5. tétel

Test feletti vektortér fogalma, vektorok lineáris függősége. Vektorrendszer rangja, generátorrendszer, bázis, dimenzió. Vektorterek lineáris leképezései, a leképezés rangja és magja. A vektor fogalma, műveletek vektorokkal (skaláris, vektoriális és vegyes szorzat). Az egyenes egyenletei síkban és térben. A sík egyenletei. Másodrendű görbék.

Vektortér fogalma:

D.: Elemek V összességét vektortérnek nevezzük a T test fölött, ha teljesülnek a következő tulajdonságok:

I. V-ben az ⊕ értelmezett
II. V-ben az ⊕ kommutatív
III. V-ben az ⊕ asszociatív
IV. V-ben az ⊕ invertálható
V. $(a+b)\lambda = \lambda a + \lambda b$ $(\lambda \in T;\ a, b \in V)$
VI. $(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$ $(\lambda, \mu \in T;\ a \in V)$
VII. $(\lambda \cdot \mu) a = \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a)$
VIII. $1 \cdot a = a$ $(1 \in T;\ a \in V)$

A vektortér elemeit vektoroknak, a T test elemeit skalárnak nevezzük.

A V T test fölötti vektortér véges számú vektorának összességét vektorrendszernek nevezzük, amelyben azonos vektorok is előfordulhatnak.

Vektorok lineáris függősége:

D.: Egy vektorrendszert lineárisan összefüggőnek mondunk, ha van a vektorrendszernek egy eleme, amely felírható a vektorrendszer többi elemének lineáris kombinációjaként. Ellenkező esetben lineárisan független.

(Azt mondjuk, hogy V vektortér $\bar{a}$ vektora az $a_1, a_2 \dots a_n$ vektorok lineáris kombinációja, ha $\exists$ olyan $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \in T$, amelyre teljesül a következő egyenlőség: $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$)

D.: Egy vektorrendszert lineárisan összefüggőnek mondunk, ha a zérusvektor nem csupán triviálisan állítható elő az adott vektorrendszer elemeinek a lineáris kombinációjaként. A vektorrendszer lineárisan összefüggő, ha ∃ olyan $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$, amelyek nem mindegyike 0, és teljesül, hogy: $0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$. A zérusvektort csupán triviális módon tudjuk előállítani, a vektorrendszer elemeinek a lineáris kombinációjaként ⇒ a vektorrendszer lineárisan független.

T.: Egy vektorból álló vektorrendszer független ⇔, ha a vektor nem zérusvektor.

T.: V T test fölötti vektortér ∀ vektora legfeljebb egyféleképpen állítható elő, egy lin. független vektorrendszer elemeinek lin. kombinációjaként.

T.: Ha egy vektorrendszer tartalmaz zérusvektort, vagy két arányos vektort ⇒ a vektorrendszer lin. összefüggő.

T.: Ha az $a_1; a_2; \dots a_r$ lin. összefüggő vektorrendszer ⇒ $a_1; a_2 \dots a_r; a_{r+1}; \dots a_n$ vektorrendszer is összefüggő.

T.: Ha egy lin. független vektorrendszerhez a vektortérből egy vektort hozzávéve a vektorrendszer lin összefüggővé válik ⇒ a hozzávett vektor felírható az eredeti vektorrendszer elemeinek a lin. kombinációjaként.

Vektorrendszer rangja, dimenziója:

D.: Azt mondjuk, hogy az $a_1, a_2 \dots a_s$ $(a_i \in T;\ i = 1,2 \dots s)$ vektorrendszer rangja r, ha a vektorrendszerből kiválasztható legalább egy r elemű lin. független vektorrendszer, de az összes kiválasztható $r+1$ elemű vektorrendszer lin összefüggő. (jel.: $A = a_1, a_2 \dots a_s$; $r(A)$; $\varrho(A)$; $r(a_1, a_2 \dots a_s)$)

A vektorrendszer rangja 0 is lehet. Egy vektorrendszer rangja 0 ⇔, ha a vr csupa zérusvektort tartalmaz.

T.: I. Ha egy vr rangja r ⇒ a vr. ∀ eleme egyértelműen írható fel a vr. egy r elemű lin. független vr-e elemeinek lin. kombinációjaként.

