9. tétel

A sík és a tér transzformációi: a mozgások, egybevágóságok, hasonlósági transzformációk csoportja. Transzformációkkal kapcsolatos helyettesítési tételek. Háromszögek egybevágóságának és hasonlóságának alapesetei. Háromszögre és körre vonatkozó arányossági tételek.

A sík és a tér transzformációi:

D.: Ha adott két ponthalmaz, A és B, akkor az $A \Rightarrow B$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést leképezésnek nevezzük. Ha $A = B$, $\Rightarrow$ a leképezés transzformáció.

D.: Egy transzformáció távolságtartó, ha két pontnak és azok képének távolsága egyenlő. A távolságtartó transzformációkat egybevágósági transzformációknak is nevezzük.

D.: Ha adott 3 közös kezdőpontú, általános helyzetű félegyenes (x, y, z), akkor ezek ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak, ha a z irányából nézve az x $180°$-nál kisebb, az óramutató járásával ellentétes irányú szöggel beforgatható y-ba. Ellenkező esetben a rendszer balsodrású.

D.: Egy térbeli egybevágósági transzformáció megtartja az orientációt, (irányítástartó) ha a jobbsodrású rendszert jobbsodrásúba, balsodrású rendszert balsodrásúba viszi át. Ellenkező esetben a transzformáció irányításváltó.

D.: Egy síkbeli egybevágósági transzformáció megtartja az orientációt, ha a $\forall\ \Delta$-nek és képének a körüljárási iránya nem változik. Ellenkező esetben a transzformáció irányításváltó.

D.: Az irányítástartó transzformáció neve: mozgás.

axióma: Egyetlen olyan egybevágósági transzformáció létezik, mely egy félteret annak határán adott félsíkot, és annak határán adott félegyenest egy adott féltérbe, annak határán adott félsíkba, annak határán adott félegyenesbe visz át.

D.: Egy transzformációra nézve egy alakzat fix, ha ∀ pontja önmagába megy át.

D.: Egy transzformációra nézve egy alakzat invariáns, ha a képe önmaga.

D.: Ha az egybevágósági transzformációra nézve egy féltér, annak határán levő félsík invariáns, és a félsík határán levő félegyenes és képe egy egyenesre esik, úgy hogy mindkettő egy félegyenes, akkor a transzformáció neve: eltolás.

D.: Ha az egybevágósági trf-nak ∃ pontosan egy fixpontja, és irányítástartó, akkor a neve: pont körüli elforgatás.

D.: Ha a térbeli egybevágósági trf-nak ∃ pontosan egy fixpontja és irányításváltó, akkor a neve: pontra való tükrözés.

D.: Ha az egybevágósági trf-nak ∃! egy fix síkja (és irányításváltó), akkor a neve: síkra való tükrözés.

D.: Ha egy térbeli egybevágósági trf-nak ∃! egy fix egyenese, akkor a neve: tengely körüli elforgatás.

D.: Ha egy síkbeli egybevágósági trf-nak ∃! egy fix egyenese, akkor a neve: tengelyes tükrözés.

M.: Mozgások térben: eltolás, elforgatás (pont v. egyenes körül)

Mozgások síkban: eltolás, elforgatás (pont körül)

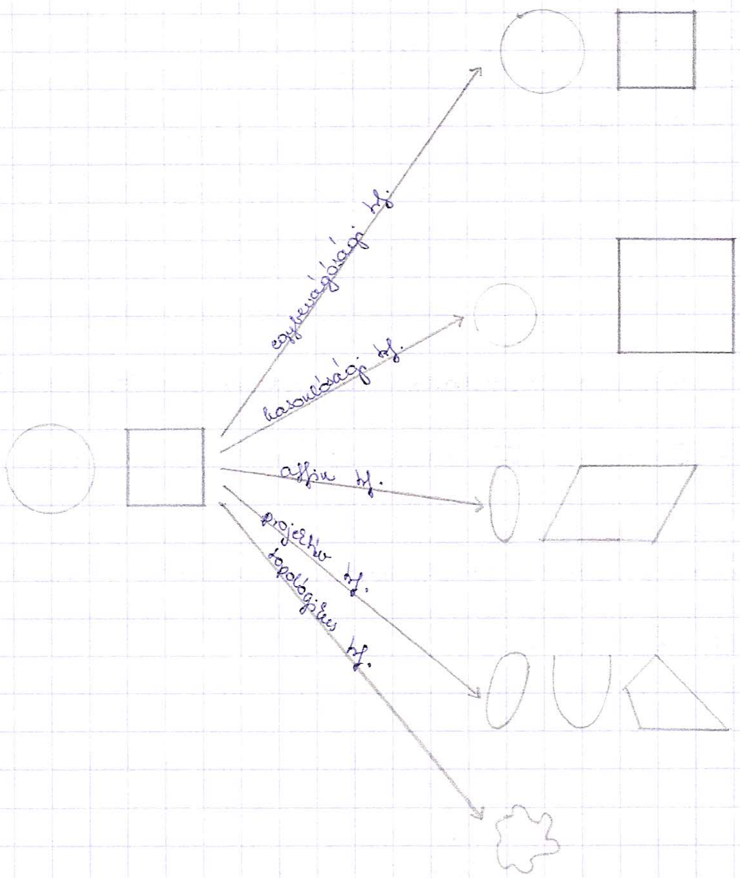
Egybevágósági trf-k: térben: síkra, pontra való tükrözés

