10. tétel

Halmazelméleti alapismeretek, műveletek halmazokkal. Halmazok számossága. A matematikai logika elemei, következményfogalom, predikátumlogikai fogalmak. A formális axiomatikus elméletek fontosabb jellemzői.

Matematikai logika elemei:

logikai összekötőjelek jelentése:

1. Negáció:

D.: Legyen A formula. ¬A kiolvasása: nem igaz, hogy A v. az ezzel egyenértékű megfogalmazás. Értékelése: igaz, ha A hamis; hamis, ha A igaz.

A	¬A	¬¬A
i	h	i
h	i	h

2. Konjunkció:

D.: Legyen A és B két formula. Kiolvasása A és B, v. az ezzel egyenértékű megfogalmazás. Értékelése: akkor és csak akkor igaz, ha A és B is igaz.

A	B	A∧B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3. Diszjunkció:

D.: Legyen A és B két formula. A vagy B, ahol a „vagy” megengedő értelmű „vagy”, diszjunkciónak nevezzük. Értékelése: akkor és csak akkor hamis, ha A és B is hamis.

A	B	A∨B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

a) akkor és csak akkor igaz, ha legalább az egyik igaz.

b) kizáró vagy = Zsegalkin-művelet: akkor és csak akkor igaz, ha pontosan az egyik igaz.

c) összeférhetetlenségi vagy = Sheffer-művelet: Akkor és csak akkor igaz, ha legfeljebb az egyik igaz.

4. Kondicionális:

D.: Legyen A és B formula. $A \Rightarrow B$ kiolvasása A kondicionális B, ill. az ezzel egyenértékű megfogalmazás. Értékelése: akkor és csak akkor hamis, ha A igaz B pedig hamis.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5. Bikondicionális:

D.: Legyen A és B formula. Elnevezés: A bikondicionális B. Akkor és csak akkor igaz, ha mindkettő igaz v. hamis.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

D.: Az Ω nyelv valamely A formulája logikai törvény, ha a nyelv minden modelljében minden értékelésnél igaz a formula. (jel.: $\models A$)
(Elnevezése: azonosan igaz formula v. tautológia.)

D.: Az Ω nyelv egy A formulája azonosan hamis, v. kontradikció, ha minden modellben minden értékelésnél hamis.

D.: Az Ω nyelv egy A formulája kielégíthető, ha $\exists$ olyan modell, melyben van olyan értékelés, melynél a formula igaz.

D.: Az $\mathcal{L}$ nyelv A és B formuláját logikailag ekvivalensnek nevezzük, ha az $A \Leftrightarrow B$ logikai törvény.

A kijelentéslogika legfontosabb törvényei:

I. A konjunkció és a diszjunkció kommutatív:

$A \wedge B \sim B \wedge A$ $\qquad$ $A \vee B = B \vee A$

II. Mindkét művelet idempotens:

$A \wedge A \sim A$ $\qquad$ $A \vee A \sim A$

III. Mindkét művelet asszociatív:

$A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$ $\qquad$ $A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$

IV. Disztributív törvények:

$A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\qquad$ $A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

V. Eliminációs v. elnyelési törvények:

$A \wedge (A \vee B) \sim A$ $\qquad$ $A \vee (A \wedge B) \sim A$

VI. De Morgan törvények

$\neg (A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$ $\qquad$ $\neg (A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$

Kondicionálisra vonatkozó törvények:

1. Nem kommutatív, nem asszociatív, nem idempotens $\Rightarrow$ AZONOSSÁG törvénye:

$\models A \Rightarrow A$

II. KONTRAPOZÍCIÓ törvénye:

$A \Rightarrow B \sim \neg B \Rightarrow \neg A$

III. LÁNC-szabály:

$\models ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ $\rightarrow$ következtetési séma

IV. REDUCTIO AD ABSURDUM:

$\models ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow \neg A$

Bikondicionális:

I. Nem idempotens, de kommutatív és asszociatív

II. Arisztotelész törvényei:

$\models A \vee \neg A$: kizárt a harmadik törvénye

$\models \neg(A \wedge \neg A)$: ellentmondásmentesség törvénye

III. Műveletek szabványformulákkal:

$A \vee \top \sim \top$ $\qquad$ $A \Rightarrow \top \sim \top$

$A \vee \bot \sim A$ $\qquad$ $A \Rightarrow \bot \sim \neg A$

$A \wedge \top \sim A$ $\qquad$ $\top \Rightarrow A \sim A$

$A \wedge \bot \sim \bot$ $\qquad$ $\bot \Rightarrow A \sim \top$

Predikátumlogikai fogalmak:

Belső finom szerkezet, azaz a kvantoros struktúra leírására szolgál a tiszta predikátumlogika nyelve. Egy típusú nyelv; konstans ill. fgvjel nincs; tetszőleges változójú predikátum-szimbólumok az atomi predikátumok.

Logikai törvények:

I. Fiktív kvantorok esete:

$\forall x A \sim A$ $\qquad$ $\exists x A \sim A$ $\qquad$ (A-ban x nem paraméter)

II. Egynemű kvantorok cseréje:

$\forall y \forall x A \sim \forall x \forall y A$ $\qquad$ $\exists y \exists x A \sim \exists x \exists y A$

III. Kvantorcsere kondicionálisban:

$\models \forall x A \Rightarrow \exists x A$

pl.: Adott egy 6 fős társaság. $I(x;y) :\Leftrightarrow$ x ismeri y-t.

Valaki mindenkit ismer : $\models \exists x \forall y \; I(x;y)$

Mindenkit ismer valaki : $\forall y \exists x \; I(x;y)$

IV. A de Morgan-féle kvantoros törvények:

$\neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$ $\qquad$ $\neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$

V. Kvantorok egyoldali kiemelése: (x nem paraméter A-ban)

$A \wedge \forall x\, B(x) \sim \forall x\, (A \wedge B(x))$ $\qquad$ $A \Rightarrow \forall x\, B(x) \sim \forall x\, (A \Rightarrow B(x))$

$A \vee \forall x\, B(x) \sim \forall x\, (A \vee B(x))$ $\qquad$ $A \Rightarrow \exists x\, B(x) \sim \exists x\, (A \Rightarrow B(x))$

$A \wedge \exists x\, B(x) \sim \exists x\, (A \wedge B(x))$ $\qquad$ $\forall x\, B(x) \Rightarrow A \sim \exists x\, (B(x) \Rightarrow A)$

$A \vee \exists x\, B(x) \sim \exists x\, (A \vee B(x))$ $\qquad$ $\exists x\, B(x) \Rightarrow A \sim \forall x\, (B(x) \Rightarrow A)$

VI. Kvantorok kétoldali kiemelése:

$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) \sim \forall x\, (A(x) \wedge B(x))$

$\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \sim \exists x\, (A(x) \vee B(x))$

$\models (\exists x\, (A(x) \wedge B(x))) \Rightarrow (\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x))$

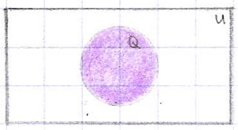
$\models (\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x)) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$

D.: Az egyváltozós predikátumbetűket és ezeknek a $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ jelekkel történő összekapcsolását nyitott egyjegyű formulának nevezzük.

D.: Ha a nyitott egyjegyű formulában szereplő változót individuumnévvel helyettesítjük, vagy kvantorral lekötjük, akkor zárt egyjegyű formulát kapunk.

