	$v_1=-3$	$v_2=-3$	$v_3=-1$	$v_4=1$
$u_1=0$	(2)	(5)	(8)	3 (1)
$u_2=5$	6 (2)	8 (2)	4 (4)	× (4)
$u_3=2$	(8)	(8)	1 (1)	8 (3)

$u_1+v_4=1$
$u_2+v_1=2$
$u_2+v_2=2$
$u_2+v_3=4$
$u_3+v_3=1$
$u_3+v_4=3$

$u_1=0 \Rightarrow v_4=1$
$u_3=2 \Rightarrow v_3=-1$
$u_2=5 \Rightarrow v_2=-3$
$v_1=-3$

1) $2-(1-3) \geq 0$ +
$5-(0-3) \geq 0$ +
$8-(0-1) \geq 0$ +
2) $4-(5+1) = -2$ −
3) $8-(2-3) \geq 0$ +
$8-(2-3) \geq 0$ +

	$v_1=-1$	$v_2=-1$	$v_3=-1$	$v_4=1$
$u_1=0$	(2)	(5)	(8)	**3** (1)
$u_2=3$	**6** (2)	**8** (2)	(4)	**4** (4)
$u_3=2$	(8)	(8)	**5** (1)	**4** (3)

$u_1+v_4=1$ $\qquad u_1=0 \qquad v_1=-1$

$u_2+v_1=2$ $\qquad u_2=3 \qquad v_2=-1$

$u_2+v_2=2$ $\qquad u_3=2 \qquad v_3=-1$

$u_2+v_4=4$ $\qquad\qquad\qquad v_4=1.$

$u_3+v_3=1$

$u_3+v_4=3$

1) $2-(0-1)\geq 0$
$5-(0-1)\geq 0$
$8-(0-1)\geq 0$

2) $4-(3-1)\geq 0$

3) $8-(2-1)\geq 0$
$8-(2-1)\geq 0$

Ez a táblázat már az optimális megoldást szolgáltatja.

A megoldásmátrix:

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad K=\underline{\underline{64}}$$

A szállítási feladatnak több megoldása van:

a) disztribúciós módszer $\quad K_{kör} - K_{közé} = 0$

b) Módi $\quad c_{ij} - (u_i + v_j) = 0$

$\sum f_i = \sum r_j$
összkészlet össz igény

- Ha $\sum f_i > \sum r_j \Rightarrow$ új fiktív megrendelőt kell felvenni, mindenütt $\emptyset$ költséggel és $\sum f_i - \sum r_j$ igénnyel.
- Ha $\sum f_i < \sum r_j \Rightarrow$ fiktív feladót kell felvenni $\emptyset$ költséggel és $\sum r_j - \sum f_i$ készlettel.

Valamelyik feladó valamelyik megrendelőnek nem szállíthat.

Ilyenkor kézi számolás esetén M-et írunk, soha nem változik, hiába vonunk le belőle.

Gépi számolás esetén nagy összeget írunk: $\Sigma\Sigma c_{ij} + 100$.

Degenerációs szállítás esetén:

Két eset lehetséges:

I. Egyszerre fogy el a készlet és az igény

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	40 (1)	10 (0)	(2)	(6)	50
F_2	(3)	20 (5)	0 (1)	(5)	20
F_3	(2)	0 (7)	40 (6)	40 (0)	80
	40	30	40	40	150 / 150

ÉNY

$m + n - 1 = 6$

itt volt degeneráció

II. a kerekítés miatt:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{+} & \rightarrow & \boxed{-20} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \boxed{-20} & \leftarrow & \boxed{+30} \end{array}$$

ilyenkor nem tudunk egyértelműen legkisebbet választani a mínusz sarokból.

ilyenkor kedvezőbbet választok.

$$\begin{array}{ccc} \boxed{20} & \rightarrow & \boxed{} \\ & & \downarrow \\ \boxed{0} & \leftarrow & \boxed{50} \end{array}$$