síkban: egyenesre való tükrözés

M.: Egybevágósági trf-k szorzata egybevágósági trf, mozgások szorzata mozgás.
(Irányításváltó egybevágósági trf-k szorzata nem mindig irányításváltó.)

T.: Az egybevágósági tf-k halmaza az egymás után való elvégzésre, mint műveletre nézve csoportot alkot. A mozgások halmaza ugyanerre a műveletre nézve szintén csoportot alkot, mely csoport az egybevágósági tf-k csoportjának részcsoportja.

M.:



invariánsak:

- illeszkedéstartó
- egyenestartó
- ∥ tartó
- ∡ tartó
- távolságtartó

- illeszkedéstartó
- egyenestartó
- ∥ tartó
- ∡ tartó

- illeszkedéstartó
- egyenestartó
- ∥ tartó

- illeszkedéstartó
- egyenestartó

- illeszkedéstartó

Helyettesítési tételek:

T.: Két eltolás szorzata eltolás.

T.: Két azonos középpont körüli elforgatás szorzata elforgatás.

T.: Két tengelyes tükrözés szorzata eltolás, ha a tengelyek párhuzamosak, és elforgatás, ha a tengelyek metszőek.

T.: Három középpontos tükrözés szorzata egy középpontos tükrözés.

T.: Bármely síkbeli egybevágósági tf. helyettesíthető egy eltolás, egy elforgatás és esetleg egy tengelyes tükrözés szorzatával.

Háromszögek egybevágósága:

D: Két alakzat egybevágó, ha egybevágósági tf-val egymásba vihetők.

T: Két háromszög egybevágó, ha:

a) három oldalhossz megegyezik

b) két oldala és a közbezárt szöge egyenlő

c) egy oldalának hossza és az azon fekvő két szöge egyenlő

d) egy oldalának hossza, az azon fekvő szöge és a nemben fekvő szöge egyenlő

e) két oldalának a hossza és a nagyobbikkal szemközti szöge egyenlő

Háromszögek hasonlósága:

D: Egy transzformáció hasonlósági transzformáció, ha egyenestartó, illeszkedéstartó, és $\forall$

két A és B pontra, ill. képére $\bar{A}, \bar{B}$-re az $\frac{AB}{\bar{A}\bar{B}}$ állandó, azaz aránytartó.

D: Két geometriai alakzatot hasonlónak nevezünk, ha $\exists$ olyan hasonlósági leképezés, amely az egyiket a másikba viszi át. (jel.: $A \sim B$)

T: Két háromszög hasonló, ha:

a) három megfelelő oldaluk aránya egyenlő

b) két-két megfelelő oldaluk aránya és a közbezárt $\measuredangle$ egyenlő

c) két-két megfelelő oldaluk aránya és a nagyobbikkal szemközti $\measuredangle$ egyenlő

d) két-két szögük egyenlő.

Arányossági tételek:

T: Hasonlósági leképezés kört körbe visz át.

T: Bármely két kör hasonló.

T: (Magasság-tétel)

A derékszögű Δ-ben az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe a két befogó átfogóra eső merőleges vetületének

T.: (Befogó-tétel)

A derékszögű Δ-ben ∀ befogó mértani közepe az átfogónak és az átfogóra eső vetületének.

T.: (Pitagorasz-tétel)

Derékszögű Δ-ben az átfogó négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével.

T.: (Magasság-tétel megfordítása)

Ha egy Δ-ben ∃ olyan oldal, amelyhez tartozó magasság mértani közepe a másik két oldalnak az előző oldalra eső merőleges vetületének, akkor a Δ derékszögű és a kiemelt oldal az átfogó.