II. Ha egy vr-t a vektortérből további vektorokkal bővítjük ⇒ a vr rangja nem csökken. Egy elem hozzávételével a vr. rangja legfeljebb eggyel nő.

III. Ha egy vr-t a vektortérből egy olyan vektorral bővítjük, amelyik felírható a vr. elemeinek lin. kombinációjaként ⇒ a vr. rangja nem változik.

IV. Ha egy vr-t a vektortérből egy olyan vektorral bővítjük, amelyik nem írható fel a vr. elemeinek lin. kombinációjaként ⇒ a vr. rangja pontosan eggyel nő.

T.: (Vektorrendszerek alaptétele)
Legyen $A = (a_1, a_2 \dots a_n)$; $B = (b_1, b_2 \dots b_m)$ egy V T test fölötti vektortér vektorrendszere. Ha az A vr minden egyes eleme felírható a B vr. elemeinek a lin kombinációjaként ⇒ az A vr. rangja nem lehet nagyobb a B vr. rangjánál. ($\rho(a_1; a_2 \dots ; a_n) \leq \rho(b_1; b_2; \dots b_m)$)

T.: A vr. rangja az elemi átalakításokkal szemben invariáns.
(Elemi átalakítások:

- A vr. valamely elemének $\lambda \neq 0$ ($\lambda \in T$) elemmel való szorzása.
- A vr. valamely eleme λ szorosának ($\lambda \in T$) egy másik eleméhez való hozzáadása.)

D.: Azt mondjuk, hogy a V T test fölötti vektortér n dimenziós ($n \in \mathbb{N}$), ha a vektortérből kiválasztható legalább egy n elemű lin. független vr, de a kiválasztható $n+1$ vr-ek már mind lin. összefüggők.
Ha egy V T test fölötti vektortér tartalmaz zérusvektortól különböző vektort és semmilyen n ($n \in \mathbb{N}$)-re sem n dimenziós ⇒ a vektorteret végtelen dimenziósnak hívjuk.

D.: Egy U T test fölötti vektorteret véges dimenziójúnak nevezzük, ha valamely $n \in \mathbb{N}$-re n dimenziós. (jel.: dim U, dim (U))

T.: n dimenziós vektortérben $\forall$ vektor egyértelműen írható fel a vektortér egy n elemű lin. független vektorrendszere elemeinek lin. kombinációjaként.

T.: U T test fölötti vektortér n dimenziós, ha található benne olyan n elemű lin független vr, amely elemeinek lin. kombinációjaként a vt minden vektora felírható.

Generátorrendszer, bázis:

D.: Legyen U T test fölötti vektortér. U T test fölötti vektortér egy vektorrendszerét a vektortér generátorrendszerének nevezzük, ha a vektortér minden eleme előállítható ezen vektorrendszer elemeinek a lineáris kombinációjaként. (n dimenziós vektortérben minden n rangú vektorrendszer generátorrendszer.)

D.: U T test fölötti vektortér minimális generátorrendszerit a vektortér bázisainak nevezzük. (Egy generátorrendszer minimális generátorrendszer, ha $\forall$ elemét elhagyva a megmaradók már nem alkotnak generátorrendszert.)

Vektorterek lineáris leképezései:

D.: Legyenek U_1 és U_2 T test fölötti vektorterek. A $f: U_1 \to U_2$ $(x \to fx, x \in U_1)$ leképezést homogén lin. leképezésnek, röviden lin. leképezésnek nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

I. $\forall x, y$ $(x, y \in U_1)$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$: additív tulajdonság

II. $\forall x$ $(x \in U_1)$ és $\forall \lambda$ $(\lambda \in T)$ teljesül, hogy $f(\lambda x) = \lambda fx \Rightarrow$ homogén tulajdonság

T.: A f homogén lin. leképezés U_1 zérusvektorát U_2 zérusvektorára képzi le.

