8. tétel

Térelemek távolsága és szöge. Sokszögek és síkidomok területe, poliéderek és testek térfogata. Poliéderekkel kapcsolatos tételek. (Euler-tétel, szabályos poliéderek). A gömb, az egyenes körkúp és az egyenes körhenger síkmetszetei. A párhuzamos vetítés és tulajdonságai.

Térelemek távolsága:

D.: Két ponthalmaz távolsága a halmazok egyes pontpárjainak távolságából álló valós számhalmaz pontos alsó korlátja.

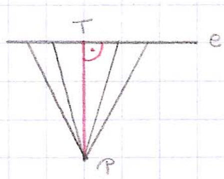
M.: Ha a két ponthalmaznak $\exists$ közös pontja, $\Rightarrow$ távolságuk 0.

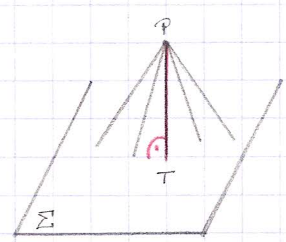
I. Két pont távolsága: szakaszmérés axiómája

II. Pont-egyenes távolsága:

a) illeszkednek: $d(e,P)=0$

b) nem illeszkednek: $d(e,P)=PT$





III. Pont-sík távolsága:

a) illeszkednek: $d(P,\Sigma)=0$

b) nem illeszkednek: $d(P,\Sigma)=PT$

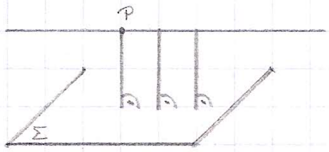
IV. Egyenes-sík távolsága:

a) egyenes illeszkedik a síkra: $\Big\}$ $d(e,\Sigma)=0$

b) egyenes metsző a síkkal:

c) párhuzamosak ($e \parallel \Sigma$)

legyen $P \in e$ tetszőleges: $d(e,\Sigma) := d(P,\Sigma)$

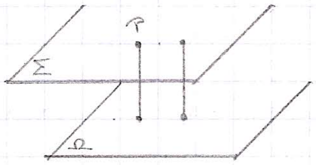


V. Sík-sík távolsága:

a) metszők: $d(\Sigma,\Omega)=0$

b) párhuzamosak:

legyen $P \subset \Sigma$ tetszőleges: $d(\Sigma,\Omega) := d(P,\Omega)$

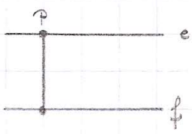


VI. Egyenes-egyenes távolsága:

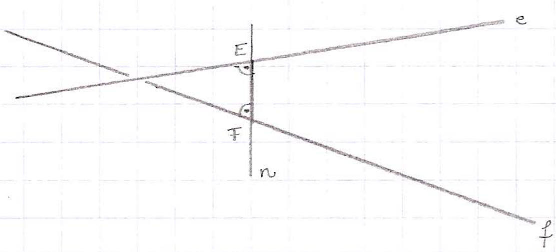
a) metszők: $d(e,f)=0$

b) párhuzamosak:

legyen $P \in e$ tetszőleges: $d(e,f) := d(P,f)$



c) kitérők:



$d(e,f) := d(E,F)$

Mj: • Egy egyenes transzverzális, ha mindkét kitérő egyenest metszi.

• A normáltranszverzális (n) mindkét egyenesre merőleges.

• A két kitérő egyenes távolsága a normáltranszverzálisnak a két egyenes közé eső szakaszának a hossza.

Térelemek szöge:

D.: Két egyenes szöge:

a) ha párhuzamosak: 0°.

b) ha metszők: a metszéspont körül keletkezett két szögpár közül a nem nagyobb.

c) ha kitérők: húzunk a két egyenessel párhuzamos egyenest a tér egy tetszőleges pontján keresztül. E két egyenes szöge a két eredeti egyenes szöge.

D.: Két egyenes merőleges, ha szögük 90°.

D.: Két sík szöge:

a) ha párhuzamosak: 0°.

b) ha metszők: a metszésvonal egy tetszőleges pontjában merőlegest állítunk a metszésvonalra mindkét síkban. E két egyenes szöge a két sík szöge.

D.: Két sík merőleges, ha szögük 90°.

D.: Egy egyenes merőleges egy síkra, ha merőleges a sík minden egyenesére.

T.: Egy egyenes merőleges egy síkra, ha ⊥ a sík két metsző egyenesére.

Sokszögek és síkidomok területe:

T.: (A területfüggvény létezése)

∃ olyan t : {sokszögek} → $\mathbb{R}^+$ területfgv., mely teljesíti a köv. feltételeket:

1) Az egységnégyzet (egység oldalú négyzet) területe 1.

