10. Halmazelméleti alapismeretek, műveletek halmazokkal. Halmazok számossága. A matematikai logika elemei, következményfogalom, predikátumlogikai fogalmak. A formális axiomatikus elméletek legfontosabb jellemzői.

Halmazelméleti ismeretek, műveletek halmazokkal

A halmazelméletet axiomatikus felépítésben tárgyaljuk (Cantor, naiv halmazelmélet)

Első lépésként három alapfogalmat vezetünk be:-halmaz, -elem,-egy elem eleme egy halmaznak.

A Zermelo – Fraenkel-féle axiomatikus elmélet:

(Az axiómák ismertetésekor az úgynevezett ZF nyelvet használjuk, mely egy elsőrendű nyelv.(Egytípusú, változói:x, y,..., amelyek halmazokat jelölnek. Nincs konstans, függv. szimbólum; termek csak a változók. Egyetlen predikátumszimbólum az $\in$.)

A ZFC formális axiomatikus elmélet nem logikai axiómái:

1. Az üres halmaz axiómája:

Létezik olyan halmaz, amelynek nincs elem. Ezt üres halmaznak nevezzük, és $\emptyset$-val jelöljük.

2. A meghatározottsági axióma:

Megjegyzés: Ebből az axiómából (a többi axióma segítségével) bizonyíthatók az egyenlőségre vonatkozó törvények.

3. Részhalmaz-axióma (a kijelölés axiómája):

Minden x halmaz és φ tulajdonság esetén $\exists$ egy olyan u halmaz, amelyhez x-nek pontosan azok az elemei tartoznak, amelyekre a φ tulajdonság teljesül.

Megjegyzés: Definiálható két halmaz metszete, különbsége, valamint az ω halmaz létezése is levezethető.

Definíció:(részhalmaz) Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül. Ezt $A \subset B$ vagy $B \supset A$ módon jelöljük.

4. Páraxióma:

Ez halmazalkotó axióma, szövegesen: bármely két halmazhoz létetik olyan halmaz, amelynek mindkettő eleme és más elem nincs.

5. Unióaxióma:

Minden $\mathcal{A}$ halmazrendszerhez létezik egy olyan halmaz, amelynek x akkor és csak akkor eleme, ha van olyan $A \in \mathcal{A}$, amelyre $x \in A$. Ezt a halmazt az A halmazrendszer egyesítésének vagy uniójának nevezzük és az $\cup \mathcal{A}$ vagy az $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ szimbólummal jelöljük.

($\cup \mathcal{A}$:={x: van olyan $A \in \mathcal{A}$, amelyre $x \in A$}).

Megjegyzés: A meghatározottsági axióma garantálja az egyértelműséget.

Definíció: Minden A, B halmazhoz létezik olyan halmaz, amelynek x akkor és csak akkor eleme, ha $x \in A$ vagy $x \in B$. Ezt a halmazt az A és B egyesítésének (vagy uniójának) nevezzük. $A \cup B$

$A \cup B := \{x: x \in A \text{ vagy } x \in B\}$.

Definíció: Legyen A egy nem üres halmazrendszer. $A \cap \mathcal{A} := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A := \{x: x \in \mathcal{A}, \text{ minden } A \in \mathcal{A} \text{ esetén}\}$ halmazt az $\mathcal{A}$ metszetének nevezzük.

Speciálisan: az A és B halmaz metszete (vagy közös része) az $A \cap B := \{x: x \in A \text{ és } x \in B\}$ halmaz.

Definíció: Az A és B halmaz különbsége az $A \setminus B := \{x : x \in A és x \notin B\}$ halmaz.

Definíció: Legyen X adott halmaz és $A \subset X$. Az $X \setminus A$ halmazt az A X-re vonatkozó komplementerének nevezzük.

Műveleti tulajdonságok:

Tétel: Legyen X adott halmaz, és A, B, $C \subset X$.

(1) $(A \cup B) \cup C) = A \cup (B \cup C)$ és $(A \cap B) \cap C) = A \cap (B \cap C)$ (asszociativitás)

(2) $A \cup B = B \cup A$ és $A \cap B = B \cap A)$ (kommutativitás)

(3) $(A \cup B) \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ és $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (disztributivitás)

(4) $A \cup A = A$ és $A \cap A = A$ (idempotencia)

Tétel: (De Morgan-törvények) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

6. Hatványhalmaz-axióma:

Minden halmazon van olyan halmaz, amelynek az elemei az adott halmaz részhalmazai. Jele: Px.