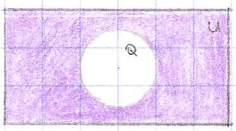
Nyitott formulák:

$Q(x)$



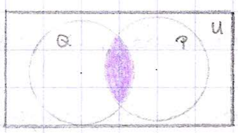
$Q \subset U$

$\neg Q(x)$



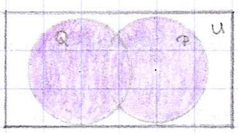
$\overline{Q}$

$Q(x) \wedge P(x)$



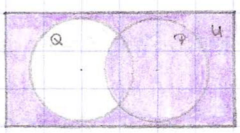
$P \cap Q$

$Q(x) \vee P(x)$



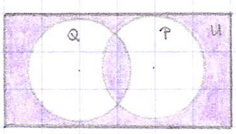
$P \cup Q$

$Q(x) \Rightarrow P(x)$



$\overline{Q \setminus P}$

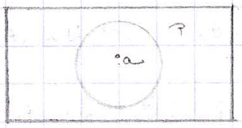
$Q(x) \Leftrightarrow P(x)$



$\overline{P \triangle Q}$

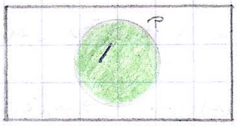
Zárt formulák:

$P(a)$



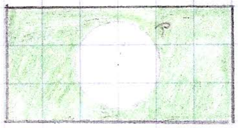
$a \in P$

$\exists x P(x)$



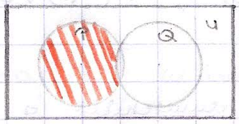
$P \neq \emptyset$

$\forall x P(x)$



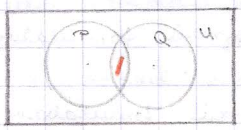
$\overline{P} \neq \emptyset$

Általános állító: Minden P, Q: $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$



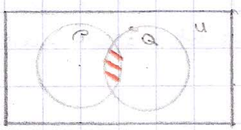
$P \setminus Q = \emptyset$ (a)

Részleges állító: Van P, ami Q: $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$



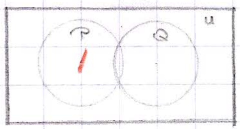
$P \cap Q \neq \emptyset$ (i)

Általános tagadó: Minden P nem Q: $\forall x\,(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$



$P \cap Q = \emptyset$ (e)

Részleges tagadó: Van P, ami nem Q: $\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$



$P \setminus Q \neq \emptyset$ (o)

Következményfogalom:

D: Jelölje Γ az Ω véges sok formulájának halmazát, A pedig az Ω nyelv egy formuláját. Azt mondjuk, hogy A logikai következménye a Γ-beli formuláknak, ha az Ω nyelv minden M interpretációja, valamint az A-nak és a Γ-beli formuláknak minden olyan értékelése esetén, amikor a Γ-beli formulák mindegyike igaz M-ben, A is igaz M-ben.

Ha a Γ a $B_1, \dots, B_n$ formulákból áll, akkor ezeket premisszáknak (feltételeknek), az A-t konklúziónak (zárótételnek) nevezzük.

Nevezetes következtetési sémák:

1. Modus ponens (helyező mód):

$$\frac{\begin{array}{c}P \Rightarrow Q \\ P\end{array}}{Q}$$

II. Indirekt sémák:

a)

$$\frac{\begin{array}{c}\neg P \Rightarrow Q \\ \neg P \Rightarrow \neg Q\end{array}}{P} \qquad \frac{\begin{array}{c}P \Rightarrow Q \\ P \Rightarrow \neg Q\end{array}}{\neg P}$$

b)

$$\frac{\begin{array}{c}Q \\ \neg P \Rightarrow \neg Q\end{array}}{P} \qquad \frac{\begin{array}{c}Q \\ P \Rightarrow \neg Q\end{array}}{\neg P}$$

c)

$$\frac{\begin{array}{c}\neg P \Rightarrow Q \\ \neg Q\end{array}}{P} \qquad \frac{\begin{array}{c}P \Rightarrow Q \\ \neg Q\end{array}}{\neg P}$$

III. Kontrapozíció:

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\neg Q \Rightarrow \neg P}$$

IV. Láncszabály (hipotetikus szillogizmus)

$$\frac{\begin{array}{c}P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R\end{array}}{P \Rightarrow R}$$

V. Diszjunktív szillogizmus:

$$\frac{\begin{array}{c}P \vee Q \\ \neg P\end{array}}{Q}$$

Formális axiomatikus elméletek:

D: Formális axiomatikus elmélet alatt értjük az olyan $T = \langle \Omega, x \rangle$ párt, ahol: Ω egy matlog nyelv, x pedig az Ω zárt formuláinak halmaza, melyeket a T elmélet nem logikai axiómáinak nevezünk.