T.: (Befogó-tétel megfordítása)

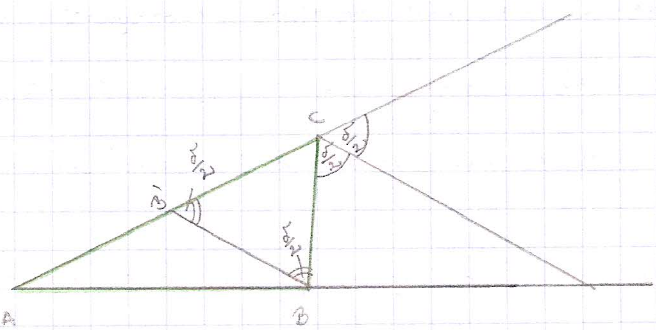
Ha egy Δ-ben van olyan oldal, amelyhez tartozó magasság a háromszögön belül halad, legyen ez c és egy másik oldal mértani közepe a c-nek és a c-re eső merőleges vetületének, akkor a Δ derékszögű és a „c" az átfogó.

T.: (Pitagorasz-tétel megfordítása)

Ha egy Δ-ben valamely oldal négyzete megegyezik a másik két oldal négyzetének összegével, akkor a Δ derékszögű.

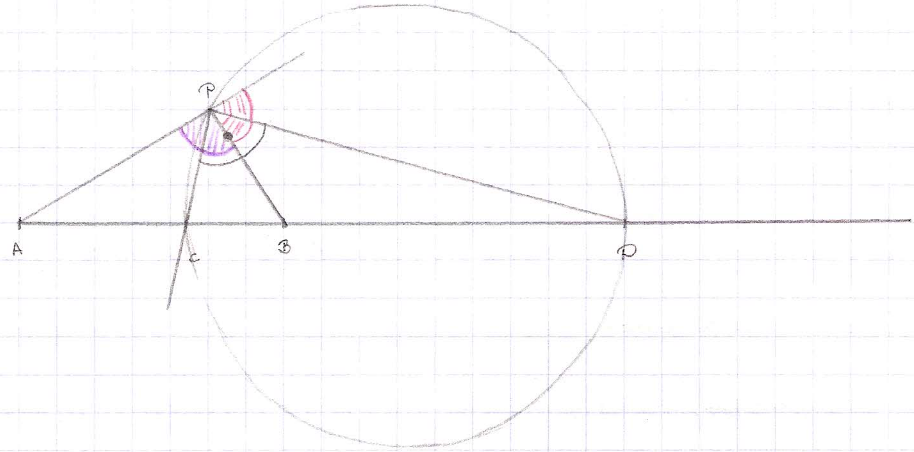
T.: Egy Δ belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

T.: A Δ külső szögfelezője a szemközti oldal egyenesét olyan pontban metszi, amelyre teljesül, hogy az egyenesen lévő oldal két végpontjától mért távolságainak az aránya egyenlő a másik két oldal arányával.

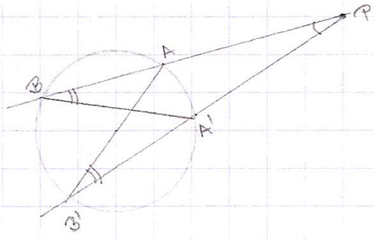


T.: (Apollóniusz-tétel)

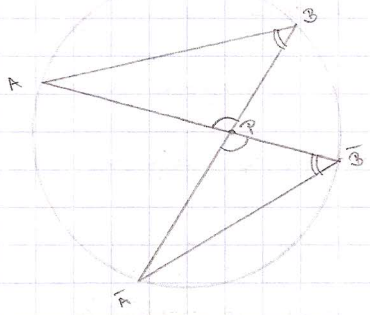
Azon pontok mértani helye a síkban, amelyeknek két adott ponttól mért távolságuk aránya egy egytől különböző állandó, egy kör. Ezt Apollóniusz köröknek nevezzük.



T.: Egy körhöz egy adott pontból húzott szelő megfelelő szakaszainak a szorzata állandó, csak a körtől és ponttól függő szám.



$PA \cdot PB = P\bar{A} \cdot P\bar{B}$



$PA \cdot PB = P\bar{A} \cdot P\bar{B}$

D.: Ha adott egy kör és egy pont, akkor a pontból a körhöz húzott szelő szakaszainak szorzatát a pont körre vonatkozó hatványának nevezzük.

T.: Ha adott egy O középpontú r sugarú kör és egy az O-tól d távolságra lévő P pont, akkor P-nek a körre vonatkozó h hatványa: $h = d^2 - r^2$

T.: Egy külső pont körre vonatkozó hatványa egyenlő a kintről húzott érintőszakasz hosszával.