Tétel: Két sík szöge a normálisaik szögével egyenlő.

Definíció: ***Két síkot merőlegesnek*** nevezünk, ha szögük 90°-os.

Tétel: Két sík akkor és csak akkor merőleges, ha egyik sík tartalmazza a másik sík valamelyik normálisát.

Definíció: ***Egyenes és sík szögén*** az egyenesnek és a síkon lévő merőleges vetületének szögét értjük.

Tétel: Egyenes és sík szöge a sík normálisának és az egyenesnek a pótszögével egyenlő.

Bizonyítás: Az a egyenes A döféspontjában az α sík normálisa legyen n, és P merőleges vetülete α-n P'. PP' és n párhuzamosak, tehát egy síkban vannak. Így PAP' $\sphericalangle$ = 90°- (nAP) $\sphericalangle$. Ha az a egyenes párhuzamos α-val, akkor szögük 0, az n normális és az a egyenes szöge 90°, tehát ennek pótszöge 0.

Definíció: Két térelem egy-egy pontját összekötő egyenesét a két térelem transzverzálisának nevezzük. Ha ez merőleges mindkét térelemre, akkor normáltranszverzálisnak mondjuk. A transzverzálisnak a két térelemen lévő pontokhoz tartozó szakaszát transzverzálisszakasznak, normáltranszverzális esetében normáltranszverzális-szakasznak nevezzük.

Tétel: Két kitérő egyenesnek egyetlen normáltranszverzálisa van, és a normáltranszverzális-szakasz minden más transzverzálisszakasznál rövidebb.

Térelemek távolsága

Egy animációban mutatjuk be pont és egyenes és pont és sík távolságának definícióját. A felső síkra közelítve az egeret, az önmagával párhuzamosan elmozdul.

<u>Pont és sík</u> távolsága megkapható, ha a pontot merőlegesen levetítjük a síkra. A vetület és az eredeti pont távolsága a pont és sík távolsága.

<u>Egyenes és vele párhuzamos sík távolsága,</u> ha az egyenes tetszőleges pontját levetítjük a síkra. A kiválasztott pont és vetületének távolsága a keresett távolság.

Kitérő egyenesek távolsága - Példák

A definíciót egy kocka éleinek, lap- és testátlóinak távolságán keresztül mutatjuk be. Az egyik egyenes bármelyik pontján át párhuzamost húzunk az eredeti egyenessel, amely meghatároz egy síkot. Az eredeti egyenes és a kapott sík távolsága a keresett távolság.

<u>1.</u> Ebben a példában egy kocka 2 kitérő élének távolságát kapjuk meg az előbb leírt módszer alapján. Ha ismételten kattintunk a kocka fölé vitt egérrel, akor megkapjuk a síkot, majd a távolságot.

<u>2.</u> Itt a kocka egy élének és lapátlójának távolságát kaphatjuk meg a fent leírt módon.

3. A kocka élének és vele kitérő helyzetű testátlójának távolságát mutatja be az ábra az előbbieknek megfelelően.

Definíció: ***Pont és sík távolságá*n** a pontból a síkra húzott merőleges szakasz hosszát értjük.

Tétel: Ha egy egyenes párhuzamos egy síkkal, akkor az egyenesnek bármely vele párhuzamos síkbeli egyenestől mért távolsága nagyobb, mint az egyenes és merőleges vetülete közötti távolság.

Bizonyítás: Jelöljük a síkot α-val, a vele párhuzamos egyenest a-val. AZ a merőleges vetülete α-n legyen a', és a-val párhuzamos, tetszőleges α-beli egyenes legyen b'. Vegyünk fel a-n egy A pontot. Ennek α-n lévő merőleges vetületét jelöljük A1-vel és a b' egyenesen lévő merőleges vetületét B1-vel. Mivel AA1 merőleges az α síkra, így merőleges a talpponton átmenő minden egyenesre, tehát B'A'-re is. AZ AA'B' derékszögű háromszögből AB'>AA'.

