6. tétel

Kombinatorikai alapfogalmak. Binomiális és polinomiális tétel, a Pascal háromszög. Gráfelméleti alapfogalmak. Néhány egyszerű gráfelméleti probléma megfogalmazása (Euler-kör, Hamilton-kör). Fagráfok.

Kombinatorikai alapfogalmak:

D: Az $a_1, a_2 \dots a_n$ elemekből képzett k tagú sorozatokat az n elem k osztályú ismétléses variációjának nevezzük.

(Egy k elemű halmaznak egy n elemű halmazba való leképezéseit is nevezhetjük az n elem k-ad osztályú ismétléses variációinak.)

a, b, c elemek összes másodosztályú ismétléses variációja:

a – a, b, c

b – a, b, c

c – a, b, c

T: $V_n^{k,i} = n^k$

D: Az $a_1 \dots a_n$ elemekből képzett olyan k tagú sorozatokat, amelyekben azonos tagok nem fordulhatnak elő, az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációjának nevezzük.

(Egy k elemű halmaznak egy n elemű halmazba való injektív leképezéseit is nevezhetjük az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációjának.)

a, b, c elemek összes másodosztályú ismétlés nélküli variációi.

a – b, c

b – a, c

c – a, b

T: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

D.: Az $a_1 \dots a_n$ elemekből képzett n tagú sorozatokat, melyekben azonos tagok nem fordulhatnak elő, ezen n elem ismétlés nélküli permutációjának nevezzük.

(Egy n elemű halmaz önmagára való bijektív leképezéseit is nevezhetjük az n elem ismétlés nélküli permutációinak.)

a, b, c elemek összes ismétlés nélküli permutációi:

$$a \begin{cases} b - c \\ c - b \end{cases} \qquad b \begin{cases} a - c \\ c - a \end{cases} \qquad c \begin{cases} a - b \\ b - a \end{cases}$$

T.: $P_n = n!$

D.: Az i_1 darab a_1, i_2 darab $a_2 \dots$ i_k darab a_k szimbólumokból álló (ahol $i_1 + i_2 + \dots i_k = n$) n tagú sorozatokat ezen n elem $i_1, i_2 \dots, i_k$ típusú ismétléses permutációinak nevezzük.

T.: $P_n^{(i_1 \dots i_k)} = \dfrac{n!}{i_1!\, i_2! \dots i_k!}$

D.: Az $a_1, a_2 \dots a_n$ halmaz k elemű részhalmazait ezen n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük.

($H_n = \{1, 2 \dots n\}$ elemeiből álló k tagú szigorúan monoton növekvő sorozatok száma egyenlő az $1, 2 \dots n$ számokból álló összes k-ad osztályú ismétlés nélküli kombináció számával.)

T.: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$

D.: Ha $a_1, a_2 \dots a_n$ elemekből k tagú rendszereket választunk ki (ahol az elemek sorrendje nem számít és az elemek ismétlődése is megengedett), akkor ezeket az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak nevezzük.

(Az $\{1, 2 \dots n\} = H_n$ halmaz elemeiből álló k tagú monoton növekvő sorozatok száma megegyezik az n elemből képzett összes k-ad osztályú ismétléses kombináció számával.)

T.: $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$

D.: Legyen k rögzített pozitív egész szám. $(1 \le k \le n)$ $i_1, i_2 \dots i_k$ k különböző

1 és n közötti egészek. $i_1, i_2, \dots i_k$ ciklusnak nevezzük azt a $\sigma \in S_n$

permutációt, amelyre teljesül a következő:

$$\sigma(m) = \begin{cases} i_{j+1}, & \text{ha } m \in \{i_1, i_2 \dots i_{k-1}\},\ m = i_j \quad j = 1, 2 \dots k-1 \\ i_1, & \text{ha } m = i_k \\ m, & \text{ha } m \in \{1, 2, \dots n\} \setminus \{i_1 \dots i_k\} \end{cases}$$

Binomiális és polinomiális tétel:

T.: (Polinomiális tétel)

Legyen $(S, +, \cdot)$ egységelemes kommutatív gyűrű.

$a_1, a_2 \dots a_k \in S \setminus \{0\}$, $\quad (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum\limits_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_k!} \cdot a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_k^{i_k}$

T.: (Binomiális tétel)

Legyen $(S, +, \cdot)$ egységelemes kommutatív gyűrű.

$a, b \in S \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

Pascal háromszög:

```
            1          -> 0. sor
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
```

Tulajdonságai:

I. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-k) \dots (n-k+1)}{k!} \in \mathbb{Z}$, mert $C_n^k \in \mathbb{Z}$

(n egymást követő természetes szám szorzata osztható $k!$-sal.)

II. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\qquad C_n^k = C_n^{n-k}$

(A Pascal háromszög szimmetrikus.)

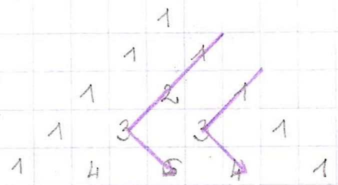
iii. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$

(A Pascal háromszög két szomszédos tagjának az összege az alattuk lévő számmal egyenlő.)

iv. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \dots = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} =$

$= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k}$

jelentése:



v. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

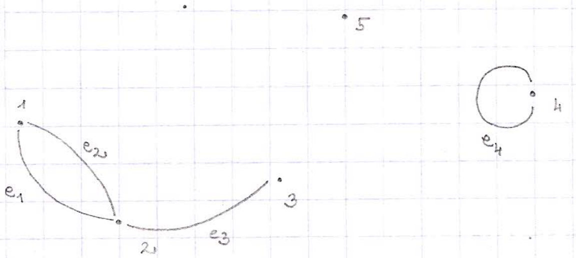
(A Pascal háromszög n-dik sorában lévő elemek összege 2^n.)

vi. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

(A Pascal háromszög n-dik sorában lévő számok váltakozó előjelű összege 0.)

Gráfelméleti alapfogalmak:

D.: Pontokból és azokat vonalakból álló alakzatot gráfnak nevezzük. A pontokat csúcsoknak vagy szögpontoknak is nevezzük. Az őket összekötő vonalakat éleknek hívjuk.



- Az e_4 élet hurokélnek nevezzük, mert végpontjai megegyeznek.
- Az e_1 és e_2 éleket párhuzamos vagy többszörös éleknek nevezzük, mert megegyezik a kezdő- és végpontjuk.
- Az 5 izolált pont, mivel egyik élnek sem végpontja.
- Azokat a gráfokat, amelyekben nincs hurokél vagy többszörös él, egyszerű gráfoknak nevezzük.

D.: A $G=(U,E)$ párt egyszerű gráfnak nevezzük, ahol $U\neq\emptyset$, az E pedig a U elemeiből képzett kételemű részhalmazok egy összessége. A U elemeit csúcsoknak vagy szögpontoknak nevezzük, az E elemeit éleknek. Ha E és U is véges halmaz, akkor a G gráfot véges gráfnak nevezzük. Ha E része $U\times U$, akkor irányított gráfról beszélünk. Ha pedig a G gráfnak van irányított és irányítatlan éle is ⇒ vegyes gráfnak nevezzük.

D.: A G_1 és G_2 gráfokat izomorf gráfoknak nevezzük, ha ∃ olyan f bijektív leképezés, mely $f: U(G_1)\to U(G_2)$ és illeszkedéstartó, azaz A és B szomszédos csúcsok G_1-ben ⇔, ha f(A) és f(B) szomszédos szögpontok G_2-ben.

jel.: $G_1 \cong G_2$

Pl.:

D.: $A\subset U(G)$ által kifeszített részgráf: Az a gráf, melynek csúcshalmaza az A halmaz, élhalmaza pedig pontosan azokból az élekből áll, amelyeknek mind a két végpontja A-ból való.

D.: Végpontjaikkal egymáshoz kapcsolódó élek egy $A_1 e_1 A_2 e_2 A_3 \dots A_n e_n A_{n+1}$ sorozatát az A_1 csúcsot az A_{n+1} csúccsal összekötő élsorozatnak nevezzük. Egy élsorozatot vonalnak nevezzük, ha nincs benne két azonos él. Egy élsorozatot zárt élsorozatnak nevezzük, ha kezdő- és végpontja megegyezik. Egy élsorozatot nyílt élsorozatnak nevezzük, ha kezdő- és végpontja különbözik.

