7. tétel

Differenciálegyenletek alapfogalmai:

D: Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{n+1}$; $f: D \to \mathbb{R}$ valós értékű folytonos fgv.

Keresendő az összes olyan $\varphi: I \to \mathbb{R}$ fgv, amely rendelkezik a köv. tulajdonságokkal:

- $I \subset \mathbb{R}$ pozitív hosszúságú intervallum
- $\varphi: I \to \mathbb{R}$ n-szer diff-ható
- $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in D$, ha $x \in I$
- $\varphi^{n}(x) = f(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$, ha $x \in I$

Ez a probléma az n-edrendű közönséges explicit differenciálegyenlet, a fenti tulajdonságú φ ennek a problémának egy megoldása.

jel.: (1) $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$

Keresendő (1) összes olyan $\varphi: I \to \mathbb{R}$ megoldása adott $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_n) \in D$ esetén, melyre igaz:
- $x_0 \in I$
- $\varphi^{(k)}(x_0) = y_k$, $k = 0, \dots, n-1$

Ez a probléma az (1)-re vonatkozó kezdeti érték probléma v. Cauchy-feladat, a fenti tulajdonságú φ pedig ennek egy megoldása.

Cauchy-feladat jel.: (1) $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$

(2) $y^{(k)}(x_0) = y_k$, $k = 0, \dots, n-1$

D: $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^{n+1}$; $f: D \to \mathbb{R}^n$ folytonos fgv.

Keresendő olyan $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$, hogy:

- $I \subset \mathbb{R}$ pozitív hosszúságú intervallum
- φ diff-ható
- $(x, \varphi(x)) \in D$, ha $x \in I$
- $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, ha $x \in I$

Ezt a problémát az n-dimenziós elsőrendű explicit differenciálegyenlet-rendszernek, a fenti fgv-t pedig ennek egy megoldásának nevezzük.

jel: (3) $y'(x) = f(x, y(x))$

Legyen $(x_0, y_0) \in D$. Keresendő az összes olyan $\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ megoldása (3)-nak, amelyre teljesül, hogy:

- $x_0 \in J$
- $\varphi(x_0) = y_0$

Ez a probléma a (3)-ra vonatkozó kezdetiérték probléma vagy Cauchy-feladat.

jel.:

(3) $\quad y'(x) = f(x, y(x))$

(4) $\quad y(x_0) = y_0$.

Átviteli elv:

Az (1) (ill. (1)-(2)) probléma ekvivalens egy speciális (3) (ill. (3)-(4)) problémával a köv. értelemben:

ha $\varphi: J \to \mathbb{R}$ megoldása (1)-nek $\Rightarrow (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}): J \to \mathbb{R}$ fgv megoldása a

$$(3') \quad \begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ \quad\vdots \\ y_{n-1}'(x) = y_n(x) \\ y_n'(x) = f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

diffe-rendszernek

Másrészt, ha $\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ (3')-nek megoldása $\Rightarrow \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, φ_1 (1) megoldása.

Elemi megoldási módszerek:

1) Szétválasztható változójú diffe.

$$y'(x) = f(x)\, g(y(x))$$

$f: J \to \mathbb{R}$ folytonos, $g: I \to \mathbb{R}$ folytonos

$$\begin{cases} y'(x) = f(x)\, g(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f \quad , x \in J \qquad\qquad G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g}$

$\varphi: J_0 \to \mathbb{R}$ (1) megoldása

Ez azt jelenti, hogy φ megoldása: $\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x), x \in J_0 \Rightarrow G(\varphi(x))' = F'(x) \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}, \text{ hogy } G(\varphi(x)) = F(x) + c \Rightarrow$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \varphi(x) = G^{-1}(F(x)+c), x \in J_0$$

$*$ szerint definiált φ fgv (1) megoldása

$$G(\varphi(x)) = F(x) + c.$$

$$G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = F'(x)$$

$$\frac{1}{g(\varphi(x))} \cdot \varphi'(x) = f(x) \Rightarrow \varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x))$$

$$y_0 = \varphi(x_0) = G^{-1}(F(x_0)+c) \Rightarrow G^{-1}(c) \Rightarrow G(y_0) = c = 0.$$

A Cauchy-feladat megoldása: $\varphi(x) = G^{-1}(F(x))$, $x \in J$.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \qquad y = \dots$$

2) Változóiban homogén de.