2) Egybevágó sokszögekhez a fgv. ugyanazt a számot rendeli. (területük egyenlő)

3) Ha egy sokszöget egy egyenessel két résszokszögre vágunk, ⇒ a résszokszögek területének összege az eredeti sokszög területét adja.

Biz.: 1) Δ-ekre
2) konvex sokszögekre
3) konkáv sokszögekre

T.: (A területfüggvény egyértelműsége)

Ha az előbbi három tulajdonság teljesül valamely t fgv-re, $\Rightarrow$ az a fgv a háromszöghöz az „alap szorozva magasság per kettő"-t $\left(\frac{a \cdot m}{2}\right)$ rendeli.

D.: A sík korlátos zárt részhalmazát síkidomnak nevezzük.

D.: Egy sokszög a síkidom beírt sokszöge, ha minden pontja a síkidom belső ill. határpontja. Körülírt sokszög, ha a síkidom minden pontja a sokszög belső ill. határpontja.

D.: A síkidom belső Jordan-mértékén a beírt sokszögek területei halmazának pontos felső korlátját értjük, azaz: $t_j := \overline{\lim} \{ t \{ \text{beírt sokszög} \} \}$

A síkidom külső Jordan-mértékén a körülírt sokszögek területei halmazának pontos alsó korlátját értjük, azaz: $T_j := \{ t \{ \text{külső sokszög} \} \}$

D.: Ha a síkidom belső és külső Jordan-mértéke megegyezik, akkor azt mondjuk, hogy a síkidom Jordan-mérhető, és a területe ez a közös érték. $t_{\text{síkidom}} = T_j = t_j$

T.: Ha egy síkidomnak van területe $\Rightarrow$ a vele egybevágó síkidomnak is van területe (Jordan-mértéke) és ezek megegyeznek.

T.: Ha egy síkidomot két részre vágunk, és a részsíkidomoknak $\exists$ területük $\Rightarrow$ az eredeti síkidomnak is $\exists$ területe, és ez a részek területének összege.

T.: A sokszögek, mint síkidomok Jordan-mértéke megegyezik a területfgv által hozzájuk rendelt értékkel.

Poliéderek és testek térfogata:

D.: Azt a véges sok sokszög által határolt térrészt, mely nem tartalmaz egyenest, poliédernek nevezzük.

T.: (A térfogatfüggvény létezése)

∃ olyan v: {poliéderek halmaza} → $\mathbb{R}^+$ fgv, úgy hogy teljesülnek a következők:

1) Az egységkocka térfogata 1.

2) Egybevágó poliéderek térfogata egyenlő.

3) Ha egy poliédert egy síkkal két részpoliéderre vágunk, ⇒ a részek térfogatának összege az eredeti poliéder térfogatát adja.

T.: (A térfogatfüggvény egyértelműsége)

Az előző tétel bizonyításában szereplő térfogatfüggvény egyértelmű, azaz ha teljesül a három feltétel, ⇒ ebből következik, hogy a tetraéder térfogata 'alapterület szorozva magasság per három' $\left(\frac{a \cdot m_a}{3}\right)$

D.: A két korlátos ponthalmazát testnek nevezzük.

D.: A test beírt poliédere olyan poliéder, melynek ∀ pontja a test belső pontja.
A test körülírt poliédere olyan poliéder, melyhez képest a test valamennyi pontja a poliéder belső pontja.

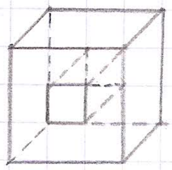
D.: Ha a test beírt poliédereinek térfogatának pontos felső korlátja, és a körülírt poliéder térfogatának pontos alsó korlátja megegyezik, ⇒ azt mondjuk, hogy a testnek ∃ térfogata, és ez a térfogat a közös pontos korláttal egyezik meg.

<u>Poliéderekkel kapcsolatos tételek:</u>

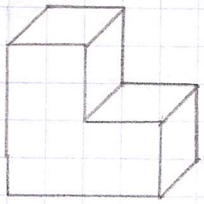
D.: Egy poliéder (test) összefüggő, ha ∀ két pontját össze tudjuk kötni a poliéderen belül haladó töröttvonallal.

D.: Egy összefüggő poliéder közönséges, ha ∀ csúcsában az oda befutó élek egyértelműen sorbarendezhetők.

D.: Egy poliéderfelület n-szeresen összefüggő, ha ∃ n db, egymáshoz kapcsolódó zárt élfolyam két részre osztja, de (n-1) db ilyen élfolyam nincs.