D.: Legyenek U_1 és U_2 T test fölötti vektorterek. Az $f: U_1 \to U_2$ $(x \to fx)$ leképezést izomorf leképezésnek nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

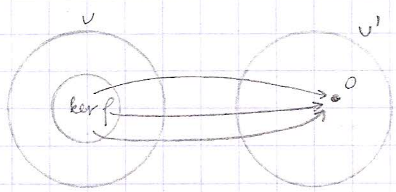
- f bijektív
- $\forall x, y$ $(x, y \in U_1)$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x$ $(x \in U_1)$ $\forall \lambda$ $(\lambda \in T)$ $f(\lambda x) = \lambda (fx)$

Azaz a $f: U_1 \to U_2$ izomorf leképezés, ha homogén lin. leképezés és a leképezés bijektív

D.: Legyen U és U' T test fölötti vektorterek. $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ homogén lin. leképezés. A lin. leképezés képterén értjük a következő halmazt:

$\mathrm{Im}\, f := \{ y \mid y \in U'$ és alkalmas $x \in U$, $fx = y \}$

D.: Legyen U és U' T test fölötti vektorterek. $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ homogén lin. leképezés. Ezen homogén lin. leképezés magján értjük és ker f-vel jelöljük a következő halmazt: $\ker f := \{ x \mid x \in U, fx = 0 \in U' \}$



T.: Legyen U és U' T test fölötti vektortér $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ homogén lin. leképezés. A homogén lin. leképezés képtere alterét képzi U'-nek, a ker f pedig altere U-nak.

D.: Legyen U és U' T test fölötti vektortér $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ homogén lin. leképezés. Ezen homogén lin. leképezés rangján értjük az im f altér dimenzióját. Defektusán pedig a ker f dimenzióját értjük.

Vektor:

D.: Az egyenes két pontja szakaszt határoz meg. Ha a pontok sorrendjét is megadjuk, irányított szakaszról beszélünk.

D.: A sík v. tér irányított S halmazán értelmezett τ ekvivalencia-relációhoz tartozó ekvivalenciaosztályokat vektornak nevezzük.

A sík v. tér irányított szakaszait vektornak nevezzük, megállapodva abban, hogy párhuzamos eltolással egymásba átvihető irányított szakaszok ugyanazt a vektort jelentik.

Műveletek vektorokkal:

I. D.: $\underline{v}$, $\underline{w}$ vektorok összegén értjük és $\underline{v}+\underline{w}$-vel jelöljük azt a vektort, amelynek egy reprezentánsa a $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektor egy-egy megfelelő (összeadható) reprezentánsának, mint irányított szakaszoknak az összege.

T.: Két vektor összege egyértelműen meghatározott, azaz független az őket reprezentáló összeadható irányított szakaszok megválasztásától.

II. vektorok különbsége: $\underline{v} - \underline{w} = \underline{v} + (-\underline{w})$

III. Vektor szorzása skalárral:

D.: $a \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in \mathbb{R}_3$

$\underline{v}$ a-szorosán értjük és $a \cdot \underline{v}$-vel jelöljük azt a vektort, melynek hossza $|a \cdot \underline{v}| = |a| \cdot |\underline{v}|$, iránya pedig a $\underline{v}$ irányával megegyezik, ha $a > 0$, iránya tetszőleges, ha $a = 0$ és az iránya ellentétes a $\underline{v}$ irányával, ha $a < 0$.

IV. Skaláris szorzat:

D.: $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok skaláris szorzatán értjük ($\underline{v} \cdot \underline{w}$-vel jelöljük) a következőt:

$$\underline{v} \cdot \underline{w} := |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos(\underline{v}, \underline{w})$$

M.: Ha a $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok között legalább az egyik zérusvektor, akkor a két vektor szöge nem egyértelmű, ez azonban nem zavaró, mert $|\underline{0}| = 0$ és így a definícióban szereplő szorzat legalább egyik tényezője 0, így a skaláris szorzat is 0.

Geometriai jelentése: A $\underline{v}$ hossza szorozva a $\underline{w}$ vektor $\underline{v}$-ra eső merőleges vetületvektorának előjeles hosszával.

T.: Két vektor merőleges egymásra ⇔ ha skaláris szorzatuk 0.

V. **Vektoriális szorzat:**

D.: $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok vektoriális szorzatán értjük és $\underline{v} \times \underline{w}$ -vel jelöljük azt a vektort, amelyre:

1) $|\underline{v} \times \underline{w}| := |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \sin(\underline{v}, \underline{w})$

2) $\underline{v} \times \underline{w} \perp \underline{v}$ -ra és $\underline{w}$ -ra is; $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \times \underline{w}$ ebben a sorrendben jobb-rendszert alkot.