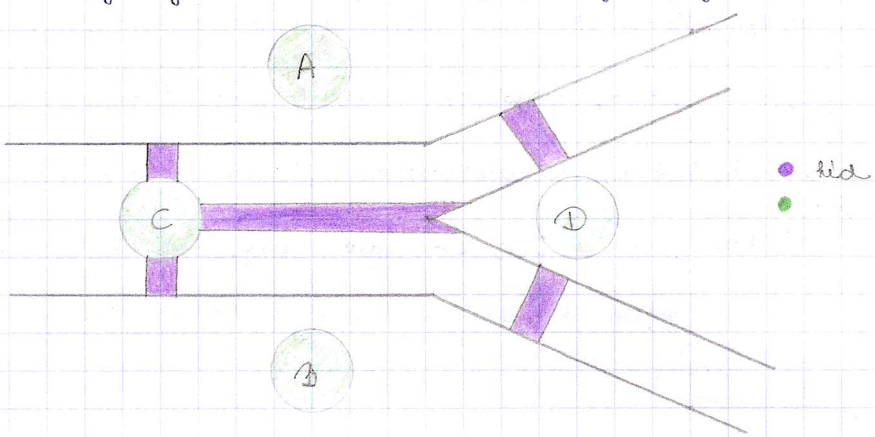
Egy nyílt vonalat útnak nevezzük, ha benne semelyik csúcs sem ismétlődik.

Egy zárt, legalább egy élű vonalat körnek nevezzük, ha a kezdő- ill. végpontok kivételével semelyik csúcs sem ismétlődik.

D.: Egy G gráfot összefüggőnek nevezünk, ha $\forall$ két csúcsához $\exists$ őket összekötő, a gráf éleiből álló élsorozat. (Élsorozattal összeköthető két pont $\Leftrightarrow$, ha úttal összeköthető.)

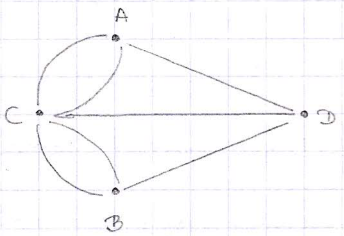
Euler-kör:

Euler (1736) Königsbergi hidak problémája, Pregel folyó



Kérdés: Egy königsbergi polgár tud-e olyan sétát tenni a városban, hogy minden hídon egyszer menjen át?

Probléma: lerajzolható egy vonallal?



Megoldás: Nem!

D.: A G gráf zárt Euler vonalának nevezzük a gráf összes élét tartalmazó zárt élsorozatot. A G gráf nyílt Euler vonalának nevezzük a gráf összes élét tartalmazó nyílt élsorozatot.

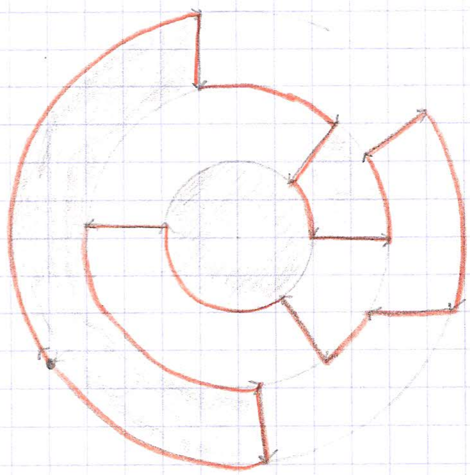
T.: Egy izolált ponttól mentes G gráfnak $\exists$ zárt Euler vonala $\Leftrightarrow$, ha G összefüggő és $\forall$ csúcsának a foka páros.

T.: Egy izolált ponttól mentes G gráfnak $\exists$ nyílt Euler vonala $\Leftrightarrow$, ha G összefüggő és pontosan két csúcsa páratlan fokszámú, a többi páros.

Hamilton körök:

1859 dodekaéder

Olyan körutat kell keresni, mely az összes várost tartalmazza pontosan egyszer.



T: Ha egy összefüggő G gráf k csúcsát elhagyva a maradék gráf legalább $k+1$ komponensű $\Rightarrow$ nincs Hamilton köre, ha legalább $k+2$ komponensű $\Rightarrow$ nincs Hamilton útja sem.

T: (Dirac gábor)

Ha egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka $\geq \frac{n}{2}$ $\Rightarrow$ a gráfnak van Hamilton köre.

Fagráfok:

D: Egy gráfot fagráfnak (fa) nevezzük, ha összefüggő és körmentes. Erdőnek (liget) nevezzük azokat a gráfokat, amelynek minden komponense fa.

T: A $n \geq 2$ szögpontú G gráfra vonatkozó alábbi állítások egymással ekvivalensek.

i. G összefüggő és körmentes

ii. Ha $n = 1 \Rightarrow$ G izomorf K_1-gyel. Ha $n \geq 2 \Rightarrow \forall$ két pontját pontosan egy út köti össze.

iii. Ha $n = 1 \Rightarrow$ G izomorf K_1-gyel. Ha $n \geq 2 \Rightarrow \forall$ élét elhagyva két komponensű gráfot kapunk.

iv. G összefüggő és $n-1$ éle van.

v. G körmentes és $n-1$ éle van.