3. Gráfok összefüggősége, fák. Gráfok színezése, mohó színezési algoritmus, kromatikus polinom. Párosítás-elmélet. Hálózatok, folyamok maximális folyam, minimális vágás

Def: A $G(E,\varphi,V)$ gráfot összefüggőnek mondjuk, ha bármely csúcsából vezet bármely másik csúcsába út.

TÉTEL: Ha a $G(E,\varphi,V)$ összefüggő egyszerű gráfban l_1, l_2 maximális hosszúságú útjai, akkor az l_1, l_2 utaknak van legalább egy közös csúcspontjuk.

Bizonyítás: indirekt

Def: A G egyszerű gráfot fának nev., ha összefüggő és nem tartalmaz kört.

A fa gráf minimálisan összefüggő egyrészt abban az értelemben, hogy bármely élét is töröljük a visszamaradt gráf nem lesz összefüggő, másrészt minimális abban az értelemben, hogy bármely csúcsából 1 és csak 1 út vezet bármely másik csúcsába.

TÉTEL: Bármely G fa tartalmaz legalább egy elsőfokú csúcsot

Bizonyítás: indirekt

Def: A G gráfot erdőnek mondjuk, ha komponensei fák.

TÉTEL: Ha G gráf fa, akkor $|V|-1=|E|$

Bizonyítás: teljes indukcióval

TÉTEL: Ha a $G(E,\varphi,V)$ gráf erdő és "k" komponensből áll akkor $|V| - k = |E|$

TÉTEL: Bármely fa gráfnak legalább 2 elsőfokú pontja van.

(Csillag gráf S_k)

Def: A $G(E,\varphi,V)$ gráf feszítőfájának mondjuk G'-t, ha G' részgráfja G-nek és G' fa, másrészt G minden csúcsa G'-nek is csúcsa.

TÉTEL: G gráfnak akkor és csak akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.

A G gráfnak valamely "v" csúcsa gyökere, ha G bármely v-től különböző csúcsából el lehet jutni irányított úttal.

A G gráf irányított fa, ha irányítás nélkül tekintve fa, és van egy "v" gyökere, melyből bármely csúcsába vezet irányított út.

Def: A G gráf él szerinti összefüggősége $\varepsilon(G)$ az a legkisebb szám, amelyre teljesül, hogy létezik G-nek $\varepsilon(G)$ db olyan éle, amelyeket törölve G-ből a megmaradt gráf már nem összefüggő vagy a megmaradt gráf a triviális gráf. (egy csúcspontú él nélküli gráf)

TÉTEL: Ha G egyszerű és összefüggő, akkor $\varepsilon(G) \leq \delta(G)$

gráf csúcsai fokszámának minimuma

Def: A G egyszerű, összefüggő gráfnak csúcspont szerinti összefüggőségi száma az a legkisebb $K(G)$ szám, amelyre teljesül, hogy létezik G-nek $K(G)$ darab olyan csúcspontja, melyeket törölve G-ből, már nem összefüggő gráfot kapunk (vagy a triviális gráfot kapjuk).

C_n kör $\kappa(C_n) = 2$

P_n út $\kappa(P_n) = 1$

TÉTEL: Ha a $G(E, \varphi, V)$ gráf egyszerű és összefüggő, akkor

$\kappa(G) \leq \delta(G)$

TÉTEL: Ha a $G(E, \varphi, V)$ gráf egyszerű, $|E| = m$; $|V| = n$ és összefüggő, akkor $\kappa(G) \leq \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$

TÉTEL: Ha a $G(E, \varphi, V)$ gráf egyszerű és összefüggő, akkor

$\kappa(G) \leq \varepsilon(G) \leq \delta(G)$

TÉTEL: (Cayley): Az n szögpontú K_n teljes gráf kül. feszítőfáinak a száma: n^{n-2}

minimális súlyú ~~feszítőfa~~ meghat.:

Kruskal algoritmus – éleket választ (min)

Prim algoritmus – egy csúcsból indulunk

Def: A G gráf kromatikus száma $\chi(G)$ ha G csúcsai $\chi(G)$ színnel kiszínezhetők, de kevesebbel ($\chi(G)-1$)-el már nem.

