14. Tétel

Def.: Legyenek $a, b \in R$, $a<b$, ekkor $D \subset [a, b]$ véges halmazt az $[a, b]$ egy beosztásának nevezzük, ha $a \in D$, $b \in D$. A továbbiakban az $[a, b]$ intervallum beosztásainak halmazát $\mathcal{D}([a, b])$–vel jelöljük.

Def.: Ha a $D \subset \mathcal{D}([a, b])$ és $D:=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_0=a$, $x_n=b$, $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$.

Def.: A $D \subset \mathcal{D}([a, b])$ beosztás finomságán $\|D\| := \max\{\Delta x_i \mid i=1, \ldots, n\}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Def.: Legyenek $D_1, D_2 \subset \mathcal{D}([a, b])$. Akkor mondjuk, hogy D_1 finomítása D_2-nek, ha $D_2 \subset D_1$.

Def.: A $\langle D_n \rangle: N \to \mathcal{D}([a, b])$ beosztássorozatot normális beosztássorozatnak nevezzük, ha $\lim_{n\to\infty} \|D_n\|=0$.

Def.: Legyen $f:[a, b] \to R$ egy korlátos függvény, D beosztása $[a, b]$-nek, $D:=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $m_i:=\inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i:=\sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ és $\Delta x_i:=x_i - x_{i-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.
Az f függvénynek a D beosztásához tartozó alsó összege: $s(f, D) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, felső összege: $S(f, D):=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, oszcillációs összege: $\omega(f, D):= S(f, D) - s(f, D)$. Az f függvénynek a D beosztásához és a ξ_i pontokhoz tartozó integrálközelítő Riemann-összege: $\sigma(f, D):=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Def.: Legyen $f:[a, b] \to R$ korlátos függvény, ekkor $\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f, D) \mid D \in \mathcal{D}([a, b])\}$, $\overline{\int_a^b} F = \inf\{S(f, D) \mid D \in \mathcal{D}([a, b])\}$ valós számot alsó Darboux ill. felső Darboux integrálnak nevezzük.

Def.: Legyen $f:[a, b] \to R$ korlátos függvény. Akkor azt mondjuk, hogy az f függvény Riemann-szerint integrálható az [a, b] intervallumon, ha az f függvény Darboux-féle alsó és Darboux-féle felső integrálja egyenlő. Jele: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Tétel: (Darboux-tétel) : Legyen $f:[a, b] \to R$ korlátos függvény. Ekkor $\forall \varepsilon >0$ $\exists \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall D \in \mathcal{D}([a, b])$ és $\|D\| < \delta(\varepsilon)$ esetén $0 \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - s(f, D) < \varepsilon$ ill. $0 \le S(f, D) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon$.

Tétel: Legyen $f:[a, b] \to R$ korlátos függvény és $\langle D_n \rangle: N \to \mathcal{D}([a, b])$ normális beosztássorozat, akkor

1) $\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$
2) $\lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$
3) $\lim_{n\to\infty} \omega(f, D_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$; ($\omega(f, D_n) = S(f, D) - s(f, D)$ oszcillációs összeg)
4) $\exists \langle \sigma_1(f, D_n) \rangle$ úgy, hogy $\lim_{n\to\infty} \sigma_1(f, D_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$
   $\exists \langle \sigma_2(f, D_n) \rangle$ úgy, hogy $\lim_{n\to\infty} \sigma_2(f, D_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Tétel: Legyen $f:[a, b] \to R$ korlátos függvény. Az f függvény <=> integrálható, ha minden $\langle D_n \rangle: N \to \mathcal{D}([a, b])$ normális beosztássorozat esetén $\lim_{n\to\infty} \omega(f, D_n) = 0$.

Tétel: Legyen $f:[a, b] \to R$ korlátos függvény. Az f függvény Riemann-szerint integrálható <=> minden $\langle D_n \rangle: N \to R$ normális beosztássorozathoz tartozó $\langle \sigma(f, D_n) \rangle$ integrálközelítő összeg sorozat konvergens.

Tétel: Ha $f:[a, b] \to R$ monoton függvény, akkor f Riemann-szerint integrálható.

Tétel: Ha $f:[a, b] \to R$ folytonos függvény, akkor f Riemann-szerint integrálható.

Tétel: Ha $f:[a, b] \to R$ Riemann-integrálható, akkor f az $[a, b]$ minden zárt részintervallumán Riemann-integrálható.

