13. tétel

Egy – és többváltozós függvények differenciálhatósága. Középértéktételek és következményeik. Taylor – formula és Taylor – sor. Függvényvizsgálat (monotonitás, konvexitás, egy – és többváltozós függvények szélsőértéke).

Def: legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, $x_0 \in H$, ekkor a $\varphi: H \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvényt az f függvény x_0-beli **differenciahányadosának** nevezzük.
Ha x_0 belső pontja H-nak és a φ-nek $\exists$ határértéke az x_0 pontban, akkor ezt a számot az f függvény x_0 pontbeli **differenciál hányadosának** nevezzük.
Jele: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \quad A = f(x_0) = f^{(1)}(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0)$

Def: legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, $x_0 \in H$, és φ az f x_0-hoz tartozó differenciahányados-függvénye.

Tétel: (Lineáris approximáció)
Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H-nak. Az f függvény differenciálható x_0-ban $\leftrightarrow$ $\exists A \in \mathbb{R}$, $\omega: H \to \mathbb{R}$ úgy, hogy ω folytonos x_0-ban, $\lim\limits_{x \to x_0} \varpi(x) = 0$,
$f(x) - f(x_0) = (A + \omega(x))(x - x_0)$, ahol $A = f'(x_0)$, ω és A egyértelműen meghatározott.

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény, x_0 belső pontja H-nak. Ha az f függvény differenciálható x_0-ban $\to$ f folytonos x_0-ban.

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f, g: H \to \mathbb{R}$ függvény, x_0 belső pontja H-nak. Ha f és g differenciálható x_0-ban és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f + \mu g$; $f \cdot g$; $\dfrac{f}{g}$, $(0 \notin R_g)$ is differenciálható x_0-ban

(1) $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0) + \mu \cdot g'(x_0)$
(2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
(3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Tétel: Legyen $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}$, $f: H_1 \to \mathbb{R}$, $g: H_2 \to \mathbb{R}$ függvények, x_0 belső pontja H_1-nek és $f(x_0)$ belső pontja H_2-nek, ha f differenciálható az x_0 pontban és g differenciálható az $f(x_0)$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

Tétel: (Inverz függvény differenciálhatósága)
Legyen $f: \langle a;b \rangle \to \mathbb{R}$ invertálható és folytonos $x_0 \in \langle a;b \rangle$ $y_0 = f(x_0)$. Ha f differenciálható az x_0-ban és $f'(x_0) \neq 0 \to f^{-1}$ is differenciálható az y_0 pontban és az
$(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Def: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ akkor mondjuk, hogy f differenciálható függvény, ha H minden pontjában differenciálható.

Def: legyen $H_2 \subset H$, $H_2 := \{x \mid x \in H$, f differenciálható az x pontban$\}$ nem üres halmaz, akkor a $g: H_2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = f'(x)$ függvényt az f **differenciálhányados függvénynek** vagy deriváltjának nevezzük.

Tétel: az exponenciális függvénynek létezik differenciálhányados függvénye és az önmaga.

13. tétel

Egy – és többváltozós függvények differenciálhatósága. Középértéktételek és következményeik. Taylor – formula és Taylor – sor. Függvényvizsgálat (monotonitás, konvexitás, egy – és többváltozós függvények szélsőértéke).

Tétel: a logaritmus függvény minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén differenciálható és $(\log' x) = \frac{1}{x}$

Tétel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp_a x$ függvény differenciálható és $f'(x) = (\exp_a x)\log a$

Mj: $(a^x)' = a^x \log a = a^x \ln a$

Tétel: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ differenciálható és $f'(x) = \frac{1}{x\log a} = \frac{1}{x\ln a}$

Tétel: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$ $a \in \mathbb{R}$ ez a függvény differenciálható és $f'(x) = ax^{a-1}$

Tétel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvény differenciálható és $f'(x) = \cos x$

Tétel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ függvény differenciálható és $f'(x) = -\sin x$

Tétel: $f: [-1;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(x)$ függvény differenciálható és $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Tétel: $f: [-1;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos x$ differenciálható és $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Tétel: $\mathrm{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad$ $\mathrm{arc}'\mathrm{tg} x = \frac{1}{1+x^2}$

$\mathrm{ctg}' x = \frac{-1}{\sin^2 x}$ $\quad$ $\mathrm{arc}'\mathrm{ctg} x = \frac{-1}{1+x^2}$

Def: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény, x_0 belső pontja H-nak. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 pontban helyi maximuma van, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in S_r(x_0) \cap H$, helyi minimuma van, ha $f(x) \ge f(x_0)$ $\forall x \in S_r(x_0) \cap H$

Tétel: (Darboux – tétel)
Ha az $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $f'(a) \neq f'(b) \to \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén, amely az $f'(a)$ és az $f'(b)$ által meghatározott intervallumban van $\exists\, x_0 \in (a;b)$ úgy, hogy $f'(x_0) = \lambda$

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény, x_0 belső pontja H-nak f differenciálható x_0-ban. Ha az f függvénynek az x_0 pontban helyi szélsőértéke van $\to f'(x_0) = 0$.

