4. tétel

A mátrix és a determináns fogalma, alaptulajdonságok, a mátrixok rangszám-tétele, a determináns kifejtése. Laplace tétele. Lineáris egyenletrendszerek, a Gauss-féle módszer, Cramer-szabály, Kronecker–Capelli tétel. Homogén lineáris egyenletrendszerek.

<u>Mátrix és a determináns:</u>

D.: Legyen $(T, +, \cdot)$ test. A T test $n \times m$ számú elemének n sorba és m oszlopba történő téglalap alakú elrendezését $n \times m$ típusú mátrixnak nevezzük a T test fölött.

jel.:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \dots & a_{1m} \\ a_{21}, a_{22} \dots & a_{2m} \\ \vdots & \\ a_{n1}, a_{n2} \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{ij} \in T \\ i = 1,2 \dots n \\ j = 1,2 \dots m \end{matrix}$$

Speciális mátrixok:
- diagonális: főátló tartalmaz 0-tól különböző elemet
- egységmátrix:
- permutáló mátrix: egységmátrix sorok v. oszlopok más sorrendű felírása
- trianguláris mátrix: főátló alatt v. felett csupa 0 áll
- szimmetrikus mátrix:
- nilpotens mátrix: hatványozva egy term. számra na. kapjuk.
- projektor mátrix: $P = P^2 = P^3 = \dots = P^n$
- kontinuáns mátrix

D.: Az $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ T test fölötti $n \times n$-es mátrixból értelmezett n-edrendű determinánson a következőt értjük:

$$D = |A| = \det A = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \sum_{\binom{1,2 \dots n}{i_1, i_2 \dots i_n} \in P_n} (-1)^I a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}, \quad \text{ahol:}$$

P_n jelenti az $1,2 \dots n$ elemek összes permutációinak halmazát, I jelenti a $\binom{1\ 2 \dots n}{i_1 i_2 \dots i_n}$ permutációban az inverziók számát.

Determináns tulajdonságai:

I. Determinánsnak vesszük transzponáltját. A determináns értéke egyenlő a transzponált determináns értékével.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D = D^T$$

II. Ha egy determináns valamely sorában minden elem 0, akkor a determináns értéke is 0-val egyenlő.

III. Ha egy determináns valamely sorát megszorozzuk egy $\lambda \in T$ elemmel, $\Rightarrow$ a determináns értéke is szorzódik λ-val.

IV. Ha egy determinánsban két sort felcserélünk, akkor a determináns értéke (-1)-gyel szorzódik.

V. Ha egy determinánsban két sor elemei rendre egyenlőek, akkor a determináns értéke 0.

VI.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ha egy n-edrendű determináns k-dik sorának minden egyes eleme kéttagú összeg, akkor a determináns két olyan n-edrendű determináns összegére bontható, amelyek a k-dik sor kivételével megegyeznek az eredeti determináns soraival, a k-dik sorban pedig az első tagban rendre az összegek első tagjai, a második determináns k-dik sorában pedig rendre az összegek második tagjai állnak.

VII. A determináns értéke nem változik, ha valamelyik sorának $\lambda(\in T)$ szorosát egy másik sorozathoz hozzáadjuk.

VIII. Ha egy n-edrendű determinánsban a főátlóban elhelyezkedő elemek kivételével valamennyi elem 0, akkor a determináns értéke egyenlő a főátlóban elhelyezkedő elemek szorzatával.

A determináns kifejtése:

T.: Ha egy n-edrendű determináns első sorában az első elem kivételével minden elem 0, akkor a determináns értéke egyenlő a nem 0 elem, szorozva azzal az $(n-1)$-edrendű determinánssal, amelyet úgy kapunk, hogy a determinánsból az első sort és az első oszlopot elhagyjuk.

D.: Egy n-edrendű determináns a_{ij} eleméhez tartozó aldeterminánsán értjük azt az $(n-1)$-edrendű determinánst, amely az eredetiből az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyása után keletkezik. (jel.: D_{ij})

D.: Egy n-edrendű determináns a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsán értjük és A_{ij}-vel jelöljük: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$.

