7. tétel

Axiómák. Klasszikus és geometriai valószínűségi mezők. Feltételes valószínűség, a teljes valószínűség és Bayes-tétele, események függetlensége. Valószínűségi változó, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény. Várható érték. Szórásnégyzet. A nagy számok törvényei.

D.: (Esemény axiómák)

Legyen Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ részhalmaza az Ω hatványhalmazának és teljesülnek a következők:

a) $\Omega \in \mathcal{A}$

b) ha $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

c) ha $A_i \in \mathcal{A}$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Ekkor az $\mathcal{A}$-t σ-algebrának, elemeit pedig eseményeknek nevezzük.

D.: (Kolmogorov-féle valószínűségi axiómák)

Legyen Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája és $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ olyan fgv, melyre teljesülnek a következők:

a) $\forall A \in \mathcal{A}$ esetén $P(A) \geq 0$

b) $P(\Omega) = 1$

c) (Teljes additivitás)

Ha $A_i \in \mathcal{A}$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ esetén, és $A_i A_j = \emptyset$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}^+$, $i \neq j$ esetén $\Rightarrow$ $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ teljesül. Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-t Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek, P-t valószínűségnek nevezzük.

D.: Legyen $\Omega := \{\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n\}$ és $\mathcal{A}$ az Ω hatványhalmaza. Ha a P valószínűségre fennáll, hogy $P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$ $(\forall i, j \in \{1, 2 \dots n\})$ $\Rightarrow$ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-t klasszikus valószínűségi mezőnek nevezzük.

T.: Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ klasszikus valószínűségi mező, $A \in \mathcal{A}$, az Ω elemeinek a száma n, és az A elemeinek a száma k $\Rightarrow P(A) = \frac{k}{n}$.

D.: Legyen Ω az $\mathbb{R}^k$ egy nem üres részhalmaza, ahol $k = 1,2,3$.

($\Omega \subset \mathbb{R}^k$; $k=1$ dim $\to$ hosszúság, $k=2$ dim $\to$ terület, $k=3$ dim $\to$ térfogat)

Tfh Ω mérhető és mértéke pozitív valós szám.

Az $\mathcal{A}$ legyen az Ω összes mérhető részhalmazának a halmaza. Ha annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott pont egy $A \in \mathcal{A}$ halmazba esik, arányos A mértékével, akkor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-t geometriai valószínűségi mezőnek nevezzük.

T.: Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geometriai valószínűségi mező, az Ω mértéke $m(\Omega)$ és $A \in \mathcal{A}$ esetén az A mértéke $m(A)$ $\Rightarrow P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$.

D.: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{A}$ és $P(B) \neq 0$. Ekkor a $P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$ hányadost az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűségének nevezzük.

T.: (Szorzás-tétel)

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, továbbá $A, B \in \mathcal{A}$ és $P(B) \neq 0 \Rightarrow P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$ teljesül.

T.: (Teljes valószínűség tétele)

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $\{B_i \in \mathcal{A} : i \in \mathbb{Z}^+\}$ teljes eseményrendszer és $P(B_i) \neq 0$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}$ esetén teljesül: $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) P(B_i)$

T.: (Bayes-tétel)

Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező. Ha $\{B_i \in \mathcal{A} : i \in \mathbb{Z}^+\}$ teljes eseményrendszer és $P(B_i) \neq 0$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ esetén, továbbá ha $A \in \mathcal{A}$ és $P(A) \neq 0 \Rightarrow$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ esetén $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) P(B_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A|B_k) P(B_k)}$

D.: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy az A esemény független B-től, ha $P(AB) = P(A) P(B)$.

K: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és ebben A, B tetszőleges események. Ekkor $P(B) \neq 0$ esetén az $A \Leftrightarrow$ független B-től, ha $P(A|B) = P(A)$.

T.: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és $A, B \in \mathcal{A}$ függetlenek. A és B pontosan akkor függetlenek, ha A és $\overline{B}$ is függetlenek.

D.: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és ξ az Ω-n értelmezett valós értékű függvény. Ha $\{\xi < k\} \in \mathcal{A}$ $\forall k \in \mathbb{R}$ esetén $\Rightarrow$ a ξ függvényt valószínűségi változónak nevezzük.

D.: Ha ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben értelmezett diszkrét valószínűségi változó $\Rightarrow$ a $\langle p_k \rangle : R_\xi \to [0;1]$, $p_k := P(\xi = k)$ sorozatot a ξ eloszlásának nevezzük.

