3. tétel

Multiplikatív és additív számelméleti függvények. Tökéletes számok. Összegzési és megfordítási függvények. Számelméleti függvények értékeloszlására vonatkozó tételek. Lineáris diofantikus egyenletek, a Pitagoraszi számhármasok, a Fermat-féle problémakör. Diofantikus approximáció, a Pell-egyenlet.

Multiplikatív és additív számelméleti függvények:

D.: Egy $f: \mathbb{N}^+ \Rightarrow \mathbb{R}$ fgv-t számelméleti fgv-nek nevezünk.

D.: Az f számelméleti fgv-t multiplikatívnak nevezzük, ha $\forall$ $a, b \in \mathbb{N}^+$ és $(a,b) = 1$ esetén $f(ab) = f(a)f(b)$. Ha az $(a,b) = 1$ feltétel elhagyható $\Rightarrow$ f fgv totálisan multiplikatív.

D.: Az f számelméleti fgv-t additívnak nevezzük, ha $\forall$ $a, b \in \mathbb{N}^+$ és $(a,b) = 1$ esetén $f(ab) = f(a) + f(b)$. Ha az $(a,b) = 1$ feltétel elhagyható $\Rightarrow$ totálisan additív.

T.: Ha az f számelméleti fgv multiplikatív és $f(n) \neq 0 \Rightarrow f(1) = 1$. Ha pedig az f számelméleti fgv additív $\Rightarrow f(1) = 0$.

T.: Multiplikatív fgv-ek szorzata is multiplikatív, additív fgv-ek összege is additív, ahol $f \cdot g$ és $f+g$ a köv. módon értelmezett:

$(fg)(n) = f(n)g(n)$; $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$.

T.: (Erdős Pál)

Ha f totálisan additív és szigorúan monoton növekedő számelméleti fgv $\Rightarrow f(n) = c \log n$, ahol c egy konstans.

B.: indirekt módon.

Nevezetes számelméleti fgv-ek:

e	$e(n) = 1$	$\forall n \in \mathbb{N}^+$
i	$i(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n=1 \\ 0, & \text{ha } n \geq 2 \end{cases}$	
u	$u(n) = n$	$\forall n \in \mathbb{N}^+$
d	$d(n) = \sum\limits_{\substack{d \mid n \\ d \geq 1}} 1$	n pozitív osztóinak száma
σ	$\sigma(n) = \sum\limits_{\substack{d \mid n \\ d \geq 1}} d$	n pozitív osztóinak az összege
f	$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n=1 \\ \lvert P_n \rvert, & \text{ha } n \geq 2 \end{cases}$	Euler-féle f fgv. $f(n)$ a $0,1,\dots n-1$ sorozatból n-hez relatív prímek számát jelöli.
λ	$\lambda(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n=1 \\ \lambda, & \text{ha } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_\lambda^{\alpha_\lambda} \ (\alpha_i \geq 1) \end{cases}$	hány különböző prímszám van a prímfaktorizációs alakban
$\varkappa$	$\varkappa(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n=1 \\ \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i, & \text{ha } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \end{cases}$	jelöli az összes prím számát
π	$\pi(n) = (-1)^{\varkappa(n)}$	Liouville-féle fgv
Λ	$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ha } n = p^\alpha \quad \alpha \geq 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$	von Mangoldt-féle fgv
μ	$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n=1 \\ (-1)^r, & \text{ha } n = p_1 \cdots p_r \ (p_i \neq p_j, \text{ha } i \neq j) \\ 0, & \text{ha } \exists p \text{ prím, hogy } p^2 \mid n \end{cases}$	Moebius-féle fgv.

T.: Multiplikatív: d, σ, f, μ — Additív: λ

totálisan: e, i, u, π — totálisan: $\varkappa$

Se nem multiplikatív, se nem additív: Λ

Tökéletes számok:

D.: Az n pozitív egész számot tökéletes számnak nevezzük, ha $\sigma(n) = 2n$.

ha $\sigma(n) > 2n$ ill. $\sigma(n) < 2n \Rightarrow$ az n számot osztókban bővelkedő ill. szűkölködő számnak nevezzük.

T.: Az n páros pozitív egész szám $\Leftrightarrow$ tökéletes, ha $n = 2^{p-1}(2^p-1)$ alakú, ahol p és 2^p-1 is prímszám. 2005. XII. 15-én 43 szám (plan nincs, vagy ha van, nagyon nagy)

(- ha n ilyen alakú $\Rightarrow$ tökéletes $\rightarrow$ ~300 Euklides
- ha n páros tökéletes $\Rightarrow$ ilyen alakú $\rightarrow$ ~1800 Euler)

D.: Az n és m pozitív egészeket barátságos számpárnak nevezzük, ha $\sigma(n) = \sigma(m) = n + m$.

