11, Az algebrai művelet és algebrai struktúrák, csoport, részcsoport, normálosztók, ciklikus csoport tulajdonságai, külső és belső direkt szorzat, véges Abel- csoport alaptétele.

Def: Ha $A \neq 0$ halmazon algebrai művelet van értelmezve, akkor A-t algebrai struktúrának nevezzük.
Jelölése: $\langle A, F \rangle$

Def: Legyen $\langle G, \cdot \rangle$ algebrai struktúra, ahol · binér algerbrai művelet. Ezt a struktúrát csoportnak nevezzük, ha teljesülnek a következő axiómák:
1. (ab)c=a(bc) minden a,b,c€G
2. létezik 1€g, 1·a=a·1=a (neutrális elem)
3. minden a€G, létezik a^{-1}€G, $a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=1$
Ha igaz, hogy ab=ba, minden a,b€G, akkor G-t kommutatív vagy Abel- csoportnak nevezzük.

Def: A csoport alaphalmazának számosságát a csoport rendjének nevezzük. Jelölése: $|G|$
Ha a csoport véges sok elemből áll, akkor a csoportot véges csoportnak nevezzük, ellenkező esetben végtelen.

Tétel: A csoport egységeleme és az elem inverze egyértelműen meghatározott
Tétel: A csoportban érvényes az egyszerűsítési szabály (azaz ab=ac → b=c)
Def: Legyen H a G csoport részcsoportja. Ha H a G-beli csoportműveletre nézve csoportot alkot,akkor H-t a G csoport részcsoportjánaknevezzük. Minden csoportban maga a G és az egységelemből álló halmaz részcsoport.
Tulajdonságai:
1. a(bc)=(ab)c minden a,b,c€G
2. létezik 1€G 1a=a1=a
3. minden a€G,létezik a^{-1}€G $aa^{-1}=a^{-1}a=1$
4. ab=ba minden a,b,c€G
Def: Legyen H a G részcsoportja és g€G, ekkor gH={g·h | h€H}, Hg=={h·g | g€G}. A gH-t a csoport baloldali, a Hg-t a csoport jobboldali mellékosztályának nevezzük. A g a mellékosztály reprezentánsa.

Tétel: Mellékosztályok tulajdonságai:
1, ha g€G, akkor gH=H
2, minden h,g€H, akkor $|gH|=|hH|$ (mellékosztályok számossága megegyezik)
3, Minden g€G-hez létezik olyan mellékosztály, amely tartalmazza g-t
4,A mellékosztály fügetlen a reprezentáns kiválasztásától
5, Két mellékosztály vagy egybeesik vagy metszetük üreshalmaz.

Def: A mellékosztályok számát A $G=H+a_1H+a_2H+\dots+a_nH$ felbontásban a H részcsoport bal oldali indexének nevezzük.

Tétel. (Lagrange): Véges csoportban a részcsoport rendje és indexe osztja a csoport rendjét.

Tétel: A G nem üres H halmaza akkor és csak akkor részcsoportja G- nek,ha telj a következő tulajdonságok :
1. 1€H
2. minden a€H, a^{-1}€H
3. minden a,b€H, ab€H

Def: A G csoport H részcsoportját, A G normálosztójának nevezzük , ha g·H=H·g minden g€G.
Tétel. A kettő indexű részcsoport normálosztó.
Tétel: Normálosztók metszete is normálosztó
Def: Az egy elemmel generált csoportot ciklikus csoportnak nevezzük
Def: Minden ciklikus csoport Abel. Csoport.
Tétel: Minden véges csoport esetén bármely elem rendje osztja a csoport rendjét; ha a csoport rendje prím, akkor a csoport ciklikus
Def: A $(l_1, l_2, \dots l_t)$ ciklusban lévő elemek t számát a ciklus hosszának nevezzük.

Def: A 2 hosszúságú ciklust transzpozíciónak nevezzük.

Def. Ciklikus csoport bármely részcsoportja ciklikus.

Véges Abel- csoportok alaptétele: Véges Abel- csoport ciklikus p- részcsoportok direkt szorzataként állítható elő

Def: Legyen A, B a G részcsoportja. A G az A, B részcsoportjának direkszorzata,ha

1, G=<A,B>

2, A∩B ={1}

3, A,B normálosztója G-nek

Def: Az <R,+, ·> algebrai struktúrát gyűrűnek nevezzük, ha teljesülnek a következő tulajdonságok:

I, 1, a+(b+c)= (a+b)+c minden a, b,c €R

2, létezik 0€R 0+a=a+0=a minden a€R

3, minden a€R létezik –a a+(-a)=(-a)+a=0

4, a+b=b+a minden a, b€R

II. 1, a(bc)=(ab)c minden a,b,c €R

2, (a+b)c=ac+bc minden a,b,c €R

a(b+c)=ac+bc

3, létezik 1 €R 1a=a1=a minden a €R

4, ab=ba

Def: R' részgyűrűnek nevezzük, ha maga is gyűrű az R műveletének R' –re való leszűkítésére nézve.

Tétel: R' akkor és csak akkor részgyűrűje R-nak,ha

1, a+b €R' minden a,b€R'

2, ab€R' minden a,b €R'

3, 0 €R'

4, -a €R' minden a €R'

Tétel: A gyűrű egységeinek halmaza multiplikatív csoportot alkot.

Def: Az R gyűrű I nem üres részhalmazát ideálnak nevezzük,ha a,b€I, r€R

1, a+b €I

- a €I a-b€I

0€I

2, ra, ar €I

Tétel.: vannak olyan részgyűrűk, melyek nem ideálok

Triviális ideálok: R, {0}