3) Az $y'(x) = f\left(\frac{ax+by(x)+c}{\alpha x + \beta y(x) + \gamma}\right)$ alakú de.

4) Bernoulli-féle de:

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)y(x)^{\alpha}, \quad f, g: J \to \mathbb{R} \text{ folyt.}, \alpha \neq 1$$

$$u(x) = y(x)^{1-\alpha}$$

$$y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\frac{1}{1-\alpha} u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot u'(x) + f(x)u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}} = g(x)u(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$u'(x) + (1-\alpha)f(x)u(x) = g(x)(1-\alpha)$$

5) Elsőrendű lineáris de.

6) Riccati-féle diffe.

$$y'(x) = f(x)y(x)^2 + g(x)y(x) + h(x)$$

7) Egzakt differenciálegyenlet

8) Hiányos másodrendű de

Egzisztencia és unicitás tételek:

T.: Picard–Lindelöf tétel

Legyen $0<\alpha\in\mathbb{R}$, $0<\beta\in\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $y_0\in\mathbb{R}^n$

$Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;\ |x-x_0|\le\alpha,\ \|y-y_0\|\le\beta\}$; $f:Q\to\mathbb{R}^n$ folyt.

$M>0: \|f(x,y)\|\le M \quad \forall x,y\in Q$, $h=\min\{\alpha;\frac{\beta}{M}\}$

$I=[x_0-h;\ x_0+h]$

Tfh.: $\exists$ olyan $L\ge 0$: $\|f(x;y)-f(x;z)\|\le L\|y-z\| \quad \forall (x,y);(x,y)\in Q$

Ekkor pontosan egy olyan $\varphi: J\to\mathbb{R}^n$ diff-ható fgv van:

$(x,\varphi(x))\in Q$, ha $x\in J$; $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$ $x\in J$ és $\varphi(x_0)=y_0$,

$\varphi: J\to\mathbb{R}^n$ egyetlen megoldása

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & y'(x)=f(x;y(x))\\ (2) & y(x_0)=y_0\end{array}\right\}\text{-nak.}$$

T.: Lokális egzisztencia és unicitás tétel:

! $f:D\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (D nyílt), f folytonos, f a második változójában eleget tesz a lokális Lipschitz-feltételnek D-n. Ekkor $\forall (x_0,y_0)\in D$-hez $\exists\ \delta>0$: az (1)-(2) Cauchy-feladatnak pontosan egy $\varphi:]x_0-\delta;x_0+\delta[\ \to\mathbb{R}^n$ megoldása van.

T.: Globális egzisztencia és unicitás tétel:

! $J\subset\mathbb{R}$, $f: J\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ folytonos fgv.

Tfh.: $\exists\ L: J\to[0,\infty[$ folyt fgv: $\|f(x;y)-f(x,z)\|\le L(x)\|y-z\|$ $\forall (x,y);(x,z)\in J\times\mathbb{R}^n$. Ekkor $\forall (x_0,y_0)\in J\times\mathbb{R}^n$ után (1)-(2)-nek pontosan egy $\varphi: J\to\mathbb{R}^n$ megoldása van.

T.: Peano-féle egzisztencia tétel:

! $\emptyset\ne D\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ nyílt, $f:D\to\mathbb{R}$ folyt. Ekkor $\forall (x_0,y_0)\in D$ esetén az (1)-(2) Cauchy-feladatnak van megoldása

A lineáris diffe rendszerek és diffe-k elmélete:

$n \in \mathbb{N}_1 \quad J \subset \mathbb{R}$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \; f : J \to \mathbb{R}$ valós értékű folyt. fgv-ek.

(1) $\quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = f(x)$ $\quad$ n-edrendű lineáris

diffe. általános alakja.

(2) $\quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = 0$ $\quad$ homogén egyenlet.

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \ldots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \qquad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \qquad x \in J$$