D.: Poliéder egyszerű, ha közönséges, és felülete egyszeresen összefüggő.



T.: Ha egy poliéder konvex ⇒ egyszerű.

T.: (Euler)

Ha egy egyszerű poliéder csúcsainak, lapjainak és éleinek száma $cs, l, é$, ⇒ $cs - é + l = 2$.

Biz.: levetítjük a síkra és elhagyjuk a belső csúcspontokat.

T.: (Poincaré)

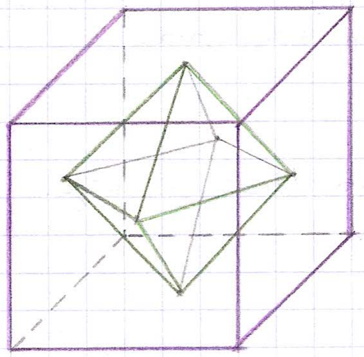
n-szeresen összefüggő poliéderekre: $cs - é + l = 3 - n$.

D.: Egy poliéder szabályos, ha oldalai szabályos egybevágó sokszögek, és minden lapszöge egyenlő.

T.: (Platon)

5 szabályos poliéder van.

oldal	név		csúcs	él	lap
3 △	tetraéder	önmaga duálisa	4	6	4
4 △	oktaéder	egymás duálisai	6	12	8
5 △	ikozaéder		12	30	20
3 □	hexaéder (kocka)		8	12	6
3 ⬠	dodekaéder		20	30	12



T.: A szabályos alakzatok száma:

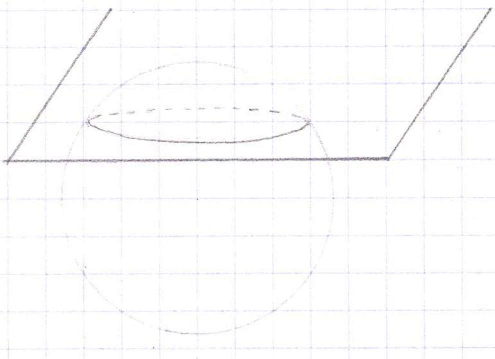
- $n=2$: ∞ db
- $n=3$: 5 db
- $n=4$: 6 db
- $n \geq 5$: 3 db

A gömb síkmetszetei:

T.: (Bézout)

Egy n-edrendű és egy m-edrendű felület metszési alakzata $n \cdot m$-edrendű görbe.

T.: A gömb minden olyan síkmetszete, amikor a síknak és a gömbnek $\exists$ közös pontja, kör.



Az egyenes körkúp síkmetszetei:

D.: Ha adott egy síkbeli ponthalmaz és egy, a síkra nem illeszkedő C pont, akkor a C-t a ponthalmaz pontjaival összekötő egyenesek kúpfelületet alkotnak.

D.: Ha a definiáló ponthalmaz kör, $\Rightarrow$ körkúpnak nevezzük a kúpfelületet.

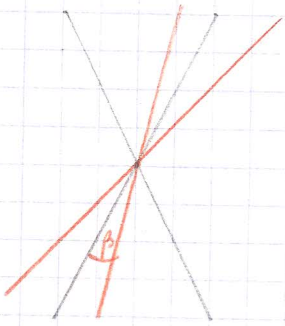
D.: Ha a körkúp olyan, hogy C ~~.~~ vetülete a kör síkjára éppen a kör középpontja, $\Rightarrow$ egyenes körkúpnak nevezzük.

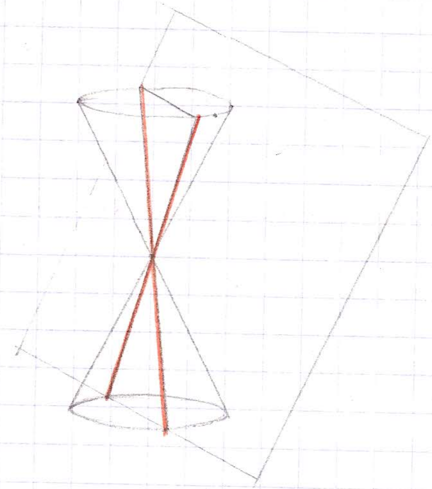
1) A metsző sík illeszkedik a kúp csúcspontjára.

α: kúp félnyílásszöge

β: a kúp tengelyének és a metsző síknak a szöge.