Definíció: Minden A halmazon létezik egy olyan halmaz, amelynek H $\Leftrightarrow$ eleme, ha részhalmaza A-nak. Ezt a halmazt az A hatványhalmazának nevezzük, és P(A)-val jelöljük.

7. Kiválasztási axióma:

Ha egy x nem üres halmaz elemei páronként diszjunkt, nem üres halmazok, akkor létezik olyan z kiválasztó halmaz, amelynek x minden elemével pontosan egy közös eleme van. Ennek az axiómának a jele: AC [illegible] szívesen használják, mert a többi axiómából nem levezethető.)

8. Regularitási axióma:

Ha x nem üres halmaz, akkor x-ben van olyan z elem, hogy $z \cap x = \emptyset$.

9. A helyettesítés (pótlás) axiómája:

Ha a v halmaz x eleméhez hozzá van rendelve egy elem (z), akkor létezik olyan u halmaz, amelynek elemei a hozzárendelt (z) elemek.

10. A végtelen halmaz axiómája:

Létezik olyan halmaz, amelynek eleme az $\emptyset$ és minden y eleme esetén $y \cup \{y\}$ is eleme a halmaznak.

<u>Véges, végtelen halmazok számossága</u>

Definíció: Az A halmaz ekvivalens (vagy egyenlő számosságú) a B halmazzal, ha van olyan $f: A \to B$ invertálható függvény, amelynek értékkészlete B. Jelölés: A~B

Definíció: Az A halmaz véges, ha $A=\emptyset$, vagy létezik olyan $n \in N$, hogy A ekvivalens $\{1,2,\ldots,n\}$ halmazzal. Ez utóbbi esetben azt mondjuk, hogy az A elemeinek száma n, vagy azt, hogy A n elemű halmaz.

Definíció: Legyen A adott halmaz.

(1) Az A halmaz végtelen, ha nem véges.

(2) Az A halmaz megszámlálhatóan végtelen, ha ekvibalens a természetes számok halmazával.

Tétel: Végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.

Tétel: Az A halmaz $\Leftrightarrow$ végtelen, ha van olyan valódi részhalmaza amellyel egyenlő számosságú.

Tétel: Egy megszámlálható halmaz minden részhalmaza megszámlálható.

<u>Halmazok számossága közötti egyenlőtlenség</u>

Definíció: Az A halmaz számossága kisebb vagy egyenlő, mint a B halmaz számossága (vagy B számossága nagyobb egyenlő, mint A számossága), ha B-nek van olyan részhalmaza, amely egyenlő számosságú B-vel.

Definíció: Az A halmaz számossága kisebb, *mint* a B halmaz számossága (vagy B számossága nagyobb, mint A számossága), ha A számossága kisebb vagy egyenlő, mint B számossága, de A nem egyenlő számosságú B-vel.

<u>Nevezetes halmazok számossága</u>

Tétel: A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.

Tétel: A valós számok halmazának számossága nagyobb, mint a természetes számok halmazának számossága.

Defimíció: A valós számok halmazát és a vele ekvivalens halmzokat kontinuumszámosságú halmazoknak nevezzük.

Tétel: Az irracionális számok halmaza nem megszámlálható.

Tétel: Ha $n \in N$, és A n elemű halmaz, akkor A hatványhalmaza 2^n elemű halmaz.

Cantor-féle kontinuumhipotézis: minden olyan halmazrendszer, amely a természetes számok halmazának részhalmazaiból áll, vagy véges, vagy megszámlálható, vagy számossága megegyezik a természetes számok hatványhalmazának számosságával.

(Az állítás lényege: nem létezik olyan halmaz, amelynek számossága megszámlálhatóan végtelen és kontinuum számosság között van.

A kiálasztási axiómából következik a jólrendezési tétel, így minden halmaz számossága alef számosság.

Definíció: Egy A halmaz számossága vele ekvivalens kezdőrendszámmal egyenlő.

(Valamely α rendszámot kezdőrendszámnak nevezünk, ha α nem ekvivalens egyetlen nála kisebb rendszámmal sem.

<u>Matematikai logika elemei</u>

Tárgya: maga a matematika

Eszköze: matematikai logikai nyelv (pl.: az elemi geometria leírására a geom nyelvet használja..stb.)

Speciális logikai nyelvnek tekinthetők a kijelentés-, és a predikátumlogika.