Be kell írni a Ø-t, hogy a kötött helyek megmaradjanak.

	megrendelők				
	R_1	R_2	R_3	R_4	készlet
feladók F_1	2	1	3	5	40
feladók F_2	1	1	2	M	15
feladók F_3	3	4	2	4	35
igény	20	30	30	10	90 / 90

→ ide nem szállíthat a 2. feladó

	R_1	R_2	R_3		
F_1	50 / M	1	2	~~50~~	
F_2	20 / 2	3	M	~~20~~	
F_3	30 / 1	20 / 2	1	~~50~~	~~20~~
F_4	M	30 / 1	50 / 3	~~80~~	~~50~~
	~~100~~ ~~50~~ ~~30~~	~~50~~ ~~30~~	~~50~~	200 / 200	

Előfordulhat, h a feladatnak nincs megoldása, ha több olyan hely van, ahová nem lehet szállítani.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	készl.
F_1	6	3	9	5	2	9
F_2	11	2	5	10	5	19
F_3	9	5	9	6	8	11
F_4	5	4	10	8	6	10
igény	12	8	15	5	7	49 / 47

$\sum f_i \neq \sum r_j$

ilyenkor fiktív megrendelőt kell felvenni.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	
F_1						0	
F_2		ua				0	
F_3			marad			0	
F_4						0	
						2	49 / 49

49-47

VIZSGA.
máj 10.
június 15.

Hozzárendelési feladat:

Adott n munkás (v. gép) és n feladat. Bármelyik munkás ∀ feladatot el tudja végezni, de 1 munkát, csak 1 munkás végezhet. A munkát különböző költséggel végzik. Melyik munka melyik munkát végezze, h. az összköltség min. legyen.

∃ C_{ij}: i. munkás - j. munkát milyen költséggel tudja elvégezni.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$ költségmátrixnak nev.

$n = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. 1,3 → 4
2. 2,4 → 6

$n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1: 1, 4, 4 → 9
2. 1, 1, 1 → 3
3. 2, 3, 4 → 9
4. 2, 1, 2 → 5
5. 1, 4, 2 → 7
6. 1, 3, 1 → 5

n! n=5 esetén 120 lehetőség

Ez a módszer nem mindig eredményes

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ha i. munkás a j. munkát végzi} \\ 0, \text{egyébként} \end{cases}$$

Keressük:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

minden sorában és oszlopában 1 db 1-es van, a többi 0.

$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = 1$
$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = 1$

$x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} = 1$
$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1} = 1$
$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{n2} = 1$
$\vdots$
$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{nn} = 1$
$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1..n \quad j = 1..n$

ezen felt.-r. mellett keressük.

$$K = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \dots + c_{nn}x_{nn} \to \overset{\min}{\cancel{\max}}$$

hozzárendelési feladat spec ~~rendszeres~~ szállítási feladat. A készlet 1, az igény 1.
Megoldhatjuk szimplex ill. disztribúciós módszerrel is.

↓ nagy a táblázat ↓ fellépne a degeneráció

KUHN am. matematikus által kidolgozott magyar módszer:
felhasználta Egerváry Jenő és König Dénes eredményét.

A költségmátrixból indulunk ki:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 7 \\ 7 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Előállítjuk az ún. redukált mátrixot.
Minden ~~sorból~~ sorban lévő elemből kivonjuk a legkisebb elemet

$\min(4,2,3,7)=2$
$\min(7,2,1,7)=1$
$\min(1,2,1,4)=1$
$\min(6,5,1,7)=1$

↓

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Oszlopokban a legkisebb elemet kivonjuk minden elemből

→ független 0.

$$\begin{pmatrix} 2 & \boxed{0} & 1 & 2 \\ 6 & 1 & \boxed{0} & 3 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

→ redukált mátrix (minden sorában és oszlopában van legalább 1 db 0.)

