10. tétel

Klasszikus valószínűségi mező:

D.: Esemény axiómák

Legyen Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ részhalmaza az Ω hatványhalmazának

és teljesülnek a következők:

a) $\Omega \in \mathcal{A}$

b) ha $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

c) ha $A_i \in \mathcal{A}$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Ekkor az $\mathcal{A}$-t σ-algebrának, elemeit pedig eseményeknek nevezzük.

D.: Kolmogorov-féle valószínűségi axiómák

Legyen Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája

és $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ olyan fgv, melyre teljesülnek a következők:

a) $\forall A \in \mathcal{A}$ esetén $P(A) \geq 0$

b) $P(\Omega) = 1$

c) (Teljes additivitás) ha $A_i \in \mathcal{A}$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ esetén és $A_i A_j = \emptyset$ $\forall i,j \in \mathbb{Z}^+$,

$i \neq j$ esetén $\Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ teljesül. Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-t Kolmogorov-

féle valószínűségi mezőnek, P-t valószínűségnek nevezzük.

D.: Legyen $\Omega := \{\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n\}$ és $\mathcal{A}$ az Ω hatványhalmaza. Ha a P

valószínűségre fennáll, hogy $P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$ $(\forall i,j \in \{1,2 \dots n\}) \Rightarrow$ az

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$-t klasszikus valószínűségi mezőnek nevezzük.

T.: Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ klasszikus valószínűségi mező, $A \in \mathcal{A}$, az Ω elemeinek a

száma n és az A elemeinek a száma $k \Rightarrow P(A) = \frac{k}{n}$

D.: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{A}$ és $P(B) \neq 0$. Ekkor a

$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$ hányadost az A esemény B-re vonatkozó feltételes

valószínűségének nevezzük.

Függetlenség:

D.: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy az A esemény független B-től, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Köv.: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és ebben A, B tetszőleges események. Ekkor $P(B) \neq 0$ esetén az A $\Leftrightarrow$ független B-től, ha $P(A|B) = P(A)$.

T.: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és $A, B \in \mathcal{A}$ függetlenek. A és B pontosan akkor függetlenek, ha A és $\overline{B}$ is függetlenek.

Teljes valószínűség tétele:

T.: (Szorzás tétel) Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, továbbá $A, B \in \mathcal{A}$ és $P(B) \neq 0 \Rightarrow$ $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$ teljesül.

T.: (Teljes valószínűség tétele) Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $\{B_i \in \mathcal{A} : i \in \mathbb{Z}^+\}$ teljes eseményrendszer és $P(B_i) \neq 0$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}$ esetén teljesül:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i) P(B_i)$$

Bayes-tétel:

T.: Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező. Ha $\{B_i \in \mathcal{A} : i \in \mathbb{Z}^+\}$ teljes eseményrendszer és $P(B_i) \neq 0$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ esetén, továbbá, ha $A \in \mathcal{A}$ és $P(A) \neq 0 \Rightarrow$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ esetén

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) P(B_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A|B_k) P(B_k)}$$

Eloszlásfüggvény:

D.: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és ξ az Ω-n értelmezett valós értékű függvény. Ha $\{\xi < x\} \in \mathcal{A}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\Rightarrow$ a ξ függvényt valószínűségi változónak nevezzük.

D.: Ha ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben értelmezett diszkrét valószínűségi változó $\Rightarrow$ a $\langle p_k \rangle : R_\xi \to [0;1]$, $p_k := P(\xi = k)$ sorozatot a ξ eloszlásának nevezzük.

D: Ha ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben értelmezett valószínűségi változó $\Rightarrow$ az $F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ függvényt a ξ eloszlásfüggvényének nevezzük.

Várható érték:

D: Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó.

- Ha ξ diszkrét és $R_\xi = \{x_1, x_2 \dots\}$ továbbá a $\sum_i p_i |x_i| < \infty$, ahol $p_i := P(\xi = x_i)$ akkor az $E(\xi) := \sum_i p_i x_i$ számot a ξ várható értékének nevezzük. Ha az abszolút konvergencia nem teljesül $\Rightarrow$ ξ-nek $\nexists$ várható értéke.
- Abszolút folytonos ξ esetében, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)\,dx < \infty \Rightarrow$ az $E(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx$ számot a ξ várható értékének nevezzük. Ellenkező esetben ξ-nek $\nexists$ várható értéke.

Szórás:

D: Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó, melynek $\exists$ várható értéke. Ekkor ξ szórása: $D(\xi) = \sqrt{E((\xi - E(\xi))^2)}$, szórásnégyzete pedig: $D^2(\xi) := E((\xi - E(\xi))^2)$, feltéve, hogy létezik ez a várható érték.