12. tétel

Valós és metrikus térbeli sorozatok konvergenciája, valós számsorok. Valós és metrikus teret metrikus térbe képező függvények folytonossága és határértéke. A folytonosságra és határértékre vonatkozó alapvető tételek. Hatványsorok és elemi függvények.

Def: az f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt valós számsorozatnak nevezzük. $f(n) = a_n$ így jelöljük, és a **sorozat n. tagja** $\{a_n\}$ a sorozat értékkészlete.

Def: Legyen $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ valós számsorozat, akkor mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ számsorozat **konvergens**, ha $\exists\, a \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ úgy, hogy ha $n > N(\varepsilon) \Rightarrow$ $\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

Mj.: (1) az „a" számot a sorozat **határértékének** nevezzük.
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ **N(ε) ε - hoz tartozó küszöbszámának** nevezzük.

Tétel: az $\langle a_n \rangle$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\exists\, a \in \mathbb{R}$ úgy, hogy bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van.

Def: Ha az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat nem konvergens akkor **divergens.**

Tétel: egy konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.

Def: az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat korlátos, ha értékkészlete korlátos.

Tétel: ha $\langle a_n \rangle$ konvergens akkor $\{a_n\}$ korlátos.

Def.: Legyen az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat. Akkor mondjuk, hogy az a_n :
- szigorúan monoton nő, ha $a_n < a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$
- monoton nő, ha $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$
- szigorúan monoton csökkenő, ha $a_{n+1} < a_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$
- monoton csökkenő, ha $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Tétel: Ha $\langle a_n \rangle$ számsorozat monoton és korlátos akkor $\langle a_n \rangle$ konvergens.

Def.: Legyen $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat és $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton.
Ekkor $b_n = a_{\varphi(n)} \Rightarrow \langle b_n \rangle$ az $\langle a_n \rangle$ részsorozatának nevezzük.

Tétel: Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens $\Rightarrow \forall$ részsorozata is konvergens és határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.

Tétel: (Bolzano – Weierstrass kiválasztási tétel)
Bármely korlátos számsorozatnak van konvergens részsorozata.

Tétel: Ha <an> és <bn> valós számsorozatok $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow$ igazak a következők:

(1) $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a \quad c \in \mathbb{R}$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(3) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

12. tétel

Valós és metrikus térbeli sorozatok konvergenciája, valós számsorok. Valós és metrikus teret metrikus térbe képező függvények folytonossága és határértéke. A folytonosságra és határértékre vonatkozó alapvető tételek. Hatványsorok és elemi függvények.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}$ $\quad b\neq 0 \;\; b_n\neq 0 \;\; \forall n\in\mathbb{N}$

Tétel: ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ *és* $<b_n>$ *korlátos* $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n=0$

Tétel: Ha $<a_n>$ konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ továbbá $a_n\leq b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $a\leq b$

Tétel: (Rendőr tétel)
Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$ továbbá $a_n< c_n< b_n$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n=a$

Def.: akkor mondjuk hogy az $<a_n>$ valós számsorozat Cauchy – sorozat,
ha $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $n,m>N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon$

Tétel: (Cauchy – féle konvergenciakritérium)
Az $<a_n>$ valós számsorozat $\Leftrightarrow$ konvergens, ha az $<a_n>$ Cauchy – sorozat.

Def.: az $<a_n>$ valós számsorozat $+\infty$ divergál, ha $\forall\ K\in\mathbb{R}$ esetén $\exists\ N(K)\in\mathbb{R}$, úgy, hogy $\forall\ n\in\mathbb{N}$ $n>N(K)$ esetén az $a_n>K\in\mathbb{R}$.

Def.: az $<a_n>$ $-\infty$ - be divergál, ha $\forall\ K\in\mathbb{R}$ esetén $\exists\ N(K)\in\mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $n>N(K)$ esetén $a_n<K$.

Tétel: legyen $a\in\mathbb{R}_+$. Az $<a_n>$: $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $a_n:=\sqrt[n]{a}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$

Tétel: $<a_n>$: $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $a_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens.

Def: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

Def: legyen $<a_n>$ egy valós számsorozat és $s_n:=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Ekkor az $<s_n>$ valós számsorozatot **valós számsor**nak nevezzük és $\sum\limits_1^\infty a_n$ -nel jelöljük. Az s_n tagot az **n-dik részletösszegnek** nevezzük.