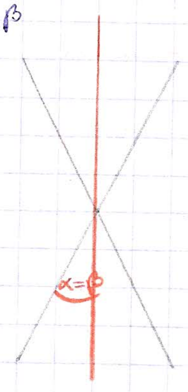
a) $0° \le \beta < \alpha$

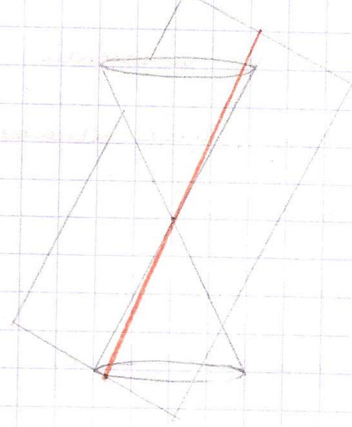




metsző egyenespár

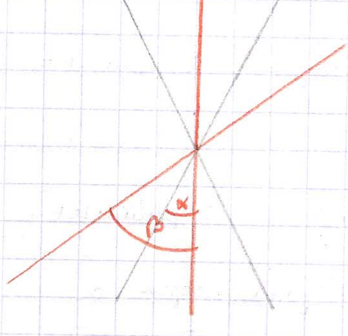
b) $\alpha = \beta$

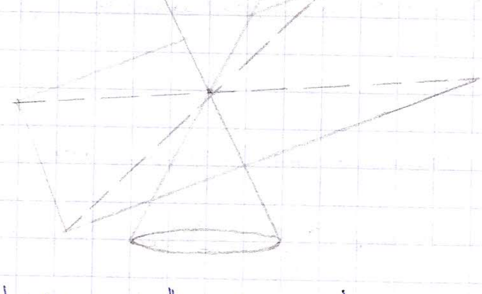




egybeeső egyenespár

c) $\alpha < \beta < 90°$

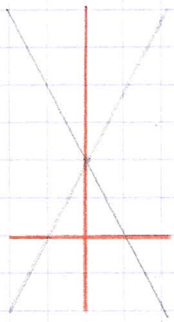




képzetes metsző egyenespár

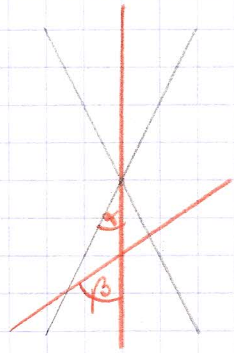
2) A metsző sík nem illeszkedik a kúp csúcsára. (Biz: Dandelin-gömbök)

a) $\beta = 90°$



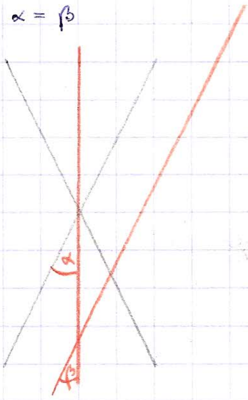
kör

b) $\alpha < \beta < 90°$



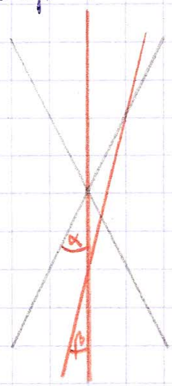
ellipszis (0 alkotóval ∥)

c) $\alpha = \beta$



parabola (1 alkotóval ∥)

d) $0 < \beta < \alpha$



hiperbola (2 alkotóval ∥)

<u>Az egyenes körhenger síkmetszetei:</u>

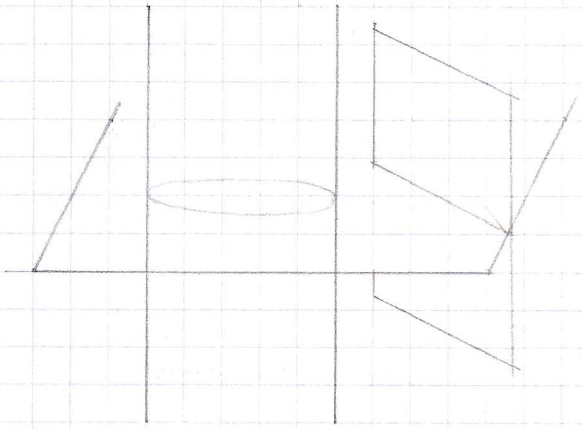
D.: Ha adott a síkon egy ponthalmaz, és egy a síkkal nem párhuzamos egyenes, akkor az adott egyenessel a ponthalmaz pontjain keresztül párhuzamosokat húzva hengerfelületet kapunk.

D.: Ha a definiáló görbe kör, ⇒ a hengert körhengernek nevezzük.

D.: Ha a körhenger definiáló egyenese merőleges a síkra, akkor a hengert egyenes körhengernek nevezzük.

1) A metsző sík párhuzamos a definiáló egyenessel.