$\chi(P_n) = 2$ $\chi(C_{2n}) = 2$ $\chi(C_{2n+1}) = 3$ $\chi(T) = 2$

Megengedett helyes színezést könnyen kaphatunk a mohó színezési algoritmussal.

(Legelső csúcs u_0-t színezzük 1-gyel jelölt színre, u_1-t -1re ha nem szomszédos u_0-al, ha szomszédos akkor használjuk a lehető legkisebb indexű színt (2) ...)
Az algoritmus a színek "gyors" kiválasztásában mohó. → "első" "megengedett" színt választja elkerüli annak a vizsgálatát, hogy gazdaságosabb-e így)

TÉTEL: Ha a G gráf egyszerű, akkor kromatikus száma $\chi(G) \leq$ mint a csúcspontjai fokszámainak maximuma: $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$

Def: G gráfot k-kritikusnak mondjuk, ha kromatikus száma $\chi(G) = k$ és bármely valódi $H \subset G$ részgráfjának a kromatikus száma kisebb k-nál
$\chi(H) \leq k-1$

TÉTEL: A G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma $\Leftrightarrow 2$, ha G páros és van legalább egy éle.

Def: Jelölje $p(G, r)$ a G gráf csúcsainak r színnel való jó színezéseinek számát.

Ha a $p(G, r)$-t az r függvényének tekintjük akkor a G gráf kromatikus polinomjának szokták nevezni.

$p(P_n, r) = r(r-1)^n$ (út)

$p(K_n^c) = r^n$ (üres, él nélküli gráf)

$p(K_n) = r(r-1)(r-2)\dots(r-(n-1))$ (teljes gráf)

$p(T_n, r) = r(r-1)^{n-1}$ (fagráf)

TÉTEL: (Kromatikus redukció tétele)
A G egyszerű gráf bármely "e" élére teljesül, hogy kromatikus polinomja:

$$p(G, r) = p(G-e, r) - p(G/e; r)$$

Def: G gráf kromatikus indexe $\chi_e(G)$, ha G élei $\chi_e(G)$ színnel színezhetők, de kevesebbel ($\chi_e(G)-1$)-el már nem.

TÉTEL: Ha $G(E, \varphi, V)$ gráf egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$ vagy $\chi_e(G) = \Delta(G)+1$

TÉTEL: (ötszín tétel) Bármely síkba rajzolható sokszög gráf kiszínezhető öt színnel.

<u>Def</u>: A $G(V,\varphi,E)$ gráfot párosnak nev., ha V csúcshalmaza felosztható két diszjunkt részre: V_1-re és V_2-re ($V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) úgy, hogy minden él ezen két halmaz között fut, vagyis $(x,y) \in E$ esetén $x \in V_1$; $y \in V_2$.

<u>TÉTEL</u>: Egy G gráf $\Leftrightarrow$ páros gráf, ha nincs G-ben páratlan hosszúságú kör.

<u>Def</u>: Legyen $G(V,\varphi,E)$ egy tetszőleges gráf, az E élhalmaz $E' \subseteq E$ részhalmaza G egy párosítása, ha a $G'(V,\varphi,E')$ gráfban minden pont foka legfeljebb 1.

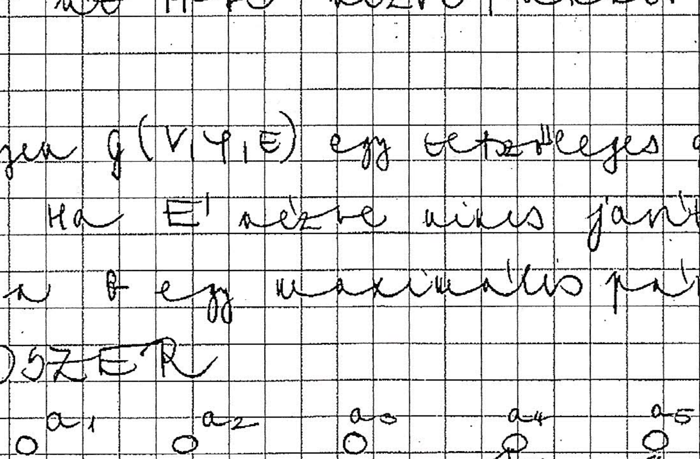
<u>Def</u>: két élt függetlennek nev., ha végpontjai négy különböző pontot adnak. Egy gráf éleinek E' halmazát párosításnak nev., ha a benne levő élek páronként függetlenek.

