MATEMATIKA KÉPLETTÁR

Képlettár

A képlettár segítséget nyújt a feladatok megoldásához, de nem tartalmazza azokat az ismereteket és összefüggéseket, amelyek a részletes érettségi vizsgakövetelményben bizonyítandó tételként szerepelnek.

Hatványok

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + a^{n-k}b^{k-1} + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + ... + (-1)^{2k-n}a^{2k-n}b^n + ... - ab^{2k-1} + b^{2k})$$

$$a^{2k} - b^{2k} = (a+b)(a^{2k-1} - a^{2k-2}b + ... + (-1)^{n-1}a^{2k-n}b^{n-1} + ... + ab^{2k-2} - b^{2k-1})$$

Binomiális tétel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 .$$

Binomiális együtthatók

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 .$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} .$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} .$$

Különböző alapú logaritmusok

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

Közepek

Aritmetikai közép: $A = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$

Súlyozott közép: $A' = \dfrac{g_1 a_1 + g_2 a_2 + g_3 a_3 + \ldots + g_n a_n}{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} g_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i}$

Geometriai közép: $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$

Harmonikus közép: $H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}}$

Négyzetes közép: $Q = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}}$

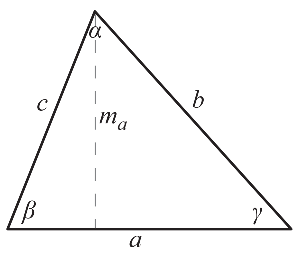
Háromszög

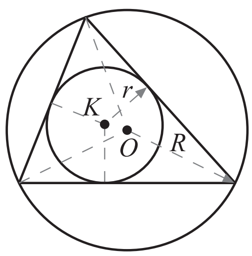
$K = 2s = a + b + c$

$T = \dfrac{am_a}{2} = \dfrac{ab\sin\gamma}{2} = \dfrac{abc}{4R} = sr$.

$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

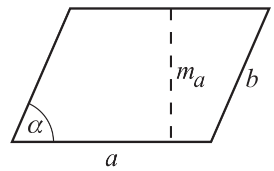
$T = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$



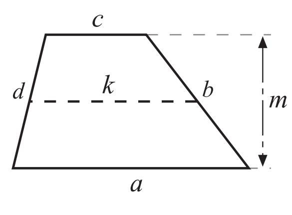


Négyszögek

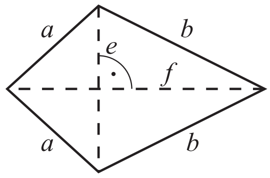
Paralelogramma: $T = a \cdot m_a = ab\sin\alpha$



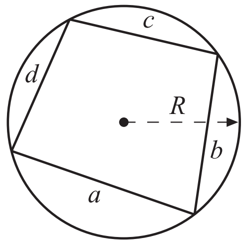
Trapéz: $T = \dfrac{a+c}{2} m = mk$



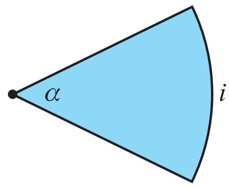
Deltoid: $T = \dfrac{ef}{2}$



Húrnégyszög: $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$; $2s = K$

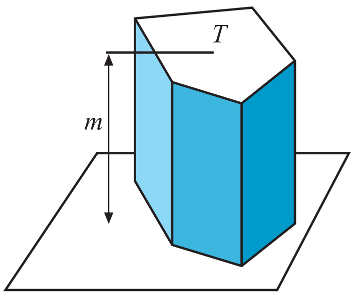


Körcikk: $i = r\widehat{\alpha} = \dfrac{\pi}{180^\circ} r\alpha^\circ$, $T = \dfrac{ri}{2} = \dfrac{r^2\widehat{\alpha}}{2} = \dfrac{\pi}{360^\circ} r^2\alpha^\circ$

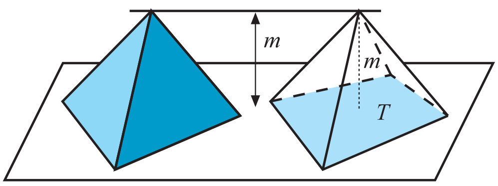


Felszín és térfogat

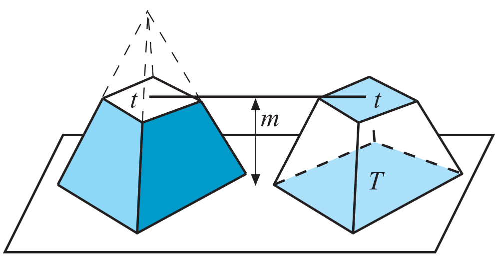
Hasáb: $A = P + 2T$, $V = Tm$



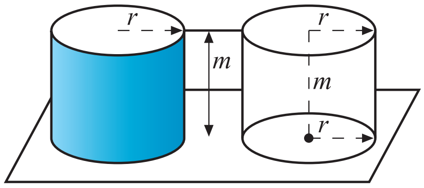
Gúla: $A = P + T$, $V = \dfrac{Tm}{3}$



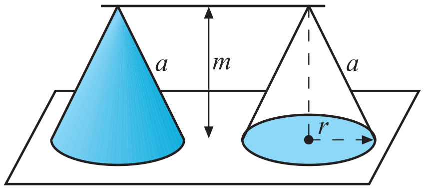
Csonkagúla: $V = \dfrac{m}{3}\left(T + \sqrt{Tt} + t\right)$