<u>KIJELENTÉSLOGIKA</u>

A Boole-kombinációk leírására szolgál (a későbbiekben definíció)

Megkülönböztetjük a nyelv szemantikáját (jelsorozat, jelentéstan) és szintaxisát (nyelvsorozat)

Kijelentésváltozók: nagy betűk (A, B, …- propozicionális betűk)

Logikai jelek: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Az olyan kijelentő mondatot, amely egy tárgyaláson belül igaz vagy hamis, *kijelentés*nek (ítéletnek) nevezzük: Ha egy kijelentésről egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy igaz vagy hamis, akkor kétértékű vagy alternáló logikáról beszélünk. A logika ilyen formában való felosztását Arisztotelész is megfogalmazta:

<u>Ellentmondástalanság törvénye:</u>

Egy kijelentés nem lehet egyszerre igaz és hamis.

<u>A kizárt harmadik törvénye:</u>

Ha egy kijelentés hamis, akkor nem igaz, mert harmadik lehetőség nincs.

NEGÁCIÓ (TAGADÁS)

Jelöljön p egy tetszőleges kijelentést. A „nem igaz, hogy p" állítást vagy ennek egy vele egyenértékű átfogalmazását a p kijelentés *tagadásának* vagy negációjának nevezzük.

Jelölése: $\neg p$

Logikai értéke:

$$|\neg p| = \begin{cases} i, & \text{ha } |p| = h; \\ h, & \text{ha } |p| = i. \end{cases}$$

Kettős negáció törvénye: $|\neg\neg p| = |p|$

Ha egy formula előtt véges sok negációjel van, és azok száma páros, akkor az elhagyhatók, ha páratlan eggyel helyettesíthetők.

KONJUNKCIÓ (ÖSSZEKAPCSOLÁS)

Jelöljön p, q két tetszőleges kijelentést, a „p és q" alakú összetett kijelentést, vagy ezeknek egy vele egyenértékű átfogalmazását a p és q kijelentések *konjunkciójának* nevezzük.

Jelölése: $p \wedge q$

Logikai értéke:

$$|p \wedge q| = \begin{cases} i, & \text{ha } |p| = |q| = i \\ h, & \text{minden más estben.} \end{cases}$$

DISZJUNKCIÓ (MEGENGEDŐ VAGY)

Adott két kijelentés p és q. Ha két kijelentést összekapcsoljuk a vagy kötőszóval, *diszjunkció*ról („megengedő vagy"-ról) beszélünk.

Jelölése: $p \vee q$

Logikai értéke:

$$|p \vee q| = \begin{cases} h, & \text{ha } |p| = |q| = h \\ i, & \text{minden más esetben.} \end{cases}$$

IMPLIKÁCIÓ

Legyen p és q tetszőleges kijelentések. A „nem igaz, hogy p és nem q" alakú kijelentéseket a p és q állítások *implikáció*jának nevezzük.

Jelölés: $p \to q$

Logikai érték:

$$|p \to q| = \begin{cases} h, & \text{ha } |p| = i \text{ és } |q| = h \\ i, & \text{minden más esetben,} \end{cases}$$

(ahol p előtag, q utótag).

Definíció: **(Boole-kombináció)** Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \in Z^+$: az Ω nyelv formulái. Ezen formulák Boole-kombinációján értjük azt az A formulát, amely az A_i-ből ($i=1, 2, \ldots, n$) a logikai jelek $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ alkalmazásával áll elő.

Megj.: 1) Az A_i-ket a Bool-kombináció komponenseinek hívjuk és ezekben szerepelhetnek kvantorok.

2) A komponensek logikai értéke meghatározza a formula logikai értékét, hogy hogyan az értéktáblázattal ábrázolható. Ha a formulában a kijelentés változók száma n, akkor az értéktáblázat sorainak száma 2^n.

A kijelentéslogika legfontosabb törvényei:

(1) $A \wedge B \sim B \wedge A$ kommutatív

(2) $A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$
$A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$ asszociatív

(3) $A \wedge A \sim A$
$A \vee A \sim A$ mindkét művelet idempotens

(4) $\neg(p \wedge q) \sim \neg p \vee \neg q$
$\neg(p \vee q) \sim \neg p \wedge \neg q$ De Morgan törvények

PREDIKÁTUMLOGIKA

A kvantoros struktúra leírására szolgál, egytípusú nyelv.