<u>Def</u>: G gráf egy E' párosítása maximális, ha G minden E'' párosításán $|E''| \leq |E'|$

<u>Lemma</u>: Legyen $G(V,\varphi,E)$ gráf, benne M egy párosítás. Ha P javító út M-re nézve, akkor M nem maximális párosítás.

<u>TÉTEL</u>: Legyen $G(V,\varphi,E)$ egy tetszőleges gráf és E' egy párosítása. Ha E'-re nézve nincs javító út G-ben akkor E' a G egy maximális párosítása.

MAGYAR MÓDSZER



Def: Legyen G gráf s, t eleme V-nek, különböző csúcsok, $k: E \to \mathbb{Z}^+$. Ekkor (V, E, s, t, k) hálózat, "s" a forrás, "t" a nyelő, "k" a kapacitás.

Def: Legyen (V, E, s, t, k) hálózat. $f: E \to \mathbb{Z}$ folyam, ha rendelkezik a következő 3 tulajdonsággal:

a) kapacitás megszorítás: $f(u, v) \leq k(u, v)$ $u, v \in V$

b) ferde szimmetria: $f(u, v) = -f(v, u)$

c) megmaradási szabály $\sum_{v} f(u, v) = 0$

Lemma: Ha (V, E, s, t, k) hálózat: $f: E \to \mathbb{Z}$ folyam, V részhalmaza A, B, $A \neq \emptyset$; $B \neq \emptyset$ akkor

a) $f(A, B) \leq k(A, B)$

b) $f(A, A) = 0$

c) $f(s, V) = -f(t, V)$

Lemma: Legyen (V, E, s, t, k) egy hálózat, f pedig egy folyam.

Ekkor V-nek bármely A, B részhalmaza esetén

$f(A, B) = -f(B, A)$

V-nek bármely A, B, C $(A \cap B = \emptyset)$ részhalmaza esetén

$f(A \cup B, C) = f(A, C) + f(B, C)$ és $f(C, A \cup B) = f(C, A) + f(C, B)$

Maximális folyam problémának azt nevezzük, mikor egy adott V hálózatban az s-től t-be vezető maximális nagyságú folyamot keressük.

Def: Legyen (V, E, s, t, k) egy hálózat, V részhalmazai A, B, melyek uniója éppen V és $A \cap B = \emptyset$. Legyen $s \in A$, $t \in B$.

Ekkor az A, B halmazpárt s,t-vágásnak nev.
Az A,B vágás kapacitásának a $k(A,B) := \sum_u \sum_v k(u,v)$ mennyiséget értjük.

<u>Lemma</u>: Legyen f a V hálózat egy folyama, legyen A, B a V egy vágása. Ekkor az A, B vágáson átfolyó folyam nagysága $f(A,B) = \|f\|$

<u>TÉTEL</u>: Tetszőleges A, B vágásra és f folyamra $\|f\| \leq k(A,B)$

<u>TÉTEL</u>: (Ford–Fulkerson, maximális folyam, minimális vágás)
Legyen f egy folyam a (V, E, s, t, k) hálózatban. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.
1. f egy maximális értékű folyam
2. f-hez nem létezik növelő út
3. létezik olyan vágás, hogy $\|f\| = k(A,B)$

<u>Köv</u>: Minden hálózatban van maximális folyam és minimális vágás, és $\max_f f(s,V) = \min_{(A,B)} k(A,B)$