Def: akkor mondjuk, hogy a $\sum\limits_1^\infty a_n$ valós számsor konvergens, ha az $<sn>$ valós számsorozat konvergens. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=a$, $a\in\mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy a valós számsor összege a.

jelölése: $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n=a$

12. tétel

Valós és metrikus térbeli sorozatok konvergenciája, valós számsorok. Valós és metrikus teret metrikus térbe képező függvények folytonossága és határértéke. A folytonosságra és határértékre vonatkozó alapvető tételek. Hatványsorok és elemi függvények.

Tétel:(Cauchy-féle konvergencia kritérium)

Legyen $\sum_1^\infty a_n$ valós számsor. $\sum_1^\infty a_n$ számsor akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, úgy hogy $\forall n,m \in \mathbb{N}, n>m> N(\varepsilon)$ $|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon$

Tétel: ha $\sum_1^\infty a_n$ valós számsor konvergens akkor az $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ – hoz tart.

$\left(\text{pl. } \sum_1^\infty \frac{1}{n} \text{ harmónikus sor és divergens}\right)$

Def: ha $\sum_1^\infty |a_n|$ konvergens akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_1^\infty a_n$ sor **abszolút konvergens**. Ha $\sum_1^\infty a_n$ konvergens de nem abszolút konvergens akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_1^\infty a_n$ sor **feltételesen konvergens.**

Tétel: ha $\sum_1^\infty a_n$ sor abszolút konvergens akkor konvergens is.

Tétel: (Majoráns kritérium)

Legyen $\sum_1^\infty a_n$ adott sor, ha $\exists \sum_1^\infty b_n$ sor, úgy hogy $|a_n| < b_n$ véges sok n kivételével és $\sum_1^\infty b_n$ sor konvergens akkor $\sum_1^\infty a_n$ sor abszolút konvergens.

Tétel: (Minoráns kritérium)

Legyen $\sum_1^\infty a_n$ adott számsor, ha $\exists \sum_1^\infty b_n$ sor melyre $0<b_n<a_n$ véges sok n kivételével és $\sum_1^\infty b_n$ sor divergens akkor $\sum_1^\infty a_n$ sor is divergens.

Tétel: (Cauchy-féle gyökkritérium)

Legyen $\sum_1^\infty a_n$ adott számsor, ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ akkor a sor abszolút konvergens

Ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ akkor a sor divergens.

12. tétel

Valós és metrikus térbeli sorozatok konvergenciája, valós számsorok. Valós és metrikus teret metrikus térbe képező függvények folytonossága és határértéke. A folytonosságra és határértékre vonatkozó alapvető tételek. Hatványsorok és elemi függvények.

Tétel: (D'Alambert-féle hányadoskritérium)

Ha an≠0 $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ és $\overline{\lim}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| < 1$ akkor $\sum_1^\infty a_n$ sor abszolút konvergens.

Ha $\underline{\lim}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| > 1$ akkor $\sum_1^\infty a_n$ sor divergens.

Def: legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \to \mathbb{R}$, $x_0 \in H$. Akkor mondjuk, hogy az f függvény folytonos x_0-ban, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall x \in H$, $|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Tétel: legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \to \mathbb{R}$, és $x_0 \in H$ f függvény folytonos az x_0 pontban akkor és csakis akkor, ha f jobbról és balról is folytonos az x_0 pontban.

Tétel: (Átviteli elv)
Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \to \mathbb{R}$, és $x_0 \in H$ f függvény folytonos az x_0 pontban akkor és csakis akkor ha $\forall$ olyan $\langle x_n \rangle: \mathbb{N} \to H$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Def: legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \to \mathbb{R}$, $H_1 \subset H$. Akkor mondjuk, hogy az f függvény **folytonos a H_1 halmazon**, ha H_1 minden pontjában folytonos.

Def: legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \to \mathbb{R}$. Akkor mondjuk, hogy az f függvény egyenletesen folytonos H-on, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall x,y \in H$, $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Tétel: ha $H \subset \mathbb{R}$, $f,g:H \to \mathbb{R}$ függvények akkor $x_0 \in H$ és f,g folytonos x_0-ban akkor $c \cdot f$ ($c \in \mathbb{R}$); $f+g$; $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$ függvények folytonosak az x_0 pontban.