Definíció: ***Párhuzamos egyenes és sík távolságá*n** az egyenesnek és a síkon lévő merőleges vetületének távolságát értjük.

Tétel: Párhuzamos síkoknál az egyik sík bármely pontjának és a másik síkon lévő merőleges vetületének távolsága ugyanakkora.

Definíció: ***Két párhuzamos sík távolságá*n** a mindkettőre merőleges szakasz hosszát értjük, ahol a szakasz végpontjai a síkokra illeszkednek.

Tétel: Eltolásnál a tér bármely pontjának és képének távolsága a két szimmetriasík távolságának a kétszerese.

Következmény: Az eltolás irányával párhuzamos egyenesek és síkok invariánsok.

Tétel: Az eltolás egyenest és síkot vele párhuzamos egyenesbe és síkba visz át, ha azok nem invariánsak.

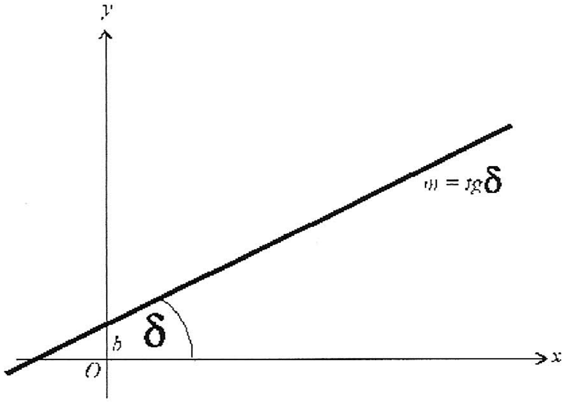
Definíció: ***Kitérő egyenesek távolságá*n** a normáltranszverzális-szakaszuk hosszát értjük.

Következmény: Két térelem távolságán a transzverzálisszakaszuk hosszának minimumát értjük.

Analitkus geometria síkban és térben

Az egyenes egyenletesíkban

Minden, a koordinátákban elsõfokú egyenlet egyenest határoz meg, és megfordítva, bármely egyenes egyenlete elsõfokú egyenlet.
Az egyenes egyenletének általános alakja:
$Ax + By + C = 0.$
Ha $A = 0$, akkor az egyenes párhuzamos az Ox tengellyel; ha $B = 0$, akkor párhuzamos az Oy tengellyel; ha pedig $C = 0$, akkor áthalad a kezdõponton.



Az egyenes egyenlete előállítható

$y = mx + b$

alakban; itt m - az egyenes irányhatározója, meredeksége - tg δ-val egyenlő, ahol δ az Ox tengely pozitív iránya és az egyenes által bezárt szög, b pedig (előjelét is figyelembe véve) az y tengelynek az egyenes által lemetszett szakasza.

Adott $P_1(x_1, y_1)$ ponton átmenő egyenes egyenlete:

$y - y_1 = m(x - x_1)$.

Két adott ponton, $P_1(x_1, y_1)$-en és $P_2(x_2, y_2)$-n átmenő egyenes egyenlete:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Ha az egyenes az Ox tengelyről a, az Oy tengelyről b szakaszt metsz le (a szakaszok előjelét is figyelembe véve), akkor az egyenes egyenletének tengelymetszetes alakját írhatjuk fel:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Az egyenes egyenletének normálalakja:

$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$,

ahol p az egyenesnek a kezdőponttól való távolsága, α pedig a kezdőpontból az egyenesre bocsátott merőlegesnek az Ox tengellyel bezárt szöge. Az egyenes egyenletének általános alakjából a normálalak oly módon kapható, hogy az általános alakot megszorozzuk a normáló tényezővel:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

(μ előjelének C előjelével ellentétesnek kell lennie.)