M.: Ha $\underline{v}$ és $\underline{w}$ közül legalább az egyik zérusvektor ⇒ a két vektor szöge nem egyértelműen meghatározott, de ez nem zavaró, mert akkor a vektoriális szorzat abszolútértéke 0, így a vektoriális szorzat zérusvektor.

Geometriai jelentése: $\underline{v} \not\parallel \underline{w}$ ⇒ $|\underline{v} \times \underline{w}|$ jelenti a két vektor által kifeszített paralelogramma területének a mérőszámát.

Ha $\underline{v} \times \underline{w}$ irányból nézzük ⇒ $\underline{v}$ a $\underline{w}$ -ba az óramutató járásával ellentétes irányba egyenesszögnél kisebb szöggel forgatható el. Ez jelenti azt, hogy $\underline{v}$, $\underline{w}$ és $\underline{v} \times \underline{w}$ jobb-rendszert alkot.

T.: Két vektor párhuzamos ⇔, ha a vektoriális szorzatuk zérusvektor.

VI. **Vegyes szorzat:**

- Legyenek $\underline{v}$, $\underline{w}$ és $\underline{u}$ nem egysíkú vektorok.
- Vegyük fel őket közös O pontból kiinduló reprezentánsával.
- A három vektor nem egysíkú ⇒ meghatároznak egy paralelepipedont (paralelogrammákkal határolt testet)
- Ennek a paralelepipedonnak a térfogatát pozitívnak tekintjük; $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u}$ ebben a sorrendben jobb-rendszert alkot. Ellenkező esetben a térfogat negatív. Így beszélhetünk a test előjeles térfogatáról.

D.: $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u}$ vektorok vegyes szorzatán értjük és $\underline{v}\underline{w}\underline{u}$ -val jelöljük a következő skalár értéket: $\underline{v}\underline{w}\underline{u} := (\underline{v} \times \underline{w})\underline{u}$

T.: 3 vektor vegyes szorzata egyenlő a három vektor által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatával.

T.: Három vektor egysíkú $\Leftrightarrow$, ha vegyesszorzatuk 0.

Műveletek koordinátás alakú vektorokkal:

I. Összeadás, kivonás:

$\underline{v} := (a_1; a_2; a_3)$ $\underline{w} := (b_1; b_2; b_3)$

$\underline{v} \pm \underline{w} := (a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}) \pm (b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}) = (a_1 \pm b_1)\underline{i} + (a_2 \pm b_2)\underline{j} + (a_3 \pm b_3)\underline{k}$

$\underline{v} \pm \underline{w} := (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$

II. Skalárral való szorzás:

$\underline{v} := (a_1; a_2; a_3)$ $a \in \mathbb{R}$

$a \cdot \underline{v} = a(a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}) = (aa_1)\underline{i} + (aa_2)\underline{j} + (aa_3)\underline{k}$

$a \cdot \underline{v} = (aa_1;\ aa_2;\ aa_3)$

III. Skaláris szorzás:

$\underline{v} := (a_1; a_2; a_3)$ $\underline{w} := (b_1; b_2; b_3)$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = (a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k})(b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

IV. Vektoriális szorzás:

$\underline{v} := (a_1; a_2; a_3)$ $\underline{w} := (b_1; b_2; b_3)$

$\underline{v} \times \underline{w} := (a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}) \times (b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}) = (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k}$

$\underline{v} \times \underline{w} = (a_2b_3 - a_3b_2;\ a_3b_1 - a_1b_3;\ a_1b_2 - a_2b_1)$

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

v. Vegyes szorzás:

$\underline{v} = (a_1; a_2; a_3)$ $\qquad$ $\underline{w} = (b_1; b_2; b_3)$ $\qquad$ $\underline{u} = (c_1; c_2; c_3)$

$$\underline{v}\underline{w}\underline{u} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, c_3$$

$$\underline{v}\underline{w}\underline{u} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

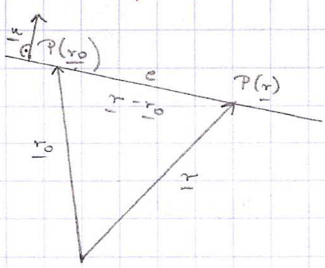
Egyenes egyenletei:

