2. tétel
Az egész számok gyűrűjének, a racionális, a valós és a komplex számok testének kiépítése. Az algebra alaptétele. Mások- , harmad- és negyedfokú egyenletek algebrai megoldása.

2. tétel
Az egész számok gyűrűjének, a racionális, a valós és a komplex számok testének kiépítése. Az algebra alaptétele. Másod- , harmad- és negyedfokú egyenletek algebrai megoldása.

Komplex számok testének kiépítése:

Az $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazban összeadást és szorzást az

(1) $(a,b) \oplus (c,d) := (a+c, b+d)$,

(2) $(a,b) \otimes (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$

előírásokkal definiálva, bizonyítható, hogy $(R^2; \oplus, \otimes)$ test. Legyen az (a,0) alakú elemek halmaza $\mathbf{R}_1$. Láttuk, hogy ($(R_1; \oplus, \otimes)$ résztest, amelyre az

$$(R_1; \oplus, \otimes) \cong (R; +, \cdot) \qquad ((a,0) \to a)$$

izomorfizmus teljesül. Ennek felhasználásával a beágyazást elvégezve kapjuk a komlex számok (C,+,·) testét, amelynek elemei

$$(a,b) = (a,0) \oplus (b,0) \otimes (0,1)$$
$$z = a + bi$$
$$ahol: i^2 = -1$$

a+bi $(a,b \in \mathbf{R})$

alakban írhatók, ahol i a (0,1) jele.

Az így kapott $(\mathbf{C}; +, \cdot)$ testet nevezzük a *komplex számok testének*, elemeit pedig *komplex számoknak.*

$$\boxed{z = \overbrace{\underbrace{a}_{ValósRész} \cdot \underbrace{1}_{ValósEgység}}^{ValósTag} + \overbrace{\underbrace{b}_{KépzetesRész} \cdot \underbrace{i}_{KépzetesEgység}}^{KépzetesTag}}$$

A komplex számok fogalmát tisztán algebrai eszközökkel alakítottuk ki. Továbbá az i szám sem egy „ titokzatos" „képzetes szám" ebben a tárgyalásban.

A komplex számok (1) összeadásának definíciója kézenfekvő. A (2) alatti szorzás azonban egyáltalán nem az. A komplex számok geometriai szemléletes bevezetése felvilágosítást nyújt arra is, hogy miért definiáljuk a szorzást éppen így. Célunk ugyanis az (1) alatti összeadás mellett egy olyan szorzás bevezetése, amelyekkel az (a,b) számpárok halmaza test. Ezért a testre érvényes azonosságok miatt szükségképpen teljesülnie kell a következőknek:

$$(a,b) \otimes (c,d) = (a + b(0,1)) \otimes (c, d(0,1)) = ac + (ad + bc)(0,1) + bd(0,1)^2.$$

Tétel: A valós számok **R** halmazához megadható olyan **C** halmaz, amelyre teljesülnek a következők:

1. **C** tartalmazza **R**-et;
2. a C-ben értelmezett műveletek az R-beli műveletek kiterjesztései;
3. a **C** kommutatív test;
4. **C**-ben van olyan *i* szám, amelyre $i^2 = -1$;
5. **C**-nek minden eleme a+bi alakú, ahol $a, b \in \mathbf{R}$;
6. **C** egyetlen valódi részhalmazának sincs meg az előbbi 1-5. tulajdonságok mindegyike.

Tétel: A komplex számok teste nem elrendezhető.

<u>Def.</u>: A (G;·) elrendezhető, ha a G-nek van G^+ pozitivitástartománya .

Komplex számok additív inverze: -z=-a-bi

Ha $z \neq 0$, **akkor multipikatív inverze:** $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$ alakban írható fel.

Definíció: A z=a+bi komplex szám *konjugáltján*, amit $\bar{z}$ jelöl, a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot értjük.

A z komplex számra teljesülnek: $\bar{\bar{z}} = z$,

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in R.$$

Definíció: A z=a+bi komplex szám abszolót értékén amit $|z| - vel$ jelülünk, a

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}, (\geq 0) \qquad \text{értéket érjük.}$$

Komplex szám trigonometrikus alakja: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Komplex számok hatványozása:

Tétel: (Moivre – képlet). A trigonometriai alakban adott $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex szám k-adik hatáványa:

$z^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$, ahol k tetszés szerinti egész szám.

tétel
Az egész számok gyűrűjének, a racionális, a valós és a komplex számok testének kiépítése. Az algebra alaptétele. Másod-, harmad- és negyedfokú egyenletek algebrai megoldása.

A klasszikus algebra alaptétele így fogalmazható meg:

Tétel: Minden legalább elsőfokú komplex együtthatós egyismeretlenes algebrai egyenletnek van megoldása (gyöke) a komplex számok testén.