*

T.: $d(n) = 1 \Leftrightarrow$, ha $n = 1$ $\wedge$ $\forall m > 1 \in \mathbb{Z}$-hoz végtelen sok $n \in \mathbb{N}^+$ létezik, amelyre $d(n) = m$.

T.: Tetszőleges $w \in \mathbb{N}^+$ esetén végtelen sok szomszédos pozitív egész számokból álló $a-1, a, a+1$ számhármas létezik, melyekre $d(a-1) - d(a) \geq w$ $\wedge$ $d(a+1) - d(a) \geq w$.
(Azaz a d fgv grafikonjában végtelen sok, legalább w „mélységű völgyet" találunk)

B: Dirichlet-tétel

T.: Tetszőleges $\varepsilon > 0$ valós számhoz $\exists$ olyan ε-tól függő c pozitív konstans, hogy $\forall$ n pozitív egészre: $d(n) < c \cdot n^{\varepsilon}$

D.: $f(x_1, x_2 \ldots x_k) = c$ diofantikus egyenlet, ahol f $k (\geq 2)$ változós egész együtthatójú polinom-függvény, c rögzített egész szám, és az egyenlet $x_1, x_2 \ldots x_n$ egész megoldásait keressük.

Lineáris diofantikus egyenletek:

D.: Az $ax + by = c$ alakú kétváltozós lineáris diofantikus egyenlet, ahol $a, b \neq 0$ és c adott egészek és x, y egész számok körében keressük a megoldást. A megoldhatóság szükséges feltétele, hogy $(a,b) \mid c$.

T.: Ha $(a,b) \mid c \Rightarrow ax + by = c$ egyenlet ekvivalens az
$$\frac{a}{(a,b)} x + \frac{b}{(a,b)} y = \frac{c}{(a,b)}$$
egyenlettel, melyben x és y együtthatói relatív prímek. Tehát elegendő $(a,b) = 1$ esettel foglalkozni.

T.: Legyenek $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(a,b) = 1$ és c tetszőleges egész. Ekkor $ax + by = c$ egyenletnek ∞ sok x és y egész megoldása van. Továbbá, ha x_0, y_0 egy megoldása az egyenletnek $\Rightarrow$ az összes megoldást $x = x_0 + b \cdot t$, $y = y_0 - a \cdot t$ alakú egészek szolgáltatják, ahol t végigfut az egészek halmazán.

T.: Legyenek $(a_1, a_2 \dots a_n)$ $n \geq 2$ nem zérus egészek és legyen $c \in \mathbb{Z}$. Az $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c$ diofantikus egyenletnek $\Leftrightarrow$ van $x_1, \dots, x_n$ egész megoldása, ha $(a_1, \dots, a_n) | c$. Ha megoldható $\Rightarrow$ ∞ sok megoldása van, melyek $n-1$ paraméterrel állíthatók elő.

Pitagoraszi - egyenlet:

$x^2 + y^2 = z^2$, ahol $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

M.: I. $x = 0$, $y = \pm z$
$y = 0$, $x = \pm z$ } triviális megoldások

II. Ha x, y, z megoldás $\Rightarrow$ $\pm x, \pm y, \pm z$ is megoldás

III. Ha x, y, z megoldás $\Rightarrow$ cx, cy, cz is megoldás $(\forall c \in \mathbb{Z})$. Ha $(x,y,z) = d$ és x, y, z megoldás $\Rightarrow$ $\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}$ is megoldás.

D.: Az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet triviálistól különböző pozitív megoldásait, melyekben $(x,y,z) = 1$, primitív megoldásoknak nevezzük.

T.: Az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet összes primitív megoldását szolgáltatják (x és y felcserélésétől eltekintve) az $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$ alakú számhármasok, ahol u és v pozitív egészek, u és v relatív prímek, $u > v$ és u és v paritása különböző.

T.: (Fermat-sejtés, Nagy-Fermat-tétel)

$x^n + y^n = z^n$: nincs pozitív egész megoldása $n > 2$ esetén.

T.: Az $x^4 + y^4 = z^2$ diofantikus egyenletnek nincs x, y, z pozitív egész megoldása.

Waring-probléma:

T.: Legyen n természetes szám. Az $x^2+y^2=n$ diofantikus egyenlet nem oldható meg, ha n alakja $n=2^q(4k+3)$, ahol $q,k\in\mathbb{N}$.

T.: Legyen $q,k\in\mathbb{N}$. Ha $n=4^q(8k+7)$ alakú $\Rightarrow$ $x^2+y^2+z^2=n$ egyenletnek nincs egész megoldása.

T.: Minden pozitív egész szám felírható négy négyzetszám összegeként.