Egyenes egyenlete polárkoordinátákban (p az egyenesnek a pólustól való távolsága, α a sarktengely és a pólusból az egyenesre bocsátott merőleges által bezárt szög):

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

172. ÁBRA

Három pont akkor fekszik egy egyenesen, ha

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Egyenesek metszéspontja

Két egyenes metszéspontjának x_0, y_0 koordinátáit megkapjuk, ha a két egyenes egyenletei által alkotott egyenletrendszert megoldjuk. Ha az egyenesek egyenletei $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ és $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, akkor

$$x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad y_0 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Ha $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, akkor a két egyenes párhuzamos, ha pedig emellett $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, akkor a két egyenes egybeesik.

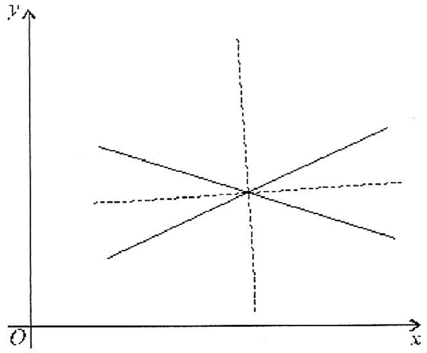
Három egyenes akkor metszi egymást egy pontban, ha

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

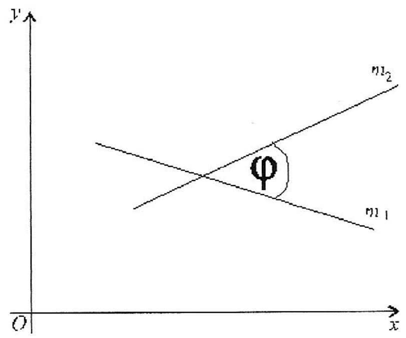
Azoknak az egyeneseknek az egyenlete, amelyek két adott egyenes metszéspontján átmennek (sugársor egyenlete)

$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$

Ha λ $-\infty$-tõl $+\infty$-ig változik, az egyenlet elõállítja a sugársor minden egyenesét. Ha a két egyenes egyenlete normálalakban van adva, akkor a $\lambda = \pm 1$ érték a két egyenes szögfelezõinek egyenletét adják.



Két egyenes által bezárt szög



$$\text{tg}\ \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2},$$

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{1 + m_1m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{m_2 - m_1}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}.$$

Két egyenes akkor párhuzamos, ha $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, vagy $m_1 = m_2$.

Két egyenes akkor merõleges egymásra, ha $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, vagy $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

<u>Egyenes a térben</u>

Egyenes egyenletei

Az egyenes általános egyenletrendszere:

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,
$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$,

vagy vektoralakban:

$\underline{N}_1\underline{r} + D_1 = 0$,
$\underline{N}_2\underline{r} + D_2 = 0$,

ahol $\underline{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ és $\underline{N}_2(A_2, B_2, C_2)$.
Kanonikus alak: adott $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ponton átmenõ, adott $R(l, m, n)$ irányvektorú egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{- z_1}{n},$$

vektoralakban: $(\underline{r} - \underline{r}_1)\times\underline{R} = 0$, vagy

$x = x_1 + lt,\ y = y_1 + mt,\ z = z_1 + nt,$

vektoralakban: $\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{R}t$.
Ezt az alakot az általános egyenletrendszerbõl az

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\ m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\ n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

képletek, vektoralakban pedig az $\underline{R} = \underline{N}_1\times\underline{N}_2$ képlet segítségével állíthatjuk elõ.
A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adott pontokon átmenõ egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

vektoralakban: $(\underline{r} - \underline{r}_1)\times(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) = 0$.
Adott $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ponton átmenõ, adott síkra merõleges egyenes egyenlete, ha a sík egyenlete $Ax + By + Cz + D = 0$, illetve vektoralakban $\underline{rN} + D = 0$:

$$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{-z_1}{C},$$

vektoralakban: $(\underline{r} - \underline{r}_1)\times\underline{N} = 0$.