Tétel: (Rolle)
$f: [a;b] \to \mathbb{R}$, ami az (a;b)-n differenciálható [a;b]-n folytonos és $f(a) = f(b) \to \exists\, \xi \in (a;b)$ úgy, hogy $f'(\xi) = 0$.

Tétel: (Cauchy-féle középértéktétel)
Ha az $f, g: [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek az (a;b)-on differenciálható $\to \exists$ $\xi \in (a;b)$ úgy, hogy $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$

13. tétel

Egy – és többváltozós függvények differenciálhatósága. Középértéktételek és következményeik. Taylor – formula és Taylor – sor. Függvényvizsgálat (monotonitás, konvexitás, egy – és többváltozós függvények szélsőértéke).

Tétel: (Lagrange-féle középértéktétel)

Ha $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ függvény folytonos $(a;b)$-n differenciálható $\to\exists\ \xi\in(a;b)$ úgy, hogy

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

Tétel: (L'Hospital szabály)

$f,g:\langle a;b\rangle\to\mathbb{R}$ differenciálható függvények, $r\in\mathbb{R}_+$ $x_0\in\langle a;b\rangle$, $(x_0-r;x_0)\subset\langle a;b\rangle$. Ha a $g'(x)\neq 0\ \forall x\in(x_0-r;x_0)$ és $\frac{f'}{g'}$ függvénynek $\exists$ baloldali határértéke x_0-ban és ez az $A\in\mathbb{R}$ továbbá f-nek és g-nek $\exists$ baloldali határértéke x_0-ban és mindkettő $0\to\frac{f}{g}$-nek is $\exists$ határértéke x_0-ban és ez egyenlő A-val.

Def: Legyen $H\subset\mathbb{R}$, $f:H\to\mathbb{R}$ és $H_1:=\{x\mid x\in H$ és f differenciálható$\}$

(1) Legyen $n\in\mathbb{N}$ és $n\geq 2$. Ha H_{n-1} és $f^{(n-1)}:H_{n-1}\to\mathbb{R}$ már értelmezve van és $H_n:=\{x\mid x\in H_{n-1}$ és $f^{(n-1)}$ differenciálható x-ben$\}\to f^{(n)}:H_n\to\mathbb{R}$, $f^{(n)}(x):=(f^{(n-1)})'(x)$ függvényt az f n-dik deriváltjának nevezzük.

(2) Ha $x_0\in H$, $\forall\ n\in\mathbb{N}\ \exists\ f^{(n)}(x_0)\to$ azt mondjuk, hogy f végtelen sokszor differenciálható x_0-ban.

(3) Az f függvény n-szer folytonosan differenciálható, ha n-szer differenciálható és $f^{(n)}$ folytonos.

(4) Az f függvény nulladik deriváltja: $f^{(0)}:=f$

Def: Legyen $H\subset\mathbb{R}$, $f:H\to\mathbb{R}$ függvény, $x_0\in H$, és f végtelen sokszor differenciálható x_0-ban. A $\sum_0^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(t-x_0)^n$ hatványsort az f x_0 ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük. (A hatványsort $x_0=0$ esetén Maclaurin-sornak is nevezzük.)

Tétel: (Taylor-tétel)

Legyen $f:\langle a;b\rangle\to\mathbb{R}$, $x_0\in\langle a;b\rangle$ és f (n+1)-szer differenciálható $\to\forall x\in(a;b)$ esetén $\exists\ \xi$ az x és x_0 által meghatározott nyílt intervallumban úgy, hogy

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

n-dik Taylor polinom Lagrange-féle maradéktag

Tétel: Legyen $H\subset\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}_b$ $a<b$, $f:\langle a;b\rangle\to\mathbb{R}$ differenciálható $\langle a;b\rangle$-n.

f függvény monoton növekvő az $\langle a;b\rangle$ -n $\leftrightarrow f'(x)\geq 0\ \forall x\in\langle a;b\rangle$

f függvény monoton csökkenő az $\langle a;b\rangle$ -n $\leftrightarrow f'(x)\leq 0\ \forall x\in\langle a;b\rangle$

13. tétel

Egy – és többváltozós függvények differenciálhatósága. Középértéktételek és következményeik. Taylor – formula és Taylor – sor. Függvényvizsgálat (monotonitás, konvexitás, egy – és többváltozós függvények szélsőértéke).