D: Az Ω nyelv M interpretációja a T elmélet modellje, ha M-ben igaz a T minden egyes nem logikai axiómája.

D.: Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{L}$ nyelv A formulája levezethető a T elméletben, ha a predikátumkalkulusban Γ-ból levezethető A ($\Gamma \vdash A$), ahol Γ-ban az elmélet véges sok nem logikai axiómája van.

D.: A T formális axiomatikus elmélet ellentmondástalan, ha $\nexists$ az $\mathcal{L}$ nyelvben olyan zárt formula, hogy teljesül, hogy $T \vdash A$ és levezethető $\neg A$ is. ($T \vdash \neg A$)

T.: (Gödel-féle teljességi tétel)

Minden elsőrendű matlog nyelvet használó ellentmondástalan elméletnek van modellje.

T.: (Predikátum-kalkulus teljessége)

Ha az A formula logikai törvény, akkor az levezethető a predikátum-kalkulusban.

D.: A T elmélet teljes, ha az $\mathcal{L}$ nyelvben megfogalmazott tetszőleges A zárt formula esetén teljesül, hogy vagy az A vagy a negált A az elméletben levezethető.

T.: (Gödel nem teljességi tétele)

Bizonyos feltételnek eleget tevő elmélet nem teljes.

D.: Egy axiomatikus elmélet A állítása független a rendszer X axiómáitól, ha X-ből az A nem vezethető le: $X \nvdash A$.

Formális axiomatikus elméletek rendeltetése:

Nyelv – Axiómák – Definíció – Levezetés

Axiómák: Logikai, Matematikai

Levezetés: Tételek

Formális axiomatikus elmélet: elemi aritmetika elmélete, nyelve: AR nyelv

nem logikai axiómák:

1. egyenlőség axiómák:

$$x = x$$

$$((x=y) \wedge (x=z)) \Rightarrow (y=z) \qquad \forall x, y, z$$

II. Peano-axiómák:

$$S0 \neq 0$$

$$(Sx = Sy) \Leftrightarrow (x = y)$$

$(A(0) \wedge \forall x (A(x) \Rightarrow A(Sx))) \Rightarrow \forall x A(x)$ → teljes indukció axiómasémája, ahol

A a nyelv tetszőleges formulája.

III. Az összeadást és a szorzást definiáló axiómák:

$$x + 0 = x$$

$$x + S(y) = S(x+y)$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x \cdot S(y) = xy + x$$

Ennek az elméletnek a modellje a term. számok (ω) halmaza. Az elmélet nem teljes.

Halmazelmélet:

- nyelve: M+
- egytípusú nyelv
- termek és formulák definiálása együtt történik.
- másodrendű nyelv.
- megadható a nyelv modellje

Axiómák:

1. Meghatározottsági axióma: $(x = y \wedge x \in z) \Rightarrow y \in z$
2. Az absztrakció axiómája: $(z \in \{x \mid f(x)\}) \Leftrightarrow f(z)$

D.: Nem rendezett pár fogalma: $\{x, y\} := \{u \mid u = x \vee u = y\}$

D.: Egyelemű halmaz fogalma: $\{x\} := \{u \mid u = u\}$

D.: Az üreshalmaz fogalma: $\emptyset := \{u \mid u \neq u\}$

D.: Két halmaz metszete: $x \cap y := \{u \mid u \in x \wedge u \in y\}$

Két halmaz uniója: $x \cup y := \{u \mid u \in x \vee u \in y\}$

Két halmaz különbsége: $x \setminus y := \{u \mid u \in x \wedge u \notin y\}$

D.: Korlátozott kvantorok fogalma

1.) $(\forall x \in y) f(x) \Leftrightarrow \forall x (x \in y \Rightarrow f(x))$: Minden y-beli x esetén teljesül f(x)