Két egyenes közötti távolság

Ha az egyenesek egyenletei az

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{-z_1}{n_1},$$
$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{-z_2}{n_2}$$

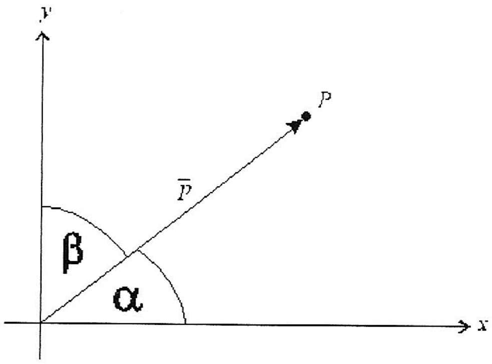
kanonikus alakban vannak adva, a közöttük levõ távolság:

$$\delta = \frac{\pm\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Az e képlet számlálójában levõ determináns eltûnése a két térbeli egyenes metszésének kritériuma.

Vektorok a síkon

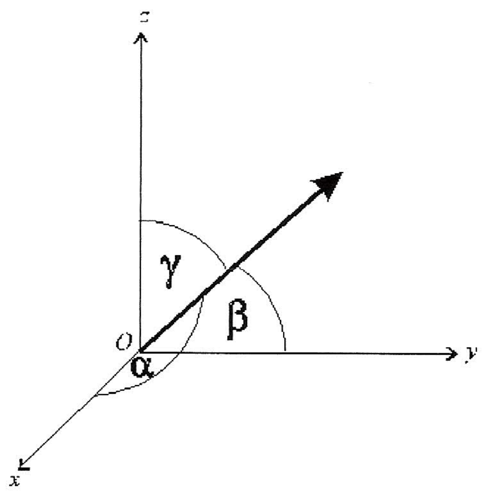
A koordinátarendszer origójából a P pontba mutató vektort helyvektornak nevezzük. A sík minden pontja kölcsönösen egyértelmûen megfeleltethetõ egy helyvektornak, ezért a végpontja koordinátáival jellemezhetjük a vektort is: $\underline{p} = (x, y)$. A vektor és az egyes tengelyek által bezárt szögeket irányszögeknek, ezen szögek koszinuszait iránykoszinuszoknak hívjuk.



A vektor hosszát az iránykoszinusszal megszorozva a vektor egyes tengelyekre eső merőleges vetületeit kapjuk, ezek a vektorhoz tartozó pont koordinátái. $x = |\underline{p}| \cos \alpha$, $y = |\underline{p}| \cos \beta$.
A sík egy bázisát alkotják, és ezért kitüntetett szerep jut az $\underline{i} = (1, 0)$ és a $\underline{j} = (0, 1)$ egységvektoroknak, ezek úgynevezett bázisvektorok. Bármely $P(x, y)$ ponthoz tartozó helyvektor felírható ezek lineáris kombinációjaként: $\underline{p} = \underline{i}x + \underline{j}y$.

Vektorok a térben

Minden $P(x, y, z)$ pontot egyértelműen megadhatunk egy $\underline{p} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ helyvektorral, amelynek jelölése: $\underline{p}(x, y, z)$.
Az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ alapvektorok (bázisvektorok) rendre a koordinátarendszer x-, y-, z tengelyei irányába mutató egységvektorok.



A vektor és a koordinátatengelyek által bezárt szögek az úgynevezett irányszögek, ezek koszinuszai az iránykoszinuszok:

$l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta$, $n = \cos \gamma$. $(l^2 + m^2 + n^2 = 1)$

Az l_1, m_1, n_1 illetve l_2, m_2, n_2 iránykoszinuszokhoz tartozó vektorok egymással bezárt szögére érvényes a $\cos \varphi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$ összefüggés. Ha $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$, akkor a két irány merőleges egymásra.