9. tétel

Konvex halmazok, konvex burok:

D: Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz affin halmaz, ha ∀ két pontjával együtt a rájuk illeszkedő egyenest is tartalmazza.

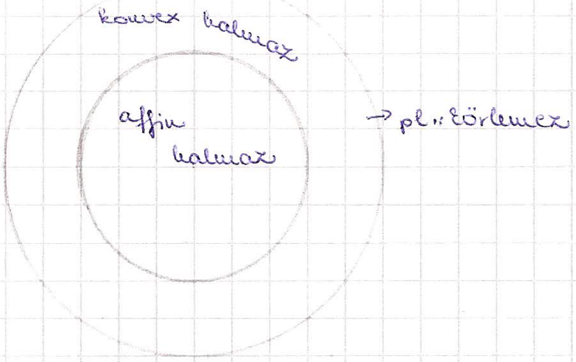
$K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz konvex halmaz, ha ∀ két pontjával együtt az általuk meghatározott szakaszt is tartalmazza.

T: Egy A/K halmaz affin/konvex $\Leftrightarrow$, ha zárt az affin/konvex kombináció képzésére nézve.

Megj.: • Egy lineáris kombinációt affin kombinációnak nevezünk, ha: $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$.

• Egy lineáris kombinációt konvex kombinációnak nevezünk, ha: $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 \wedge$

$\wedge \ \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$.



L: Affin/konvex halmazok metszete affin/konvex halmaz.

Köv: S affin/konvex burka S-et tartalmazó affin/konvex halmazok metszete.

jele: aff S ; conv S.

T: aff S / conv S = S-beli elemek összes affin/konvex kombinációinak halmaza.

Carathéodory-tétel:

conv S = S-beli affin független elemek konvex kombinációinak halmazával.

Helly tétel és alkalmazásai:

L: Radon-lemma

! $S=\{v_1, v_2 \cdots v_m\} \in \mathbb{R}^n$, $m \geq n+2 \Rightarrow$ van olyan $S=S_1 \cup S_2$ felbontás, hogy $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, de $\text{conv}\, S_1 \cap \text{conv}\, S_2 \neq \emptyset$.

T: Helly-tétel

! $B_1 \dots B_m \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmazok, $m \geq n+1$ és tegyük fel, hogy $\forall$ $(n+1)$ db halmaznak van közös pontja $\Rightarrow$ az összesnek is van.

Köv.: Jung-tétel

! $p_1 \cdots p_m \in \mathbb{R}^2$ (sík pontjai) ; $d = \max\{d(p_i, p_j) \mid i,j = 1, \dots m\}$

$p_1, \dots, p_m$ pontok lefedhetők $\frac{d}{\sqrt{3}}$ sugarú körlappal.

T: Blaschke-tétel (A sík konvex kompakt részhalmazai közel centrálszimmetrikusak)

A sík konvex kompakt halmazának van olyan belső pontja, mely mindig a rá illeszkedő húrok középső harmadába esik.

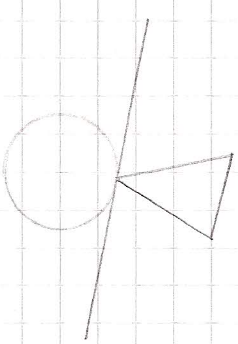
Elválasztási tételek:

I. Síkban

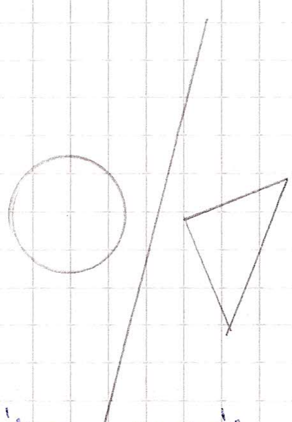
a) egyenessel

D: • $A, B \subset \mathbb{R}^2$, $\ell \subset \mathbb{R}^2$ egyenes; ℓ szeparálja A és B-t, ha A és B különböző félsíkban vannak.

• $A, B \subset \mathbb{R}^2$, $\ell \subset \mathbb{R}^2$ egyenes; ℓ élesen szeparálja A és B-t, ha A és B különböző nyílt félsíkban vannak.



szeparál

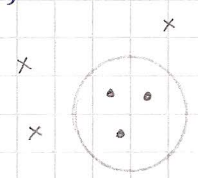


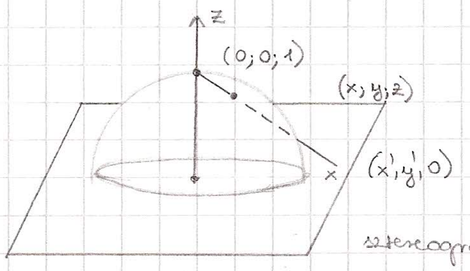
élesen szeparál

Sejtés: ℓ létezése $\Leftrightarrow$ $\text{conv}\, A \cap \text{conv}\, B = \emptyset$

T: $A, B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt halmazok élesen szeparálhatók egyenessel $\Leftrightarrow$ ha $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B = \emptyset$.

b, Körre:





sztereografikus projekció

VI. Támaszegyenesek

$A \subset \mathbb{R}^2$ konvex, kompakt halmaz, $x \in A$ határának

(Olyan egyenest keresünk, amely az A halmazt az egyik félsíkba zárja.)

Felismerés: 1) konvex halmaz $\forall$ határolópontjában van támaszegyenes.
2) Ha egy kétdimenziós kompakt halmaz $\forall$ határpontjában van támaszegyenes $\Rightarrow$ konvex

Konvex poliéderek és politópok:

D: ! $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz. $x \in A$ extremális pontja, ha $A \setminus \{x\}$ is konvex.

T: Krein-Milman tétel

Minden A konvex, kompakt halmaz = az extremális pontjainak konvex burkával. $A = \operatorname{conv} \operatorname{Ext} A$

D: Véges sok $\mathbb{R}^n$-beli pont konvex burkát konvex politópnak hívjuk.

$\mathbb{R}^2$: kétdimenziós konvex politópjai = konvex sokszöglemez v. konvex poligon

$\mathbb{R}^3$: háromdimenziós –"– = konvex poliéder

T: ! A $\operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$

$\underbrace{\operatorname{Ext} A}$ $\subset \{x_1, \dots, x_m\}$

A csúcsai (Krein-Milman tétel szerint) : $A = \operatorname{conv} \operatorname{Ext} A$.

Euler-tétel:

T.: ∀ konvex poliéderre: $c - e + l = 2$

$$\underbrace{\text{csúcsok} \quad \text{élek} \quad \text{lapok}}_{\text{száma}}$$

D.: Szabályos poliéder: olyan poliéder, melynek lapjai szabályos p-szögek és minden lapszöge egyenlő.

Szabályos test:

	c	e	l
• tetraéder (3;3)	4	6	4
• hexaéder (4;3)	8	12	6
• oktaéder (3;4)	6	12	8
• dodekaéder (5;3)	20	30	12
• ikozaéder (3;5)	12	30	20