A) Síkban:

a) Legyen adott: $P(\underline{r_0})$; $\underline{n}\,(\neq \underline{0})$; $\underline{r_0} = (x_0, y_0)$; $\underline{n} = (A, B)$

T.: A $P(\underline{r_0})$ ponton áthaladó $\underline{n}$ normálvektorú síkbeli egyenes egyenlete: $\underline{n}\,(\underline{r} - \underline{r_0}) = 0$. Ezt az egyenletet a síkbeli egyenes normálvektoros egyenletének nevezzük.

$\underline{r}$: az egyenes tetszőleges pontjának (futópont) helyvektora.



$\underline{n} \neq \underline{0}$.

b) T.: Minden síkbeli egyenes egyenlete $Ax + By + C = 0$ alakban írható fel, ahol $A, B, C \in \mathbb{R}$, A és B nem egyidejűleg 0. Minden ilyen egyenlet síkbeli egyenes egyenlete. Ezt a síkbeli egyenes általános egyenletének nevezzük.

c) T.: $P_0(\underline{r_0})$ ponton áthaladó $\underline{v}$ irányvektorú síkbeli egyenes egyenlete: $\underline{r} = \underline{r_0} + t\underline{v}$ $(t \in \mathbb{R})$, $\underline{r}$ pedig az egyenes futópontjának a helyvektora. Ezt az egyenletet a síkbeli egyenes paraméteres egyenletének hívjuk.

$\underline{r} = (x, y)$; $\underline{r_0} = (x_0, y_0)$; $\underline{v} = (a, b)$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a \cdot t \\ y &= y_0 + b \cdot t \end{aligned}\right\}$$ síkbeli egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \Rightarrow \underbrace{y-y_0 = \frac{b}{a}(x-x_0)}$$

síkbeli egyenes irányvektoros egyenlete.

d) $P_0(x_0, y_0)$ ponton átmenő m iránytangensű egyenes egyenlete:

$$y-y_0 = m(x-x_0)$$

e) Két ponton átmenő egyenes egyenlete:

$P_1(x_1, y_1)$; $P_2(x_2, y_2)$

$$(y-y_1)(x_2-x_1) = (y_2-y_1)(x-x_1) \Rightarrow y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

f) y tengelyt $B(0, b)$ pontban metsző m iránytangensű egyenes egyenlete:

$$y = mx + b.$$

g) Az origón át nem menő síkbeli egyenes, mely az x tengelyt

A y tengelyt $B(0, b)$ pontban metszi, egyenlete:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Tengelymetszetes egyenlet.

h) A síkbeli egyenes Hesse-féle normálegyenlete.

- p jelenti az origóból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hosszát.
- φ pedig annak a p szakasznak az x tengely pozitív felével bezárt szöge.

3) Térben:

a) T.: A $P_0(\underline{r_0})$ ponton áthaladó v irányvektorú térbeli egyenes egyenlete.

Ezt a térbeli egyenes vektorbeli paraméteres vektoregyenletének nevezzük, ahol $\underline{r}$ az egyenes futópontjának helyvektora.

$$\underline{r} = \underline{r_0} + v \cdot t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{r} &= (x, y, z) \\ \underline{r_0} &= (x_0, y_0, z_0) \\ \underline{v} &= (a, b, c) \end{aligned}\right\} \quad \underline{r} = \underline{r_0} + v \cdot t \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= x_0 + a \cdot t \\ y &= y_0 + b \cdot t \\ z &= z_0 + c \cdot t \end{aligned}\right\}$$

térbeli egyenes paraméteres egyenletrendszere

Ha a, b, c egyike sem $0 \Rightarrow \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

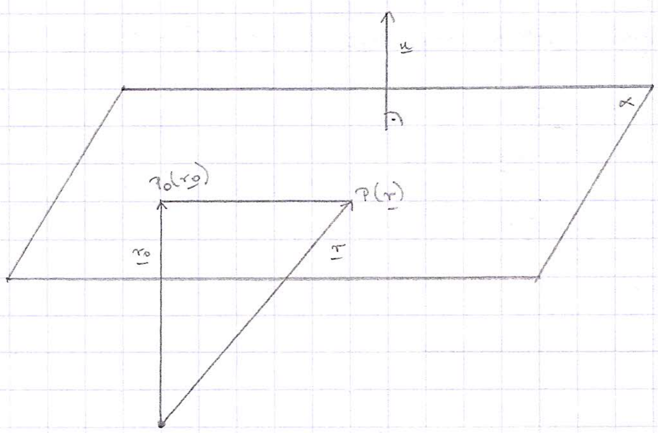
$\Downarrow$

térbeli egyenes egyenletrendszere.