2. Maximális számú független 0 meghatározása.
Két 0-t függetlennek nevezünk, ha nem férnek ugyanabban a sorban ill. oszlopban.

a) A 0-kat nem tartalmazó sorokat ill. oszlopokat elhagyjuk.

b) elsőbbsége van annak a 0-nak, amelynek sorában ill. oszlopában a legkevesebb 0 van.

A sorát és oszlopát elhagyjuk

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 6 & \cdot & \boxed{0} & 3 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 5 & \cdot & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 5 & \cdot & \cdot & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2.a) miatt}]{\text{utolsó sort elhagyjuk}} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \boxed{0} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

A redukált mátrixban jelöljük a független nullákat.

Mivel nem találtunk 4 db független 0-t nincs megoldva a feladat.

3. Minimális számú fedővonal rendszer meghatározása

Azokat a 0-kat, amelyek nincsenek bekeretezve, szabad 0-knak nev. Válasszunk olyan sort v. oszlopot, amelyben csak szabad 0 van. Sor esetén a szabad 0-khoz tartozó oszlop(ok) lesznek fedővonalazva, oszlop esetén pedig a sorok lesznek fedővonalazva.
Az egészet addig csináljuk, míg minden 0-t le nem fedtünk. Ha utoljára kettő 0 marad, akkor őt sorral v. oszloppal is lefedhetjük.

$$\begin{pmatrix} 2 & \boxed{0} & 1 & 2 \\ 6 & 1 & \boxed{0} & 3 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & \boxed{0} & \cdot & 2 \\ 6 & 1 & \cdot & 3 \\ \boxed{0} & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & \boxed{0} & \cdot & \cdot \\ 6 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \to$$

A redukált mátrixban húzzuk be a fedővonalakat.

(4). Válasszuk ki a le nem fedett elemek közül a legkisebbet.

$\min(6,1,3,5,4,3) = 1.$

Ezt a minimum értéket a le nem fedett elemekből vonjuk ki. A kétszer lefedettekhez adjuk hozzá. (1× lefedettek változatlanok.)

$$\begin{pmatrix} 2 & \boxed{0} & 2 & 2 \\ 5 & 0 & \boxed{0} & 2 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & \boxed{0} & 2 \\ 0 & \cdot & 1 & 0 \\ 4 & \cdot & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \boxed{0} & \cdot & \cdot & 0 \\ 4 & \cdot & \cdot & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

alk. 2,3 módszerrel.

3).

$$\begin{pmatrix} 2 & \boxed{0} & 2 & 2 \\ 5 & 0 & \boxed{0} & 2 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & \boxed{0} & \cdot & 2 \\ 5 & 0 & \cdot & 2 \\ \boxed{0} & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & \boxed{0} & \cdot & \cdot \\ 5 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$\min(2,2,5,2,4,2) = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} & 2 & 0 \\ 3 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{0} & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cdot & \boxed{0} & 2 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{0} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \boxed{0} \end{pmatrix} \to$$

Megvan a 4 független 0 → megoldottuk a feladatot.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad K = 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 7 = 11$$

Ha a munkások és a munkák száma nem egyezik meg ⇒ fiktív munkást v. munkát kell felvenni. Van arra lehetőség, h. megtiltsuk, h. valamelyik munkást valamelyik munkát végezze. Kézi módszernél ∞, gépi módszernél: összköltség+1000.

4 munkás 6 feladat.

$$\left.\begin{array}{l}\text{1.m: 3. és 6. feladatot}\\ \text{2.m: 1. és 4. feladatot}\end{array}\right\}\text{ nem végezheti el}$$

De a 4. és 6. feladatot mindenképpen el kell végezni.

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 9 & - & 11 & 8 & - \\ - & 6 & 9 & - & 12 & 9 \\ 10 & 17 & 8 & 10 & 10 & 14 \\ 9 & 14 & 6 & 9 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

egészítsük ki

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 9 & M & 11 & 8 & M \\ M & 6 & 9 & M & 12 & 9 \\ 10 & 17 & 8 & 10 & 10 & 14 \\ 9 & 14 & 6 & 9 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & M \end{pmatrix}$$