D.: Ha ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben értelmezett valószínűségi változó $\Rightarrow$ az $F_\xi : \mathbb{R} \to [0;1]$, $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ függvényt a ξ eloszlásfüggvényének nevezzük.

D.: Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett ξ valószínűségi változót abszolút folytonos eloszlásúnak (abszolút folytonosnak) nevezzük, ha $\exists$ $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem negatív függvény, melyre $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$ teljesül $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol F_ξ a ξ eloszlásfüggvénye. Ekkor az f_ξ függvényt a ξ sűrűségfüggvényének nevezzük.

D.: Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó.

27.o.

- Ha ξ diszkrét és $R_\xi = \{x_1, x_2 \dots\}$, továbbá a $\sum_i p_i |x_i| < \infty$, ahol $p_i := P(\xi = x_i)$ akkor az $E(\xi) := \sum_i p_i x_i$ számot a ξ várható értékének nevezzük. Ha az abszolút konvergencia nem teljesül $\Rightarrow$ ξ-nek nem létezik várható értéke.
- Abszolút folytonos ξ esetében, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,dx < \infty \Rightarrow$ az $E(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx$ számot a ξ várható értékének nevezzük. Ellenkező esetben ξ-nek nem létezik várható értéke.

D.: Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó, melynek $\exists$ várható értéke. Ekkor ξ szórása: $D(\xi) := \sqrt{E((\xi - E(\xi))^2)}$, szórásnégyzete pedig: $D^2(\xi) := E((\xi - E(\xi))^2)$, feltéve, hogy $\exists$ ez a várható érték.

T.: (Markov - egyenlőtlenség)

Ha ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy várható értékkel rendelkező nem negatív valószínűségi változója $\Rightarrow \forall\, c \in \mathbb{R}^+$ esetén $P(\xi \geq c) \leq \frac{E(\xi)}{c}$ $(c>0)$

T.: (Csebisev - egyenlőtlenség)

Legyen ξ szórással rendelkező valószínűségi változó. Ekkor teljesül:

$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon}$ $(\forall\, \varepsilon > 0)$

T.: (Bernoulli - féle nagy számok törvénye)

Legyen adott egy Bernoulli - féle valószínűségi mező az $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$ eseménytérrel, továbbá $p := P(\{\omega_1\})$ és $q := 1-p$. Ha $\frac{S_n}{n}$ az $\{\omega_1\}$ relatív gyakorisága $\Rightarrow \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}$, amiből következik, hogy a relatív gyakoriság sztochasztikusan konvergál a valószínűséghez.

T.: (A nagy számok gyenge törvénye)

Legyen $\xi_1, \xi_2 \ldots$ azonos eloszlású, páronként független valószínűségi változók. Tfh mindegyiknek $\exists$ szórásnégyzete. A közös várható értéket jelöljük m-mel. $(m := E(\xi_i))$. A közös szórás legyen σ. $(\sigma := D(\xi_i))$. Ekkor teljesül:

$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ $(\forall\, \varepsilon > 0)$

T.: (Centrális határeloszlási tétel)

Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben $\xi_1, \xi_2 \ldots$ nem nulla szórással rendelkező, azonos eloszlású és független valószínűségi változók, továbbá $S_n := \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, akkor S_n standardizáltjának határeloszlása standard normális, vagyis $\lim_{n\to\infty} F_{\tilde{S}_n}(x) = \Phi(x)$

M.:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\underbrace{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - E\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)}{D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)}\right)}_{S_n := \sum_{i=1}^{n}\xi_i \text{ standardizáltja } (\tilde{S}_n)} \leq x\right) = \Phi(x)$$

T.: (Moivre - Laplace tétel)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \Phi(x)$$

Vv. tul.: 1) F_ξ mon. növ.

2) $\lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$

3) $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$

4) F_ξ minden pontban balról folytonos

Sűrűségfgv tul.: ξ absz. folyt. $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1.$

D.: ! ξ dvv. $R_\xi := \{x_1 \dots x_n\}$. $\Rightarrow E(\xi) := \sum_{i=1}^{n} x_i P(\xi = x_i)$ -t ξ v.é. nev.

! ξ dvv. $R_\xi := \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{Z}^+\}$. $\Rightarrow E(\xi) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(\xi = x_i)$ -t ξ v.é. nev, ha $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(\xi = x_i) < \infty$, azaz $\sum_1^{\infty} x_i P(\xi = x_i)$ sor absz. konv.

! ξ a.f.v.v. $\Rightarrow E(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$ -t ξ v.é nev, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$ a.k. integrál.