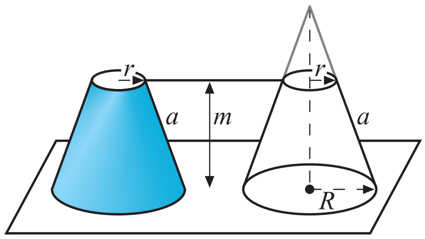
Forgáshenger: $A = 2\pi r(m + r)$, $V = \pi r^2 m$



Forgáskúp: $A = \pi r(a + r)$, $V = \dfrac{\pi r^2 m}{3}$

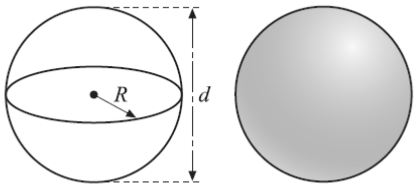


Csonkakúp: $A = \pi[R^2 + r^2 + (R + r)a]$, $V = \dfrac{\pi}{3} m\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$



Gömb: $A = 4\pi R^2 = \pi d^2$

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{\pi}{6} d^3$$



Trigonometriai összefüggések

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\alpha \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$;

$\mathrm{ctg}\, 2\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$;

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$;

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

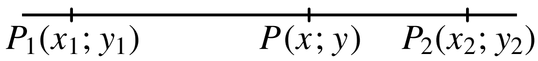
$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

Koordináta-geometria

Adott arányban osztó pont koordinátái:

$x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n}$, $y = \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n}$,



ahol $P_1P : PP_2 = m : n$.

Vektorok skaláris szorzata: $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a};\mathbf{b})$;

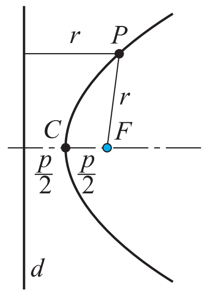
$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2$, ahol $\mathbf{a}(a_1;a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1;b_2)$.

Parabola

Kanonikus egyenlet, ha $C(0,0)$, $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$: $y^2 = 2px$

Paraméteres egyenletei, ahol $C(u,v)$: $y = \dfrac{1}{2p}(x-u)^2 + v$

$$x = \frac{1}{2p}(y-v)^2 + u$$



Differenciálási szabályok:

$(c\cdot f)' = c\cdot f'$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

$(f(g))' = f'(g)\cdot g'$

Trigonometrikus függvények deriváltjai

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Határozatlan integrál

Integrálási szabályok:

$\int (c \cdot f) = c \cdot \int f$

$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$

Trigonometrikus függvények primitív függvényei

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x \, dx = \sin x + C$

Határozott integrál

Ha $[a;b]$-on f integrálható és $F' = f$, akkor $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Integrálási szabályok:

$\int_a^b f = -\int_b^a f$

$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

$\int_a^b (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f$

$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$

Statisztika

Középeltérés: a mediántól való abszolút eltérések számtani közepe.

$$d = \overline{|x_i - m_e|} = \frac{\sum |x_i - m_e|}{n}.$$

Variancia (szórásnégyzet): a mintaközéptől való eltérések négyzetes közepe

$$s^2 = \overline{\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = \frac{\sum \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}, \qquad s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\overline{x}\right)^2.$$

Szórás: a variancia négyzetgyöke

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\left(\overline{x^2}\right) - \left(\overline{x}\right)^2}.$$

Valószínűség-számítás

$P(E) + P(\overline{E}) = 1$.

Teljes eseményrendszerre: $\sum_{k=1}^{m} P(E_k) = 1$.

$P(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_m) \le \sum_{k=1}^{m} P(E_k)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$.

A feltételes valószínűség összefüggései ($F \neq O$):

$0 \le P(E \mid F) \le 1$.

$P(E \mid F) = P(E)$, ha az E és F események függetlenek.

$P(E_1 \mid F \cup E_2 | F \cup \ldots \cup E_m \mid F) = \sum P(E_k \mid F)$,

ha egymást páronként kizáró események.

Eloszlások

Egyenletes eloszlás:

$$\xi \in \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}; \quad \forall k : P(\xi = x_k) = \frac{1}{n}; \quad \mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k; \quad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2.$$

Geometriai eloszlás:

Paraméterek: $p, q \in \left]0;1\right[\wedge (p + q = 1)$.

$$\xi \in \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}; \qquad \forall k : P(\xi = k) = p \cdot q^{k-1}; \qquad \mu = \frac{1}{p}; \qquad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$