Sík egyenlete:

A síkra merőleges nem zérusvektort adott, sík normálvektorának nevezzük, és $\underline{n}$ $(\neq \underline{0})$-val jelöljük.

T.: A $P_0(\underline{r_0})$ pontra illeszkedő $\underline{n}$ normálvektorú sík egyenlete: $\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r_0}) = 0$. Ezt a sík normálvektoros egyenletének nevezzük, ahol $\underline{r}$ a sík tetszőleges pontjának helyvektora.



T.: Minden sík egyenlete $Ax + By + Cz + D = 0$ alakban írható fel, ahol az együtthatók valós számok és nem egyidejűleg 0 A, B és C. Minden ilyen egyenlet síknak az egyenlete. Ezt az egyenletet a sík általános egyenletének nevezzük.

Példák:

a) $P_1(x_1, y_1, z_1)$ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ $P_3(x_3, y_3, z_3)$ pontokra illeszkedő sík egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Az origón át nem menő, a tengelyeket $A(\underline{a}, 0, 0)$, $B(0, \underline{b}, 0)$, $C(0, 0, \underline{c})$ pontokban metsző sík egyenlete: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

c) $x\cdot\cos\beta_1 + y\cdot\cos\beta_2 + z\cdot\cos\beta_3 - p = 0$ egyenletet a sík Hesse-féle normálegyenletének nevezzük, ahol

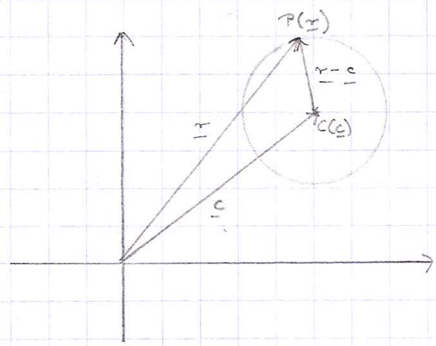
p : az origóból a síkra bocsátott $\perp$ szakasz hossza

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$: a $\perp$-nek az x, y, z tengellyel bezárt szöge.

Másodrendű görbék:

D.: Azon pontok mértani helyét a síkon, amelyek egy adott ponttól adott egyenlő távolságra helyezkednek el, körnek nevezzük. A kör sugara az adott távolság.

A $C(\underline{c})$ középpontú r sugarú vektor egyenlete: $(\underline{r}-\underline{c})^2 = r^2$



Ha $\underline{r} = (x, y)$, $\underline{c} = (u, v) \Rightarrow (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$

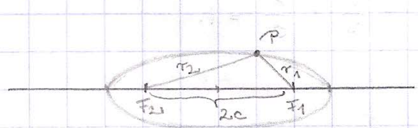
$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, ahol $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$, $A, B \neq 0$

Ha $u = v \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow$ origó középpontú r sugarú kör (centrális helyzetű)

D.: Az ellipszis azon pontok mértani helye a síkban, amelyeknek két adott ponttól mért távolságuk összege állandó, de nem egyenlő a két adott pont távolságával.

($2a$: távolság összege ; F_1 és F_2 : két adott pont = fókuszpont ; $\overline{F_1F_2} = 2c$: fókusztávolság)

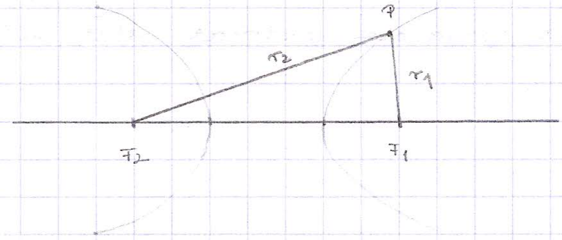
Csak ellipszispontokat lehet szerkeszteni!