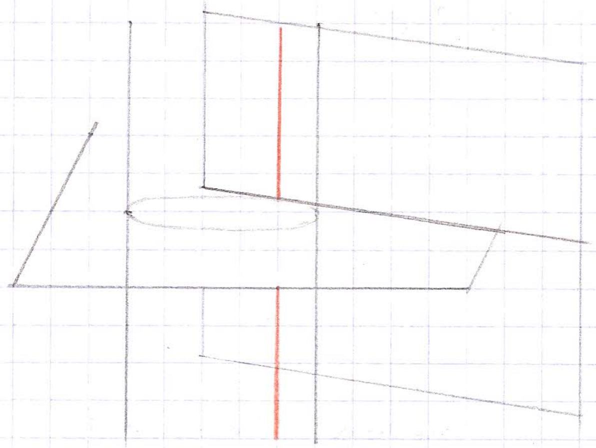
a)



metszet:

képzetes ∥ egyenespár

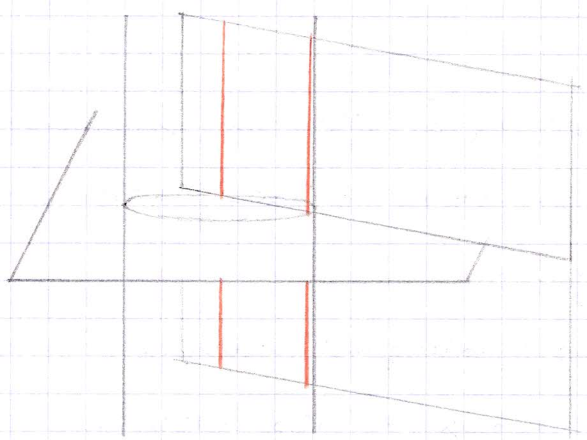
b)



metszet:

egybeeső egyenespár

c)

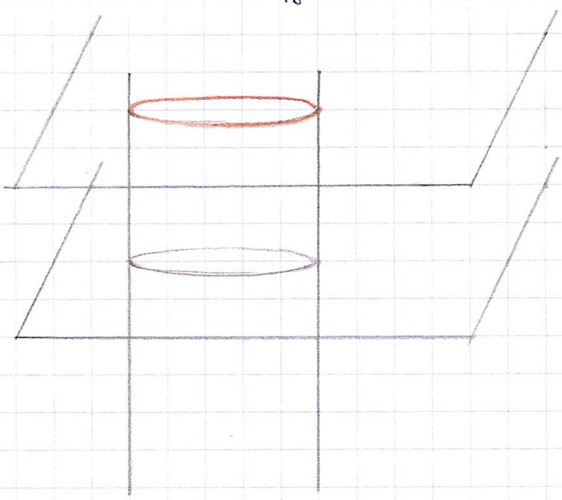


metszet:

párhuzamos egyenespár

2) A metsző sík nem párhuzamos a definiáló egyenessel.

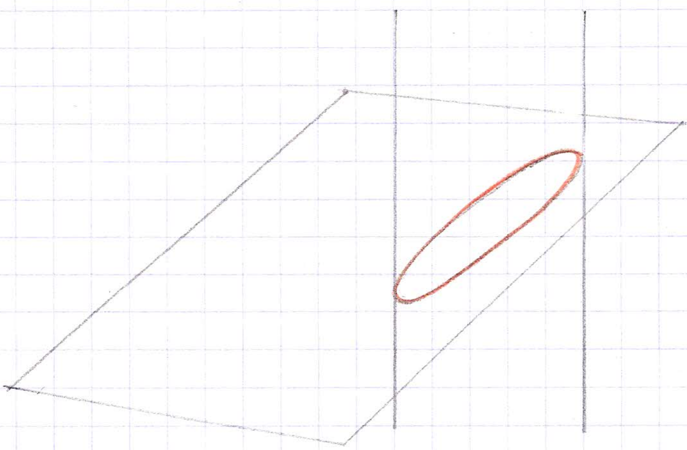
a) A metsző sík ⊥ az egyenesre.



metszet:

kör.

3) A metsző sík nem ∥ és nem ⊥ az alkotókra.



metszet:

ellipszis

Párhuzamosság a térben:

D.: Két sík ill. egy sík és egy egyenes párhuzamos, ha nincs közös pontjuk.

T.: Egy síkkal egy adott ponton keresztül sok ∥ egyenes húzható.

T.: Egy síkkal ∥ adott pontra illeszkedő egyenesek egy síkban vannak.

K.: Egy síkkal egy adott ponton keresztül húzható ∥ sík.

T.: Egy síkkal egy adott ponton keresztül csak egy ∥ sík húzható.