5. tétel

D.: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, $x_0 \in H$, akkor a $\varphi: H \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ fgv-t az f fgv x_0-beli differenciálhányadosának nevezzük. Ha x_0 belső pontja H-nak és a φ-nek $\exists$ határértéke az x_0-ban $\Rightarrow$ ezt a számot az f x_0-beli differenciálhányadosának nevezzük. φ az f x_0-hoz tartozó differenciálhányados-fgv-e.

T.: (Lineáris approximáció) Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H-nak. Az f fgv diff-ható x_0-ban $\Leftrightarrow$, ha $\exists A \in \mathbb{R}$, $\omega: H \to \mathbb{R}$ úh ω folytonos x_0-ban, $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = 0$, $f(x) - f(x_0) = (A + \omega(x))(x - x_0)$, ahol $A = f'(x_0)$, ω és A egyértelműen meghatározott.

T.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ fgv, x_0 belső pontja H-nak. Ha az f fgv diff-ható x_0-ban $\Rightarrow$ f folytonos x_0-ban.

T.: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f, g: H \to \mathbb{R}$ fgv, x_0 belső pontja H-nak. Ha f és g diff-ható x_0-ban és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lambda f + \mu g$; $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(0 \notin R_g)$ diff-ható x_0-ban.

1) $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$

2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

T.: (Inverz fgv diff-hatósága) ! $f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ invertálható és folytonos $x_0 \in \langle a; b \rangle$ $y_0 = f(x_0)$. Ha f diff-ható az x_0-ban és $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ f^{-1} is diff-ható az y_0 pontban és az $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

D.: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ akkor mondjuk, h f diff-ható fgv, ha H minden pontban differenciálható.

D.: ! $H_2 \subset H$, $H_2 := \{x \mid x \in H,$ f diff-ható x-ben$\}$ nemüres halmaz $\Rightarrow$ a $g: H_2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = f'(x)$ fgv-t az f differenciálhányados fgv-ének v. deriváltjának nevezzük.

Mj.: • Az exp fgv-nek $\exists$ deriváltja és az önmaga.

• A log fgv $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén diff-ható $\wedge$ $\log' x = \frac{1}{x}$

• $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^a$ $\quad a \in \mathbb{R}$ diff-ható $\wedge$ $f'(x) = a x^{a-1}$

• $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin x$ $\quad$ –"– $\quad \wedge$ $f'(x) = \cos x$

• $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \cos x$ $\quad$ –"– $\quad \wedge$ $f'(x) = -\sin x$

D.: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ fgv, x_0 belső pontja H-nak. Akkor mondjuk, h az f fgv-nek az x_0 pontban helyi maximuma van, ha $\exists$ olyan $r \in \mathbb{R}^+$ úh $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall\, x \in S_r(x_0) \cap H$, helyi minimuma van, ha $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall\, x \in S_r(x_0) \cap H$.

T.: (Darboux-tétel) Ha az $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ diff-ható fgv $\wedge$ $f'(a) \neq f'(b) \Rightarrow$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén, amely az $f'(a)$ $\wedge$ az $f'(b)$ által meghatározott intervallumban van $x_0 \in (a;b)$ úh $f'(x_0) = \lambda$.

T.: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ fgv, x_0 belső pontja H-nak; f diff-ható x_0-ban. Ha az f fgv-nek az x_0 pontban helyi szélsőértéke van $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$.

T.: (Rolle) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, ami az $(a;b)$-n diff-ható $[a;b]$-n folytonos és $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, \xi \in (a;b)$ úh $f'(\xi) = 0$.

T.: (Cauchy-féle középértéktétel) Ha az $f, g: [a;b] \to \mathbb{R}$ folytonos fgv-ek, amelyek az $(a;b)$-n diff-ható $\Rightarrow \exists\, \xi \in (a;b)$, úh
$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi)$

T.: (Lagrange-féle középértéktétel) Ha $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fgv folytonos, $(a;b)$-n diffható $\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ úh $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

T.: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ fgv, x_0 belső pontja H-nak, f differenciálható. Ha x_0 pontnak $\exists$ olyan környezete, h $f'(x) \geq (\leq)\ 0$ $\forall\, x \in (x_0 - r; x_0)$ és $f'(x) \leq (\geq)\ 0$ $\forall\, x \in (x_0 - r; x_0)$ $\Rightarrow$ f fgv-nek x_0 pontban helyi maximuma (minimuma) van.

T.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ fgv, x_0 belső pontja H-nak. Tfh. f $(n-1)$-szer ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$) diffható az x_0 egy környezetében és n-szer az x_0 pontban.

Ha $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ és $f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ ha n páratlan $\Rightarrow$ f-nek x_0 pontban nincs helyi szélsőértéke. Ha n páros $\Rightarrow$ f-nek x_0-ban helyi szélsőértéke van.

$f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ helyi max ; $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ helyi min.