$\left.\begin{array}{l}\overline{PF_2} = r_2\\ \overline{PF_1} = r_1\end{array}\right\}$ vezérsugarak

D.: A hiperbola azon pontok mértani helye a síkon, amelyek két adott ponttól mért távolságuk különbsége abszolútértékben állandó, de nem egyenlő 0-val és a két adott pont távolságával.

A szóban forgó távolság-különbség abszolútértékét $2a$-val, adott pontok F_1, F_2, amiket fókuszpontoknak hívunk, $\overline{F_1F_2} = 2c$, amit fókusztávolságnak nevezünk.



$$\left.\begin{aligned} \overline{PF_2} &= r_2 \\ \overline{PF_1} &= r_1 \end{aligned}\right\}$$ vezérsugarak.

Csak hiperbola-pontokat tudunk szerkeszteni!

D.: Ha egy ellipszis v. hiperbola a derékszögű koordinátarendszerben úgy helyezkedik el, h. $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ koordinátájú, akkor az ellipszist v. hiperbolát centrális helyzetűnek nevezzük.

T.: A centrális helyzetű ellipszis v. hiperbola pontjaira és csak azokra teljesül: $r_1 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$

T.: Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$ egyenlet a centrális helyzetű ellipszis ill. hiperbolának a helyzete. Ezt az egyenletet az ellipszis ill. hiperbola közös egyenletének nevezzük.

T.: Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a centrális helyzetű ellipszis v. kör, az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a centrális helyzetű hiperbola egyenlete.

M.: $2b$: melléktengely
c: lineáris excentricitás
$\frac{c}{a} = e$: numerikus excentricitás

Eltolt helyzetű ellipszis és hiperbola egyenlete:

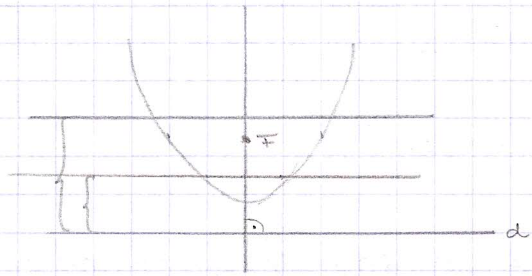
$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

D.: A parabola azon pontok mértani helye a síkon, amelynek egy adott ponttól, és egy, a ponton át nem haladó egyenestől egyenlő távolságra helyezkednek el.

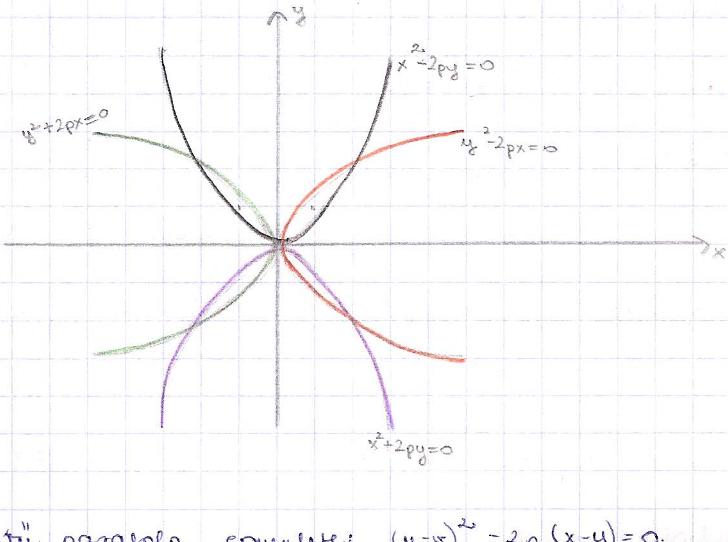
adott pont: a parabola fókuszpontja

adott egyenes: parabola vezéregyenese (direktrix)

Csak parabola pontokat lehet szerkeszteni!



T.: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ fókuszpontú és $x = \frac{-p}{2}$ vezéregyenesű parabola egyenlete: $y^2 - 2px = 0$.



Eltolt helyzetű parabola egyenlete: $(y-v)^2 - 2p(x-u) = 0$.