Tétel: legyenek $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}$, az $f: H_1 \to \mathbb{R}$, $g: H_2 \to \mathbb{R}$, függvények $x_0 \in H_1$, $f(x_0) = y_0 \in H_2$ Ha az f függvény folytonos az x_0 pontban és a g függvény folytonos $f(x_0) = y_0$ pontban $\to (f \circ g)$ függvény folytonos az x_0 pontban.

Tétel: legyen $H \subset \mathbb{R}$, H kompakt, $f: H \to \mathbb{R}$ folytonos ekkor az R_f kompakt.

Tétel: legyen $H \subset \mathbb{R}$, H kompakt, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $\to \exists$ olyan $x_1, x_2 \in H$ úgy, hogy $f(x_1) = \inf R_f$; $f(x_2) = \sup R_f$

Tétel: Ha $H \subset \mathbb{R}$, H kompakt, $f: H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $\to$ f egyenletesen folytonos H-n.

Tétel: (Bolzano-tétel)
Legyen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $f(a) \neq f(b)$. Ekkor tetszőleges olyan λ-hoz, amely az f(a) és f(b) által meghatározott nyílt intervallumban van $\exists\ x_0 \in (a;b)$ úgy, hogy $f(x_0) = \lambda$

Tétel:(jeltartás)
Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f:H \to \mathbb{R}$, és $x_0 \in H$ és f függvény folytonos x_0 pontban. Ha $f(x0) > 0 \to$ $\exists\ r \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy $\forall x \in S_r(x_0) \cap H$ $f(x) > 0$

12. tétel

Valós és metrikus térbeli sorozatok konvergenciája, valós számsorok. Valós és metrikus teret metrikus térbe képező függvények folytonossága és határértéke. A folytonosságra és határértékre vonatkozó alapvető tételek. Hatványsorok és elemi függvények.

Def: Legyen $H\subset \mathbb{R}$, $f:H\to\mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja H-nak. Akkor mondjuk, hogy az f-nek az x_0-ban létezik **határértéke**, ha létezik olyan $y_0\in\mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\varepsilon>0$ esetén létezik $\delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall x\in H$, $x\neq x_0$ esetén, ha $|x-x_0|<\delta \to |f(x)-y_0|<\varepsilon$

Tétel: Legyen $H\subset \mathbb{R}$, $f:H\to\mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja H-nak. Az f-nek x_0-ban létezik határértéke $\leftrightarrow$ ha létezik jobb és baloldali határértéke és ezek egyenlők.

Tétel: Legyen $H\subset \mathbb{R}$, $f:H\to\mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja H-nak. f függvény folytonos x_0-ban $\leftrightarrow$ f-nek létezik határértéke x_0-ban és az megegyezik a helyettesítési értékkel.

Tétel: Legyen $H\subset \mathbb{R}$, $f:H\to\mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja H-nak, ha f függvénynek létezik x_0 pontban határértéke, akkor az egyértelmű.

Tétel:(Átviteli elv)
Legyen $H\subset \mathbb{R}$, $f:H\to\mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja H-nak. Az f függvénynek az x_0 pontban létezik határértéke $\leftrightarrow$ ha $\forall <x_n>: \mathbb{N}\to H\setminus\{x_0\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ esetén $<f(x_n)>$ függvényérték sorozat közös határértékhez konvergál.

Tétel: legyen $H\subset \mathbb{R}$, $f,g:H\to\mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja H-nak. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = A$; $\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = B$

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(c\cdot f)(x) = c\cdot A$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) = A+B$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = A\cdot B$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{A}{B}$ $B\neq 0$ és $0\notin R_g$

Tétel: legyen $H_1,H_2\subset\mathbb{R}$ $f:H_1\to\mathbb{R}$; $g:H_2\to\mathbb{R}$. Ha x_0 torlódási pontja H_1-nek és az $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, y_0 torlódási pontja H_2-nek továbbá, ha $x\neq x_0$ akkor $f(x)\neq y_0$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(y) = z_0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(g\circ f)(x) = z_0$

Def: Legyen $H\subset \mathbb{R}_b$, $f:H\to\mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja H-nak. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek létezik határértéke az x_0 pontban, ha $\exists\, y_0\in\mathbb{R}_b$ úgy, hogy y_0 bármely N_1 környezetéhez megadható az x_0 olyan N_2 környezete úgy, hogy ha $x\in N_2\to f(x)\in N_1$