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}_b$ $a < b$, $f:\langle a;b\rangle \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható $\langle a;b\rangle$-n. Az f függvény $\leftrightarrow$ szigorúan monoton növekvő $\langle a;b\rangle$-n $f'(x) \geq 0$ és nem $\exists$ olyan $\langle c;d\rangle$ részintervalluma $\langle a;b\rangle$-nek, hogy $f'(x) = 0$ $\forall x \in \langle c;d\rangle$ pontban. Az f függvény $\leftrightarrow$ szigorúan monoton csökkenő $\langle a;b\rangle$-n, ha $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in \langle a;b\rangle$, és nem $\exists$ olyan $\langle c;d\rangle$ részintervalluma $\langle a;b\rangle$-nek, hogy $f'(x) = 0$ $\forall x \in \langle c;d\rangle$ pontban.

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, x_0 belső pontja H-nak, f differenciálható. Ha x_0 pontnak $\exists$ olyan környezete, hogy $f'(x) \geq (\leq)\ 0$ $\forall x \in (x_0\text{-}r;x_0)$ és $f'(x) \leq (\geq)\ 0$ $\forall x \in (x_0\text{-}r;x_0)$ $\rightarrow$ f függvénynek x_0 pontban helyi maximuma van. (helyi minimuma van) (ez elégséges feltétel a szélsőérték létezésére)

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, x_0 belső pontja H-nak. Tegyük fel, hogy f (n-1) –szer ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$) differenciálható az x_0 egy környezetében és n-szer az x_0 pontban.
Ha $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ és $f^{n}(x_0) \neq 0 \rightarrow$ ha n páratlan $\rightarrow$ f-nek x_0 pontban nincs helyi szélsőértéke. Ha n páros $\rightarrow$ f-nek x_0 pontban helyi szélsőértéke van.
$f^{n}(x_0) > 0 \rightarrow$ helyi minimuma
$f^{n}(x_0) < 0 \rightarrow$ helyi maximuma van.

Def: (1) Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \rightarrow \mathbb{R}$ $a,b \in \mathbb{R}_b$ $a < b$, $\langle a;b\rangle \subset H$. Akkor mondjuk, hogy az f függvény konvex az $\langle a;b\rangle$-n, ha $\forall x;y \in \langle a;b\rangle$ $x \neq y$ és $\forall$ $\lambda \in [0;1]$ esetén
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
(2) Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \rightarrow \mathbb{R}$ $a,b \in \mathbb{R}_b$ $a < b$, $\langle a;b\rangle \subset H$. Akkor mondjuk, hogy az f függvény konkáv az $\langle a;b\rangle$-n, ha $\forall x;y \in \langle a;b\rangle$ $x \neq y$ és $\forall$ $\lambda \in [0;1]$ esetén
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

Def: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, x_0 belső pontja H-nak. Ha $\exists$ olyan $r \in \mathbb{R}^+$ úgy , hogy f konvex $(x_0\text{-}r;x_0)$-n és konkáv az $(x_0;x_0+r)$-n vagy fordítva $\rightarrow$ x_0-t **inflexiós pontnak** nevezzük.

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, f differenciálható, $\langle a;b\rangle \subset$ H-n. f függvény konvex $\leftrightarrow$ f' monoton növekvő $\langle a;b\rangle$ -n. f függvény konkáv $\langle a;b\rangle$-n $\leftrightarrow$ f' monoton csökkenő $\langle a;b\rangle$-n .

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, $\langle a;b\rangle \subset$ H-nak. f $\langle a;b\rangle$-n kétszer differenciálható. f konvex $\langle a;b\rangle \leftrightarrow f''(x) \geq 0$ $\forall x \in \langle a;b\rangle$, f konkáv $\langle a;b\rangle \leftrightarrow f''(x) \leq 0$ $\forall x \in \langle a;b\rangle$.

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, f differenciálható, $\langle a;b\rangle \subset$ H-n. Az f függvény $\leftrightarrow$ szigorúan konvex $\langle a;b\rangle$, ha f' szigorúan monoton növekvő és az f függvény $\leftrightarrow$ szigorúan konkáv $\langle a;b\rangle$-n, ha f' szigorúan monoton csökkenő.

Def: Legyen $f:H \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény, $H \subset \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H-nak, ekkor a $\underline{\Phi}:H\backslash\{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$;

$$\underline{\Phi}(x) = \frac{\underline{f}(x) - \underline{f}(x_0)}{x - x_0}$$

f függvény x_0-beli **differenciálhányadosa.** f **differenciálható**, ha $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \Phi(x)$ határérték.

13. tétel

Egy – és többváltozós függvények differenciálhatósága. Középértéktételek és következményeik. Taylor – formula és Taylor – sor. Függvényvizsgálat (monotonitás, konvexitás, egy – és többváltozós függvények szélsőértéke).

