4. tétel

D.: Az $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt valós számsorozatnak nevezzük.

jel: $f(n) = a_n$

D.: Legyen $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ valós számsorozat, akkor mondjuk, hogy $\langle a_n \rangle$ számsorozat konvergens, ha $\exists\, a \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy ha $n > N(\varepsilon) \Rightarrow$ $|a_n - a| < \varepsilon$.

Mj: az „a" számot a sorozat határértékének nevezzük.
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

T.: Az $\langle a_n \rangle$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\exists\, a \in \mathbb{R}$ hogy $\forall$ környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van.

D.: Ha az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat nem konvergens $\Rightarrow$ divergens.

D.: Az $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat korlátos, ha értékkészlete korlátos.

értékkészlete
T.: Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ korlátos.

D.: ! $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat. Akkor mondjuk, hogy az a_n:

- szmn, ha $a_n < a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$
- mn, ha $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$
- szmcs, ha $a_{n+1} < a_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$
- mcs, ha $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

T.: Ha $\langle a_n \rangle$ számsorozat monoton és korlátos $\Rightarrow$ $\langle a_n \rangle$ konvergens.

D.: ! $\langle a_n \rangle$ valós számsorozat $\wedge$ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szig mon. Ekkor $b_n = a_{f(n)} \Rightarrow$ $\langle b_n \rangle$ az $\langle a_n \rangle$ részsorozata.

T.: Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens $\Rightarrow$ $\forall$ részsorozata is konvergens és határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.

T.: (Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel) Bármely korlátos számsorozatnak van konvergens részsorozata.

T.: ! $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$, ill.: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ $\wedge$ $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$ $\Rightarrow$ teljesülnek:

- $\lim\limits_{n \to \infty} c \cdot a = c \cdot a$ $\quad c \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ $\quad b \neq 0,\ b_n \neq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

T: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\langle b_n\rangle$ korlátos $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

T: (Rendőr-tétel) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ továbbá $a_n < c_n < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

D: Akkor mondjuk, hogy az $\langle a_n\rangle$ valós számsorozat Cauchy-sorozat, ha $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)$ úh ha $n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

T: (Cauchy-féle konvergenciakritérium) Az $\langle a_n\rangle$ valós számsorozat $\Leftrightarrow$ konvergens, ha $\langle a_n\rangle$ Cauchy-sorozat.

Mj: • $a \in \mathbb{R}^+$. $\langle a_n\rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n := \sqrt[n]{a}$ konv. $\wedge$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

• $\langle a_n\rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konv $\wedge$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

D: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f : H \to \mathbb{R}$, $x_0 \in H$. Akkor mondjuk, h. f fgv folytonos x_0-ban, ha $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon)$ úh $\forall\, x \in H$, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

T: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f : H \to \mathbb{R} \wedge x_0 \in H$. Az f fgv folytonos x_0 pontban $\Leftrightarrow$, ha f jobbról és balról is folytonos az x_0 pontban.

T: (Átviteli-elv) ! $H \subset \mathbb{R}$, $f : H \to \mathbb{R}$, $x_0 \in H$. Az f fgv folytonos az x_0 pontban $\Leftrightarrow$, ha $\forall$ olyan $\langle x_n\rangle : \mathbb{N} \to H$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

D: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f : H \to \mathbb{R}$, $H_1 \subset H$. Akkor mondjuk, h. f folytonos a H_1 halmazon, ha H_1 minden pontjában folytonos.

D: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f : H \to \mathbb{R}$. Akkor mondjuk, h f egyenletesen folytonos H-n, ha $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon)$ úh $\forall\, x, y \in H$ $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

T: (Bolzano-tétel) ! $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $f(a) \neq f(b)$. Ekkor tetszőleges olyan η-hoz, amely az $f(a)$ és $f(b)$ által meghatározott nyílt intervallumban $\exists\, x_0 \in (a; b)$, úh $f(x_0) = \eta$.

D.: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ x_0 torlódási pontja H-nak. Akkor mondjuk, hogy az f-nek az x_0-ban létezik határértéke, ha $\exists$ olyan $y_0 \in \mathbb{R}$ hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta(\varepsilon)$ hogy $\forall x \in H$, $x \neq x_0$ esetén, ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$

T.: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja H-nak. Az f-nek x_0-ban $\exists$ határértéke $\Leftrightarrow$, ha $\exists$ jobb és baloldali határértéke $\wedge$ ezek egyenlők.

T.: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ $\wedge$ x_0 torlódási pontja H-nak. Az f folytonos x_0-ban $\Leftrightarrow$ ha f-nek $\exists$ határértéke x_0-ban $\wedge$ az megegyezik a helyettesítési értékkel.

T.: ! $H \in \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja H-nak, ha f-nek $\exists$ x_0-ban határértéke $\Rightarrow$ az egyértelmű.

T.: (Átviteli-elv) ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja H-nak. Az f-nek x_0-ban $\exists$ határértéke $\Leftrightarrow$ ha $\forall$ $\langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to H \setminus \{x_0\}$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ esetén $\langle f(x_n) \rangle$ fgvérték sorozat közös határértékhez konvergál.

D.: ! $H \subset \mathbb{R}_b$, $f: H \to \mathbb{R}_b$ x_0 torlódási pontja H-nak. Akkor mondjuk, hogy az f fgv-nek $\exists$ határértéke az x_0 pontban, ha $\exists$ $y_0 \in \mathbb{R}_b$ hogy y_0 $\forall N_1$ környezetéhez megadható az x_0 olyan N_2 környezete hogy ha $x \in N_2 \Rightarrow f(x) \in N_1$.

Mj.:
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ fgv exponenciális fgv.

  szig mon nő, ék: $\mathbb{R}^+$
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ fgv szinusz fgv.
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ fgv koszinusz fgv.