$k\geq 2$ $(k\in\mathbb{N})$ esetén jelöljük $g(k)$-val azt a pozitív egészet, melyre $\forall$ természetes szám felírható $g(k)$ darab k-dik hatvány összegeként. (1909. Hilbert igazolta)

T.: $\forall$ $k\geq 2$ pozitív egész esetén: $g(k)\geq 2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2$

T.: Ha $k>>$ $\Rightarrow$ $g(k)=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2$ (1957. Mahler igazolta)

Diofantikus approximáció, Pell-egyenlet:

D.: Legyen $k>0$ valós szám. Akkor mondjuk, hogy egy α valós szám k rendben approximálható, ha $\exists$ $c=c(\alpha)>0$, csak α-tól függő konstans, úgy hogy a $0<\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{c}{q^k}$ egyenlőtlenség végtelen sok p,q egész szám esetén fennáll.

T.: Minden irracionális α esetén $\exists$ egy $c=c(\alpha)\leq 1$ pozitív konstans úgy, hogy $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{c}{q^2}$ végtelen sok p,q egész esetén.

M.: Minden irracionális szám legalább másodrendben approximálható.

D.: Pell-egyenlet: $x^2-Dy^2=1$ egyenlet, ahol $D\in\mathbb{Z}$, az egyenlet $x,y\in\mathbb{Z}$ megoldásait keressük.

$\left.\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ y=0 \end{array}\right\}$ megoldást triviális megoldásnak nevezzük.

I. Ha $D=0$ $\Rightarrow$ $x=\pm 1$ $\wedge$ y tetszőleges egész megoldások

II. Ha $D<0$ $\Rightarrow$ $x=\pm 1$, $y=0$ megoldások

$D=-1$ $\Rightarrow$ $x=0$, $y=\pm 1$ megoldások

III. Ha $D=d^2$ négyzetszám, ahol $d\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $(x+dy)(x-dy)=1$ $\Rightarrow$ $|x+dy|=1$ $\wedge$ $|x-dy|=1$. Ennek konkrét esetben véges számú összes megoldása könnyen megadható.

T.: Ha $D>0 \wedge D \neq d^2$ (nem teljes négyzet) $\Rightarrow$ az $x^2-Dy^2=1$ Pell-egyenletnek van nem triviális megoldása.

B.: Dirichlet-tételből következik.

D.: Az (u,v)-t alapmegoldásnak nevezzük, ha $(u,v)\in \mathbb{Z}^+ \wedge u^2-Dv^2=1 \wedge$
$\forall\ x,y>0$ megoldás esetén $x+\sqrt{D}y \geq u+\sqrt{D}v$.

M.: Ilyen alapmegoldás nyilván $\exists$ és egyértelműen meghatározott.

T.: Legyen $D>0$ egy nem teljes négyzet $(D\in\mathbb{N})$. Ekkor az $x^2-Dy^2=1$ Pell-egyenletnek végtelen sok $(x,y)\in\mathbb{Z}$ megoldása létezik. Ha (u,v) az egyenlet alapmegoldása $\Rightarrow$ az összes megoldásai azon (x,y) számpárok, melyeket az $x+\sqrt{D}y=\pm(u\pm\sqrt{D}v)^n$ egyenlőség definiál, ahol $n=0,1,2\ldots$ értéket vehet fel.

*: Összegzési és megfordítási fgv-ek:

Def.: Legyen $f,g\in D$. Az f és g Dirichlet-féle konvolúcióján értjük és $f*g$-vel jelöljük az $(f*g)(n)=\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d_1d_2=n} f(d_1)g(d_2)$ egyenlőséggel meghatározott számelméleti fgv-t, ahol az összegzés n összes pozitív osztójára értendő.

T.: A $(D,*)$ struktúra kommutatív egységelemes félcsoport, amelynek az i számelméleti fgv az egységeleme.

T.: Az f számelméleti fgv-nek $\Leftrightarrow \exists$ inverze a $*$ műveletre nézve, ha $f(1)\neq 0$.

T.: Legyen $f,g,h\in D$ és létezzen az f^{-1} számelméleti fgv. $f*g=h \Leftrightarrow$, ha $g=f^{-1}*h$.

T.: Az e és μ számelméleti fgv egymás inverze a konvolúciós szorzásra nézve.
(Moebius-f inverziós formula: Legyen $f,g\in D$. $e*f=g \Leftrightarrow$, ha $f=\mu*g$)

D.: Ha $g(n)=\sum_{d|n} f(d)$, $\Rightarrow$ a g számelméleti fgv-t az f számelméleti fgv összegzési fgv-ének nevezzük. Ha pedig $f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\,g\left(\frac{n}{d}\right)$, $\Rightarrow$ f-et a g fgv Moebius-transzformáltjának nevezzük.

T.: Ha f és g multiplikatív, $\Rightarrow$ $f*g$ is az.