T.: (Kifejtési tétel)

Ha egy determináns valamelyik sorának v. oszlopának minden egyes elemét megszorozzuk a hozzájuk tartozó adjungált aldeterminánssal és ezeket a szorzatokat összeadjuk, akkor a determináns értékét kapjuk. (A determináns i-dik sora szerinti kifejtés.)

T.: (Ferdekifejtési tétel)

Ha egy determináns valamelyik sorának minden elemét megszorozzuk egy másik sor megfelelő eleméhez tartozó adjungált aldeterminánssal, és ezeket a szorzatokat összeadjuk, akkor 0-t kapunk.

T.: (Laplace-tétel)

Ha egy n-edrendű determinánsból kiválasztunk k sort v. oszlopot $(1 \leq k < n)$, és ezen kiválasztott sorokban v. oszlopokban található valamennyi k-adrendű aldeterminánst megszorozzuk a saját adjungált aldeterminánsukkal, és ezeket a szorzatokat összeadjuk $\Rightarrow$ a determináns értékét kapjuk.

A mátrix rangja:

D.: Egy mátrix rangján értjük a mátrix zérustól különböző értékű aldeterminánsai rendjének a maximumát.

(Azt mondjuk, h. a mátrix rangja „r", ha a mátrixból kiválasztható legalább egy nem 0 értékű r-edrendű aldetermináns, de minden r-nél magasabbrendű kiválasztható aldetermináns értéke 0.)

T.: A mátrix rangja az elemi sor- ill. oszlopátalakításokkal szemben invariáns.

(Elemi sorátalakítások:

- A mátrix valamely sorának $\lambda \neq 0$ ($\lambda \in T$) elemmel való szorzása.
- A mátrix két tetszőleges sorának felcserélése
- A mátrix $\forall$ sora $\lambda (\in T)$-szorosának egy másik sorhoz való hozzáadása.)

T.: (Mátrixok rangszámtétele)

Ha egy mátrix rangja „r" ⇒ a mátrixból kiválasztható r számú lineárisan független sorvektor v. oszlopvektor, r-nél több azonban nem.

(Egy mátrix maximálisan lineárisan független sorvektorainak a száma egyenlő a maximálisan lineárisan független oszlopvektorainak a számával, és ez egyenlő a mátrix rangjával.)

Lineáris egyenletrendszer:

D.:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert a T test fölötti lineáris egyenletrendszernek nevezzük, ahol m, n 0-tól különböző természetes számok, $a_{ij} \in T$ ($i = 1,2,\ldots m$, $j = 1,2\ldots n$) nem mindegyike 0. Továbbá $c_i \in T$ ($i = 1,2\ldots m$), x_j ($j = 1,2\ldots n$) ismeretlenek.

D.: Az $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ rendezett elem n-est a lineáris egyenletrendszer megoldásának nevezzük, ha $\forall$ i-re teljesül, hogy $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\alpha_t = c_i$ $(\alpha_i \in T,\ i = 1,2 \dots n)$. Azaz az egyenletrendszer $\forall$ egyenletét kielégíti az $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$.

D.: A lineáris egyenletrendszer megoldható, ha van legalább egy megoldása. Ellenkező esetben ellentmondásos, megoldhatatlan.

D.: Ha a lineáris egyenletrendszer jobb oldalán szereplő konstansok nem mindegyike 0, akkor a lineáris egyenletrendszert homogénnek mondjuk.

D.: Két lineáris egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha a megoldáshalmazuk azonos.

A lineáris egyenletrendszer ekvivalens átalakításai:

- A lin. egyenletr. $\forall$ egyenletének $\lambda \neq 0$ $(\lambda \in T)$-vel való szorzása.
- A egyenletr. két egyenletének felcserélése
- A egyenletr. $\forall$ egyenletének λ $(\lambda \in T)$ szorosának egy másik egyenlethez való hozzáadása
- A egyenletr.-ben az azonos ismeretleneket tartalmazó tagok egyidejű felcserélése.
- A egyenletr.-ből a $0=0$ alakú egyenletek elhagyása.