Ruffini-Abel tétel: A komplex együtthatós ötöd- vagy magasabb fokú egyenletekre nem lehet gyökképletet adni, azaz ezek az egyenletek algebrai módszerekkel általában nem oldhatók meg.

Ruffini – Abel tétel következménye: Minden (≥ 5) természetes szám esetén van olyan n-edfokú komplex együtthatós egyenlet, amelynek nincs gyökképlete, azaz nem oldható meg algebrai úton.

Tétel: Az n-edfokú komplex együtthatós polinomnak legfeljebb n különböző, multiplicitással számolva pedig pontosan n zérushelye van.

Másodfokú egyenletek algebrai megoldása:

Az általános másodfokú egyenlet

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0, (a_i \in C; a_0 \neq 0)$$

alakban vehető fel, vagy ahogyan középiskolában megszoktuk:

(1) $\quad ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \in C; a \neq 0)$.

Tudjuk, hogy a komplex számok testében ennek az egyenletnek mindig van megoldása (a klasszikus algebra alaptétele miatt). Legyen a z komplex szám megoldása (1)-nek, azaz

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Mivel $a \neq 0$, a-val osztva, majd a bal oldalon teljes négyzetet kialakítva, a következőt kapjuk:

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

Ebből:

$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, s így a $z + \frac{b}{2a}$ megegyezik a $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ komplex szám két négyzetgyöke közül az egyikkel.

Ezzel megmutattuk, hogy az (1) egyenlet gyökei csak a

(2) $\quad z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad$ és $\quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ komplex számok lehetnek.

Az hogy a tekintett z_1 és z_2 kielégíti az (1) egyenletet, pontosan az jelenti, hogy

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{és} \quad z_1z_2 = \frac{c}{a}$$

Tétel: A komplex együtthatós $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenlet mindig megoldható algebrailag, gyökeit a $\boxed{z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ gyökképlet adja meg.

A valós együtthatós $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenlet akkor és csakis akkor oldható meg a valós számok testében, ha $b^2 - 4ac \geq 0$.

A $D = b^2 - 4ac$ kifejezést az (1) egyenlet *diszkriminánsának* („megkülönböztető, eldöntő) nevezzük.

A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján

$$D = b^2 - 4ac = a^2\left(\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}\right) = a^2\left[(z_1z_2)^2 - 4z_1z_2\right] = a^2(z_1 - z_2)^2.$$

Az (1) egyenlet két gyöke akkor és csak akkor egyenlő, ha D=0.

Harmadfokú egyenletek algebrai megoldása:

Az általános harmadfokú egyenlet

(1) $\quad a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a = 0 \quad (a_i \in C; a_0 \neq 0)$

Tétel: A komplex együtthatós $x^3 + px + q = 0$ harmadfokú egyenlet mindig megoldható algebrailag, gyökeit a

$$\boxed{z_{1,2,3} = \varepsilon^i \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \varepsilon^{3-i} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}} \qquad (i=0,1,2)$$

gyökképlet szolgálja, ahol a két köbgyök úgy választható meg, hogy szorzatuk $-\frac{p}{3}$ legyen. Ezt a gyökképletet Cardano-féle formulának nevezzük.

2. tétel
Az egész számok gyűrűjének, a racionális, a valós és a komplex számok testének kiépítése. Az algebra alaptétele. Másod-, harmad- és negyedfokú egyenletek algebrai megoldása.

Mivel a komplex számok köbgyökeit általában trigonometrikus alakban számíthatjuk ki, és ez többnyire csak közelítő pontossággal végezhető el, a Cardano-féle képlet általában csak közelítő pontossággal adja meg az egyenlet gyökeit.

A $x^3+px+q=0$ egyenletnek akkor és csak akkor van többszörös gyöke, ha

$z_1=z_2, z_1=z_3, z_2=z_3$ közül legalább az egyik teljesül.

Ez azt jelenti, hogy az

$$u_1+v_1=\varepsilon\cdot u_1+\varepsilon^2 v_1, u_1+v_1=\varepsilon^2 u_1+\varepsilon\cdot v_1, \varepsilon\cdot u_1+\varepsilon^2 v_1 \varepsilon^2 u_1+\varepsilon v_1$$

közül legalább az egyik igaz. Ezek átrendezéssel így írhatók:

$$(1-\varepsilon)u_1=(\varepsilon^2-1)v_1, (1-\varepsilon)u_1=(\varepsilon-1)v_1, (\varepsilon-\varepsilon^2)u_1=(\varepsilon-\varepsilon^2)v_1$$

ahonnan:

$$u_1=\varepsilon^2 v_1, \varepsilon^2 u_1=v_1, u_1=v_1.$$

Ezek mindegyikéből köbre emeléssel $u_1^3=v_1^3$ adódik. Ez pontosan azt jelenti, hogy a másodfokú rezolvens gyökei egyenlők, ami – mint tudjuk – azzal ekvivalens, hogy

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0.$$

A későbbiek kedvéért vezessük be a következő jelölést és elnevezést. A

$$\boxed{D=-108\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]}$$

kifejezést a $x^3+px+q=0$ egyenlet diszkriminánsának nevezzük. Az előbbiek alapján érvényes tehát a következő állítás:

A $x^3+px+q=0$ egyenletnek akkor és csak akkor van többszörös gyöke, ha diszkriminánsa zérus.