Predikátum betűk: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

két kvantor: „minden", jelölés: $\forall$-Univerzális kvantor

„van olyan", jelölés: $\exists$-Egzisztenciális kvantor

Logikai értékük:

$$|\forall x P x| = \begin{cases} i, & \text{ha minden } a(\in U;\ U \neq \emptyset)\text{-ra } |Pa| = i \\ h, & \text{minden más esetben} \end{cases}$$

$$|\exists x P x| = \begin{cases} i, & \text{minden más esetben} \\ h, & \text{ha minden } a(\in U)\text{-ra } |Pa| = h \end{cases}$$

Predikátum: Egy n változós függvény, mely egy nem üres halmazon van értelmezve, és értékkészlete az igaz, hamis kételemű halmaz.
A predikátumlogika tartalmazza a kijelentéslogikát.
Kvantoros De Morgan-törvények: $\neg\forall xPx=\exists x\neg Px$
$\neg\exists xPx=\forall x\neg Px$

Következményfogalom

(1) Kijelentéslogikai:

Definíció: Legyenek $b_1, b_2, \dots, b_n, a$ kijelentések. Akkor mondjuk, hogy a $b_1, b_2, \dots, b_n$ következménye az a, ha minden olyan esetben, amelyre a $b_1, b_2, \dots, b_n$ kijelentések logikai értéke igaz, az a kijelentés logikai értéke is igaz.

(2) Predikátumlogikai:

Definíció: Legyenek $b_1, b_2, \dots, b_n, a$ kijelentések. Akkor mondjuk, hogy a $b_1, b_2, \dots, b_n$ következménye az a, ha minden olyan esetben, ahol $b_1, b_2, \dots, b_n$ logikai értéke igaz, az a logikai értéke hamis.

Nevezetes következtetési sémák:

Kontrapozíciós séma

$$\frac{p\to q}{\neg q\to\neg p}$$

Láncszabály

$$\frac{\begin{matrix} p\to q \\ q\to r \end{matrix}}{p\to r}$$

Indirekt bizonyítási séma

$$\frac{\begin{matrix} q \\ \neg p\to\neg q \end{matrix}}{p}$$

Vannak olyan speciális predikátumlogikai formulák, melyek esetében a törvények vizsgálatára a Venn-diagramm is használható, ezek az ún. egyrétű formulák.

Definíció: Egyrétű nyitott formulának nevezzük az egyváltozós predikátumokat, illetve ezeknek logikai jelekkel történő összekapcsolását.

Pl.: P(x)
Q(x) ∨ R(x)

A matematikai logika és a halmazelmélet között szoros kapcsolat van, hiszen a halmazelméletben is állításokat fogalmazunk meg, melyeket halmazábrákkal szemléltetünk.

Formális axiomatukis elméletek

Definíció: Formális axiomatikus elmélet alatt olyan $T=\langle\Omega, X\rangle$ párt értünk, ahol Ω, egy matematikai logikai nyelv és X Ω-beli zárt formulák halmaza. Az X-beli formulák a T elmélet nem logikai axiómái.

Definíció: Az Ω nyelv M interpretációja a $T=\langle\Omega, X\rangle$ elmélet modellje, ha $M \models A$ minden $A \in X$ esetén.

Definíció: A $T=\langle\Omega, X\rangle$ formális axiomatikus elmélet ellentmondástalan (konzisztens), ha nem létezik az Ω nyelvben olyan A zárt formula, melyre $T \models A$ és $T \vdash \neg A$ egyaránt teljesül.

Gödel-féle teljességi tétel: Minden elsőrendű matematikai logika nyelvet használó ellentmondástalan elméletnek van modellje.

Definíció: Egy $T=\langle\Omega, X\rangle$ formális axiomatikus elmélet teljes (negációteljes vagy kategorikus) ha az Ω nyelv minden A zárt formula esetén érvényes $T \models A$ és $T \vdash \neg A$.

Gödel-féle nem teljességi (inkompletibilitási) tétel: Minden eléggé kifejező és effektív módon meghatározott elmélet szükségképpen nem teljes.

Következmény: Ha egy axiómarendszer ellentmondástalan, és Gödel tétele érvényes rá, akkor ellentmondásmentessége a rendszeren belül nem bizonyítható.

Definíció: Egy $T=\langle\Omega, X\rangle$ formális axiomatikus elmélet egy A állítása független X-től, ha $X \nvdash$. (Egy A állítás független az axiómától, ha nem vezethető le)