2.) $(\exists x \in y) f(x) \Leftrightarrow \exists x (x \in y \wedge f(x))$: Van olyan y-beli x, amelyre fennáll a f(x)

D.: Halmazrendszer uniója : $\cup x := \{z \mid (\exists u \in x)(z \in u)\}$

Halmazrendszer metszete : $\cap x := \{z \mid (\forall u \in x)(z \in u)\}$

D.: Univerzális halmaz: $U := \{z \mid z = z\}$

D.: Hatványhalmaz: $P x := \{u \mid u \subseteq x\}$

D.: Russell-féle halmaz: A R halmaz azon halmazok összessége, amelyre teljesül, h. a halmaz nem eleme önmagának. $R := \{x : x \notin x\}$

A naiv halmazelmélet ellentmondásosságának kiküszöbölésére több axiomatikus felépítés jött létre. A leggyakrabban használt elmélet a Zermelo-Fraenkel-féle axiomatikus elmélet.

Axiómák:

I. Meghatározottsági axióma:

$\forall x \forall y \forall z \, ((x = y \wedge x \in z) \Rightarrow y \in z)$

$x = y := \forall u \, (u \in x \Leftrightarrow u \in y)$

II. Üres halmaz axiómája: (halmaz létezését kimondó)

$\exists$ olyan halmaz, amelynek egyetlen eleme sincs

III. Páraxióma: (halmazképző)

$\forall$ két halmazhoz $\exists$ olyan halmaz, amely ezeket és csak ezeket tartalmazza elemként.

$\{x, y\} \Rightarrow$ belőlük képzett pár

IV. Unió axióma: (halmazképző)

∀ halmazrendszerhez létezik olyan halmaz, amely azokat és csak azokat a halmazokat tartalmazza elemként, melyek a rendszer legalább egy elemének elemei.

V. Hatványhalmaz axióma:

Minden halmazhoz ∃ olyan halmaz, melynek az elemei az adott halmaz részhalmazai.

VI. Végtelen halmaz axiómája: (halmaz létezését kimondó)

∃ olyan halmaz, amelynek az üreshalmaz eleme, és ∀ y elem esetén $y \cup \{y\}$ egyelemű halmaz is eleme a halmaznak.

VII. Részhalmaz axióma:

∀ x halmaz és f tulajdonság esetén ∃ olyan u halmaz, amely x-nek a f-tulajdonságú elemeiből áll.

VIII. Helyettesítés (pótlás) axiómája:

Ha definiált a halmazelméleti fgv, melynek az x az értelmezési tartománya ⇒ egy ilyen f fgvnek az értékkészlete is halmaz.

IX. Regularitási axióma (fundálás axiómája):

∀ x nem üres halmaznak ∃ olyan z eleme, melyre teljesül, hogy az x-szel való metszete üreshalmaz. ($x \neq \emptyset$, $z \cap x = \emptyset$)

X. Kiválasztási axióma:

Ha egy x halmaz nem üres, és elemei páronként diszjunkt nem üres halmazok, akkor létezik olyan z kiválasztható halmaz, amelynek x ∀ elemével pontosan egy közös eleme van.

Számosság:

D.: Két halmaz számossága megegyezik, ha két halmaz ekvivalens, ha $\exists$ olyan bijekció, mely egyiket a másikra képezi le.

(jel.: $x \simeq y$)

D.: Egy halmazt végesnek nevezünk, ha ekvivalens valamely természetes számmal.

D.: Egy halmazt megszámlálhatónak nevezünk, ha ekvivalens a természetes számok halmazával.

T.: Az ω, azaz a természetes számok halmaza végtelen halmaz.

T.: (Cantor-tétel)

Egyetlen halmaz sem ekvivalens a hatványhalmazával. $\neg(\omega \simeq P\omega)$

D.: Egy számosságot alef-nek nevezünk, ha valamely jól rendezett halmaz számossága.