Három esetet különböztetünk meg:

a) ha $D<0$
   egy való és két komplex gyök van
b) ha $D=0$
   mindhárom gyöke valós, és közülük legalább kettő egyenlő.
c) ha $D>0$
   a $x^3+px+q=0$ alatti valós együtthatós harmadfokú egyenletnek három különböző valós gyöke van.

Negyedfokú egyenletek:

A negyedfokú komplex együtthatós egyenletek általános alakja:

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_4=0 \qquad (a_i\in C; a_0\neq 0)$$

Végezzük el az x=y+c behelyettesítést, ahol c egyelőre nem meghatározott konstans, értékét később alkalmasan választjuk meg. Ekkor:

(1) $$a_0(y+c)^4+a_1(y+c)^3+a_2(y+c)^2+a_3(y+c)^3+a_4=0$$

A hatványozás elvégzése után rendezzük az egyenlet bal oldalát y csökkenő hatványa szerint:

$$a_0y^4+(4a_0c+a_1)y^3+(6a_0c^2+3a_1c+a_2)y^2+(4a_0c^3+3a_1c^2+2a_2c+a_3)y+$$
$$+a_0c^4+a_1c^3+a_2c^2+a_3c+a_4=0.$$

Válasszunk most már c-t úgy, hogy $4a_0c+a_1=0$ legyen, ahonnan $c=-\frac{a_1}{4a_0}$. Azt kaptuk tehát, hogy az (1) egyenlet $x=y-\frac{a_1}{4a_0}$ helyettesítéssel, valamint a_0-val való osztás után az $y^4+py^2+qy+r=0$ alakú negyedfokú egyenlethez vezet. Az y helyett ismét x-et bevezetve, elegendő tehát az $x^4+px^2+qx+r=0$ alakú komplex együtthatós egyenlettel foglalkoznunk.

$x^4+px^2+qx+r=(x^2+ax+b)(x^2-ax+c).$

Ehhez szükséges és elégséges, hogy az együtthatókra teljesüljenek a

$$b+c-a^2=p,$$
$$a(c-b)=q,$$
$$bc=r.$$

egyenletek, ahol p,q,r adott komplex számok, a,b,c pedig ismeretlenek. Célunk az a,b,c számok meghatározása. E három egyenlet közül az első kettő így írható:

$$c+b=p+a^2,$$

$$c-b=\frac{q}{a}.$$

Ezekből:

$b=\frac{1}{2}\left(a^2+p-\frac{q}{a}\right), c=\frac{1}{2}\left(a^2+p+\frac{q}{a}\right)$ adódik. Ezeket helyettesítjük be a bc = r –be, s mindjárt szorozzuk meg az egyenlet $4a^2$ -tel, ekkor a következőt kapjuk: $\left(a^3+pa-q\right)\left(a^3+ap+q\right)=4ra^2$, azaz $a^6+2pa^4+\left(p^2-4r\right)a^2-q^2=0$. Írjunk a^2 helyére y-t, akkor a következő harmadfokú egyenletet kapjuk: $y^3+2py^2+(p^2-4r)y-q^2=0$ (ezt az egyenlet a $x^4+px^2+qx+r=0$ egyenlet harmadfokú *rezolvensének* nevezzük. Amint tudjuk, ez a harmadfokú egyenlet algebrailag megoldható. Legyenek gyökei y_1, y_2, y_3.

$a^6+2pa^4+\left(p^2-4r\right)a^2-q^2=0$ egyenlet gyökei tehát:

$$a_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}, a_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}, a_{5,6}=\pm\sqrt{y_3}\,.$$

$b=\frac{1}{2}\left(a^2+p-\frac{q}{a}\right), c=\frac{1}{2}\left(a^2+p+\frac{q}{a}\right)$ alapján b-t és c-t kiszámoljuk. Az így kapott a,b,c értékek segítségével felírt

$$x^2+ax+b=0,$$

$$x^2-ax+c=0$$

másodfokú egyenlet gyökei adják a $x^4+px^2+qx+r=0$ negyedfokú egyenlet gyökeit.