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}^n$ függvény és $\underline{f}(x) = (f_1(x); f_2(x); \ldots f_n(x))$, ahol $f_i: H \to \mathbb{R}$. Ha fi függvény differenciálható x_0 pontban (x_0 belső pontja H-nak) $\forall\, i = 1,2,\ldots,n \to \underline{f}$ differenciálható $\underline{f}'(x) = (f_1'(x_0); f_2'(x_0); \ldots; f_n'(x_0))$

Def: Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény, x_0 belső pontja H-nak, akkor mondjuk, hogy az f függvény **differenciálható** x_0 pontban, ha $\exists\, \underline{A} \in \mathbb{R}^n$ vektor, $\omega: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény és $\underline{\omega}(\underline{x_0}) = \underline{0}$ úgy, hogy $f(\underline{x}) - f(\underline{x_0}) = (\underline{A} + \underline{\omega}(\underline{x}))(\underline{x}-\underline{x_0})$ $\underline{A}$-t az f függvény **differenciálhányadosának** nevezzük.

Tétel: Ha $H \subset \mathbb{R}^n$, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény, x_0 belső pontja H-nak, és f differenciálható x_0-ban.
$\to$ (1) $\underline{A}$ egyértelmű (2) f folytonos x_0-ban.

Def: legyen $H \subset \mathbb{R}^n$, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény, $\underline{x_0}$ belső pontja H-nak, és $e \in \mathbb{R}^n$, $|\underline{e}| = 1$, ha

$\exists \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\underline{x_0} + t\underline{e}) - f(\underline{x_0})}{t}$ határérték, akkor ezt az f függvény x_0-beli $\underline{e}$ **iránymenti deriváltjának nevezzük.**

Def: Ha $\underline{e}$ az $\mathbb{R}^n$ –beli szokásos bázis, akkor az $\underline{e}$ iránymenti deriváltat **parciális deriváltnak** nevezzük.

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény, x_0 belső pontja H-nak. Ha f függvény differenciálható az x_0 pontban akkor $\forall \underline{x_0}$-beli parciális deriváltja $\exists$; és

$$\underline{A} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0); \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0); \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény, $\underline{x_0}$ belső pontja H-nak, ha f függvénynek léteznek a parciális deriváltjai az $\underline{x_0}$ pontban és ezek folytonosak, akkor f differenciálható x_0-ban.

Tétel: (Schwarz-tétel)
Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény, x_0 belső pontja H-nak. Ha az f függvény kétszer differenciálható x_0-ban akkor $\partial_{12} f(\underline{x_0}) = \partial_{21} f(\underline{x_0})$.

Def: Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény, $\underline{x_0}$ belső pontja H-nak és tegyük fel, hogy f függvény mindkét változója szerint parciálisan deriválható, továbbá $\partial x f(\underline{x_0}) = \partial y(\underline{x_0}) = 0$ Ekkor az $\underline{x_0}$ pontot **stacionárius pontnak** nevezzük.

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény, $\underline{x_0}$ belső pontja H-nak és f-nek létezik mindkét változó szerint a parciális deriváltja. Ha f-nek $\underline{x_0}$-ban helyi szélsőértéke van akkor $\underline{x_0}$ stacionárius pontja f-nek.

13. tétel

Egy – és többváltozós függvények differenciálhatósága. Középértéktételek és következményeik. Taylor – formula és Taylor – sor. Függvényvizsgálat (monotonitás, konvexitás, egy – és többváltozós függvények szélsőértéke).

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény, $\underline{x_0}$ belső pontja H-nak és tegyük fel, hogy f függvény mindkét változója szerint kétszer folytonosan parciálisan deriválható $\underline{x_0}$ valamely környezetében. Legyen $D(\underline{x_0}) = \begin{vmatrix} \partial_{11} f(\underline{x_0}) & \partial_{12} f(\underline{x_0}) \\ \partial_{21} f(\underline{x_0}) & \partial_{22} f(\underline{x_0}) \end{vmatrix}$, ahol $\underline{x_0}$ stacionárius pontja f-nek. Ha

$D(\underline{x_0}) > 0 \to$ f függvénynek az $\underline{x_0}$ pontban helyi szélsőértéke van.

Ha $D(\underline{x_0}) < 0 \to$ f függvénynek az $\underline{x_0}$ pontban nincs helyi szélsőértéke.

$S(\underline{x_0}) = \partial_{11} f(\underline{x_0}) + \partial_{22} f(\underline{x_0})$ ha van szélsőértéke

$S(\underline{x_0}) > 0$ helyi minimum

$S(\underline{x_0}) < 0$ helyi maximum