Def: legyen $H\subset \mathbb{R}$, $f:H\to\mathbb{R}$, H felülről nem korlátos. Akkor mondjuk, hogy $(+\infty)$-ben $\exists$ f függvénynek határértéke, ha $\exists\, y_0\in\mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall\, x\in H$ $x>\delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x)-y_0|<\varepsilon$

Def: legyen $H\subset\mathbb{R}$ $a,a_0,a_n\in\mathbb{R}$ f_n: $H\to\mathbb{R}$, ahol $f_n(x)=a_n(x-a)^n$, megállapodunk, hogy $f_0(x)=a_0 \Rightarrow$ a $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ függvénysort hatványsornak nevezzük és $\sum\limits_0^\infty a_n(x-a)^n$ módon jelöljük.

12. tétel

Valós és metrikus térbeli sorozatok konvergenciája, valós számsorok. Valós és metrikus teret metrikus térbe képező függvények folytonossága és határértéke. A folytonosságra és határértékre vonatkozó alapvető tételek. Hatványsorok és elemi függvények.

Tétel: (Cauchy-Hadamard tétel)

Legyen $\sum_{0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ egy adott hatványsor és legyen $\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$, ha

(1) $\alpha=0$ $\rightarrow$ a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens

(2) $0<\alpha<+\infty$, $\rho := \frac{1}{\alpha}$ $\rightarrow$ ha $|x| < \rho \rightarrow$ hatványsor abszolút konvergens

ha $|x| > \rho \rightarrow$ a hatványsor divergens

(3) $\alpha=+\infty$ $\rightarrow$ a hatványsor $x=0$ pontban konvergens

Tétel: legyen a $\sum_{0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ hatványsor konvergenciasugara $0<\rho\leq+\infty$. Ekkor $f:(-\rho;\rho)\rightarrow \mathbb{R}$

$f(x)= \sum_{0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ összegfüggvény folytonos.

Def: az $f: \mathbb{R}\rightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ függvényt **exponenciális függvénynek** nevezzük.

Tétel: $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot \exp(y)$

Tétel: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp(x)>0$

$\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$

Tétel: Az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő folytonos függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza.

Tétel: $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Def: az exponenciális függvény inverzét **logaritmus függvénynek** nevezzük.

Tétel: a logaritmus függvény folytonos, szigorúan monoton növekvő, értékkészlete a valós számok halmaza.

Tétel: $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0+0} \log(x) = -\infty$

Def: az $f: \mathbb{R}\rightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=\exp(x\log a)$ függvényt **a-alapú exponenciális függvénynek nevezzük**, ahol $a\in \mathbb{R}_+$

Tétel: (a)Az a-alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ha $a>1$, szigorúan monoton csökkenő, ha $0<a<1$

(b) folytonos

(c) ha $0<a<1$, $1<a \rightarrow R_{\exp_a} = \mathbb{R}_+$, ha $a=1 \rightarrow R_{\exp_a} = \{1\}$

12. tétel

Valós és metrikus térbeli sorozatok konvergenciája, valós számsorok. Valós és metrikus teret metrikus térbe képező függvények folytonossága és határértéke. A folytonosságra és határértékre vonatkozó alapvető tételek. Hatványsorok és elemi függvények.

Def: Ha $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, akkor az a-alapú exponenciális függvény inverzét **a-alapú logaritmus függvénynek** nevezzük.

Def: legyen $a \in \mathbb{R}^+$, akkor $\exp(x\log a) = \exp_a(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Def: az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ függvényt **szinusz függvénynek** nevezzük.

Def: az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ függvényt **koszinusz függvénynek** nevezzük.

Tétel: a szinusz függvény páratlan a koszinusz függvény páros függvény.

Tétel: a koszinusz függvénynek létezik zérushelye a $(0;2]$ intervallumban.

Tétel: ha az f függvény folytonos akkor a zérushelyeinek halmaza zárt.

Def: a koszinusz függvény legkisebb pozitív zérushelyének kétszeresét π-vel jelöljük.

Def: a szinusz függvény $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$-ra való leszűkítésének inverzét **arkusz szinusz függvénynek** nevezzük.