Tétel: (Az integrál intervallum feletti additivitása) : Legyen $f:[a, b] \to R$ és $c \in (a, b)$. Ha f Riemann-integrálható az $[a, c]$ és a $[c, b]$ intervallumon, akkor $[a, b]$-n is Riemann-integrálható, és $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Tétel: Legyen $f:[a, b] \to R$, $D:=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ beosztása $[a, b]$-nek. Ha f mindegyik $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon Riemann-integrálható, akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n, és $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$.

Tétel: Ha $f:[a, b] \to R$ korlátos, és minden $c, d \in (a, b)$, $c<d$ esetén f Riemann-integrálható $[c, d]$-n, akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n is.

Tétel: Legyen $f, g:[a, b] \to R$ korlátos függvények, és $f(x)=g(x)$ véges sok $x \in [a, b]$ kivételével. Ha f Riemann-integrálható, akkor g is az, továbbá $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Tétel: Legyen $f:[a, b] \to R$ egy korlátos függvény, és $H \subset [a, b]$ egy véges halmaz. Ha f folytonos az $[a, b] \setminus H$ halmazon, akkor Riemann-integrálható.

Def.: Legyen $H \subset R$, $f: H \to R$, $c \in H$ és $[a, b] \subset H$. Ekkor 1) $\int_c^c f := 0$,

2) ha f Riemann-integrálható $[a, b]$-n, úgy $\int_b^a f := -\int_a^b f$.

Def.: Legyen $f:[a, b] \to R$ Riemann-integrálható. Az $F:[a, b] \to R$, $F(x):=\int_a^x f(t)dt$ függvényt az f integrálfüggvényének nev.

Tétel: Ha $f:[a, b] \to R$ Riemann-integrálható, akkor integrálfüggvénye folytonos.

Tétel: Legyen $f:[a, b] \to R$ Riemann-integrálható, F az f integrálfüggvénye, és $x_0 \in [a, b]$. Ha f folytonos x_0-ban, akkor F differenciálható x_0-ban, és $F'(x_0)=f(x_0)$.

Def.: Legyen $H \subset R$, $f:H \to R$, és $H_1 \subset H$ egy intervallum vagy intervallumok egyesítése. Ha $F: H_1 \to R$ differenciálható, és $F'(x)=f(x)$ ($x \in H_1$), akkor F-et az f (H_1 feletti) primitív függvényének vagy határozatlan integráljának nevezzük. A továbbiakban $\int f$, ill. $\int f(x)\,dx$ az f függvény egy tetszőleges primitív függvényét jelöli.

Tétel: Ha $f:[a, b] \to R$ Riemann-integrálható, $F:[a, b] \to R$ az (a, b) intervallumon primitív függvénye f-nek, és F folytonos $[a, b]$-n, akkor $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. (A fenti egyenlőséget Newton- Leibniz-formulának nevezzük.)

Tétel: (A parciális integrálás tétele) : Ha $f, g:[a, b] \to R$ folytonosan differenciálható függvények, akkor $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$.

Tétel: (A helyettesítéssel való integrálás tétele) : Legyen $g:[a, b] \to [c, d]$ és $f:[c, d] \to R$. Ha g folytonosan differenciálható, és f folytonos, akkor $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f \circ g)(t)g'(t)\,dt$.

Def.: Legyen $f, g:[a, b] \to R$ folytonos függvények, és $f(x) \le g(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén. A $H:=\{(x, y) \mid a \le x \le b$ és $f(x) \le y \le g(x)\} \subset R^2$ síkidom területe: $T(H):=\int_a^b (g(x) - f(x))dx$.

Def.: Legyen $f:[a, b] \to R$ folytonos függvény, és $f(x) \ge 0$ minden $x \in [a,]$ esetén. A $H:=\{(x, y, z) \mid a \le x \le b$ és $y^2+z^2 \le f^2(x)\} \subset R^3$ forgástest térfogata: $V(H):=\pi \int_a^b f^2(x)\,dx$.

Def.: Legyen $f:[a, b] \to R$ folytonosan differenciálható függvény, és $f(x) \ge 0$ minden $x \in [a, b]$ esetén. A $H:=\{(x, y, z) \mid a \le x \le b$ és $y^2+z^2 \le f^2(x)\} \subset R^3$ forgásfelület felszíne: $F(H):=2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.