Gauss-elimináció:

Tekintsünk egy lineáris egyenletrendszert (I).

- ekvivalens átalakításokkal elérhető, hogy (I)-es egyenletr.-ben $a_{11} \neq 0$.
- az első egyenletet az er-nek szorozzuk meg $\frac{1}{a_{11}}$-gyel. $\Rightarrow$ az első ismeretlen együtthatója 1 lesz.
- Ennek az egyenletnek az a_{21}-szeresét vonjuk ki a második egyenletből, a_{31}-szeresét a harmadikból ... stb. Így:

$$(\mathrm{II}).\quad \begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = b_1' \\ \qquad\ \ b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = b_2' \\ \qquad\ \ \vdots \\ \qquad\ \ b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n = b_m' \end{cases}$$

Tekintsük:

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n = b_2' \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \dots + b_{3n}x_n = b_3' \\ \vdots \\ b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + \dots + b_{mn}x_n = b_m' \end{cases}$$

- Ismételjük az előző eljárást. Az eljárás akkor ér véget, ha vagy elfogytak az egyenletek, vagy a lin. er-ek további egyenletének bal oldalán valamennyi együttható 0.
- Így végül (1)-gyel ekvivalens er-hez jutunk:

$$
(\mathrm{II.})\quad
\begin{cases}
x_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3 + \dots + d_{1n}x_n = b_1^* \\
\qquad x_2 + d_{23}x_3 + \dots + d_{2n}x_n = b_2^* \\
\qquad\vdots \\
\qquad\qquad x_r + d_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{rn}x_n = b_r^* \\
\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^* \\
\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+2}^* \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad 0 = b_m^*
\end{cases}
\qquad r \leq \min(m, n)
$$

T.: Az (1) lin. er megoldható $\Leftrightarrow$, ha a hozzá tartozó egyik trapéz alakú lin. egyenletrendszerének azon egyenleteiben, ahol a bal oldalak 0-val egyenlők, a jobb oldali konstansok is 0-val egyenlőek.

T.: Ha az (1) lin. er. megoldható $\Rightarrow$ a megoldások az együtthatókat tartalmazó testből kerülnek ki, a lin. er-nek egy megoldása van, ha a hozzá tartozó egyik trapéz alakú er-ében

- $r = n$ és ha
- $n > r \Rightarrow n - r$ szabadon választható értéktől

függően végtelen sok megoldása van az er-nek.

T.: Az (1). homogén lin er-nek csupán egy megoldása van (triviális megoldás) $\Leftrightarrow$ ha a hozzá tartozó egyik trapéz alakú lin. er-ében $n = r$. Akkor és csak akkor van az (1) homogén er-nek triviálistól különböző megoldása, ha $n < r$. Ha egy homogén lin. er. kevesebb egyenletet tartalmaz, mint ismeretlent $\Rightarrow$ mindig $\exists$ triviálistól különböző megoldása.
(azaz végtelen sok megoldása van.)

Cramer - szabály:

Tekintsük a következő lin. er-t:

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

lin. er. mátrixa: ismeretlenek oszlopvektora: szabad tagok oszlopvektora:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A lin. algebrai rendszer determinánsa:

$$|A| = D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D.: A lin. egyenletrendszert szabályos lin. er-nek nevezzük, ha n ismeretlent tartalmaz és az ismeretlen és az er. determinánsa nem 0.

T.: Egy szabályos lin. er. mindig megoldható.

(Cramer - tétel)

I. egy megoldása létezik

II. a megoldás egy rendezett elem n-es

III. a megoldások $x_k = \frac{D_k}{D}$ $(k = 1, 2 \dots n)$, ahol D_k jelenti az er. determinánsát, amely abban különbözik az er. determinánsától, hogy a k-dik oszlop helyett benn a konstans oszlop szerepel.

T.: (Kronecker - Capelli - tétel)

A (1.) lin egyenletrendszer megoldható $\Leftrightarrow$, ha az er. mátrixának a rangja egyenlő az er. kibővített mátrixának rangjával. $r(A) = r(\bar{A})$