6. tétel

D.: ! $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow D \subset [a,b]$ véges halmazt az $[a,b]$ egy beosztásának nevezzük, ha $a \in D$, $b \in D$.

(Továbbiakban az $[a,b]$ beosztásainak halmazát $\mathcal{D}([a,b])$-vel jelöljük.)

D.: A $\langle D_n \rangle \mathbb{N} \to \mathcal{D}([a,b])$ beosztássorozatot normális beosztássorozatnak nev, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$.

D.: ! $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korl., $\Rightarrow$ $\underline{\int_a^b} f = \sup \{ s(f,D) \mid D \in \mathcal{D}([a,b]) \}$, $\overline{\int_a^b} F = \inf \{ S(f,D) \mid D \in \mathcal{D}([a,b]) \}$ valós számot alsó ill. felső Darboux integrálnak nev.

D.: ! $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Akkor mondjuk, h f Riemann-szerint integrálható az $[a,b]$-n, ha f Darboux-féle alsó és felső integrálja egyenlő. jele: $\int_a^b f(x)\,dx$.

T.: (Darboux-tétel)

! $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korl. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)$ úh $\forall D \in \mathcal{D}([a,b])$ $\wedge$ $\|D\| < \delta(\varepsilon)$ esetén $0 \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - s(f,D) < \varepsilon$ ill.

$$0 \leq S(f,D) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon.$$

T.: ! $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korl. $\wedge$ $\langle D_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathcal{D}([a,b])$ norm. beosztássorozat $\Rightarrow$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f, D_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

($\omega(f; D_n) = S(f,D) - s(f,D)$ oszcillációs összeg)

4) $\exists \langle \sigma_1(f, D_n) \rangle$ úh $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_1(f, D_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

$\exists \langle \sigma_2(f, D_n) \rangle$ úh $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_2(f, D_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

I: ! $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl.

Az f fgv integrálható $\Leftrightarrow$, ha $\forall$ $\langle D_n\rangle : \mathbb{N}\to\mathcal{D}([a,b])$

norm. beosztássorozat esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f, D_n) = 0$.

I: ! $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl.

Az f Riemann-sz. integrálható $\Leftrightarrow$ ha $\forall\langle D_n\rangle : \mathbb{N}\to\mathbb{R}$

norm. beosztássorozathoz tartozó $\langle\sigma(f, D_n)\rangle$ "integrálközelítő"

összegsorozat konvergens.

T: Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow$ Riemann-sz. integrálható

Ha -"- folytonos $\Rightarrow$ -"-

T: Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann-sz. integrálható $\Rightarrow$

f az $[a,b]$ minden zárt részintervallumán integrálható.

T: (Az integrál intervallum feletti additivitása)

! $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\wedge$ $c\in(a,b)$.

Ha f Riemann-sz. integrálható $[a,c]$-n $\wedge$ $[c,b]$-n $\Rightarrow$

$[a,b]$-n is integrálható $\wedge$ $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

T: Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. $\wedge$ $\forall$ $c,d\in(a,b)$, $c<d$ esetén f

Riemann-integrálható $[c,d]$-n $\Rightarrow$ $[a,b]$-n is integrálható.

T: ! $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. $\wedge$ $f(x)=g(x)$ véges sok $x\in[a,b]$ kivételével.

Ha f R-integrálható $\Rightarrow$ g is az $\wedge$ $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b g$.

D: ! $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-integrálható. Az $F:[a,b]\to\mathbb{R}$,

$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ fgv-t f integrálfgv-ének nevezzük.

T: Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-int., $\Rightarrow$ az integrálfgv-e folytonos.

$\underline{T}$: ! $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-int, F az f integrálfgv-e $\wedge$ $x_0\in[a,b]$. Ha f folytonos x_0-ban $\Rightarrow$ F diff-ható x_0-ban $\wedge$ $F'(x_0)=f(x_0)$.

$\underline{D}$: ! $H\subset\mathbb{R}$, $f:H\to\mathbb{R}$ $\wedge$ $H_1\subset H$. Ha $F:H_1\to\mathbb{R}$ diff-ható $\wedge$ $F'(x)=f(x)$ $(x\in H_1)$ $\Rightarrow$ F-et a f primitív fgv-ének v. hatlan integráljának nev. $\int f$ -> jele

$\underline{T}$: (Newton - Leibniz - formula)

! $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-int, $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ az (a,b)-n primitív fgv-e f-nek $\wedge$ F folyt $[a,b]$-n $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

$\underline{T}$: (Parciális int. tétele)

Ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonosan diff-ható fgv-ek $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

$\underline{D}$: ! $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ folyt. $\wedge$ $f(x)\le g(x)$ $\forall x\in[a,b]$ esetén.

A $H:=\{(x,y)\mid a\le x\le b \wedge f(x)\le y\le g(x)\}\subset\mathbb{R}^2$ síkidom területe:

$T(H)=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$

$\underline{D}$: ! $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folyt fgv $\wedge$ $f(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,b]$ esetén.

A $H:=\{(x,y,z)\mid a\le x\le b;\ y^2+z^2\le f^2(x)\}\subset\mathbb{R}^3$ forgástest térfogata:

$V(H):=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.

$\underline{D}$: ! $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonosan diff-ható fgv $\wedge$ $f(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,b]$ esetén. A $H:=\{(x,y,z)\mid a\le x\le b \wedge y^2+z^2\le f^2(x)\}\subset\mathbb{R}^3$ forgásfelület felszíne: $F(H):=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.