8. tétel

Euklideszi tér. Egyenesek, síkok. Térelemek távolsága, szöge. Analitikus geometria síkban és térben.

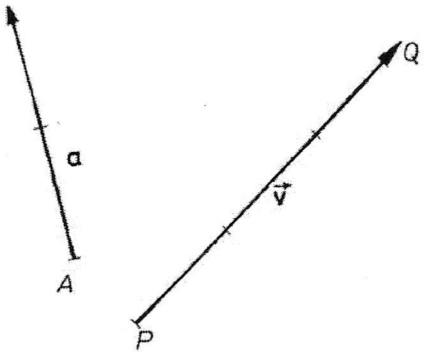
Euklideszi térnek nevezzük azon T számtest, vagy integritási tartomány feletti vektortereket, melyekben a vektorterek axiómáin felül értelmezve van, egy ún. skaláris szorzat (euklideszi norma).

Definíció: Az irányított szakaszokat *vektorok*nak nevezzük.

Jelölésük: $\vec{AB}$=a , $\vec{PQ}=\vec{v}$.

Definíció: A vektor hosszát a vektor *abszolútértéké*nek nevezzük.

Jelölése: $|\vec{AB}| = |a| = 2$; $|\vec{PQ}| = |v| = 3$.



Definíció: Ha két vektorhoz található olyan egyenes, amely mindkettővel párhuzamos, akkor ezeket *párhuzamos vektoroknak* vagy *egyállású vektoroknak* nevezzük.

A *párhuzamos vektorok* kifejezés mellett feleslegesnek tűnhet az egyállású vektor elnevezés. Mindkettő ugyanazt fejezi ki. A vektorok állásáról, egyállású vektorokról mégis gyakran beszélünk, mert ez sokszor egyszerűsíti a mondanivalónk megfogalmazását.

Definíció: Két vektort *egyenlő*nek tekintünk, ha abszolútértékük egyenlő, párhuzamosak (egyállásúak) és azonos irányításúak.

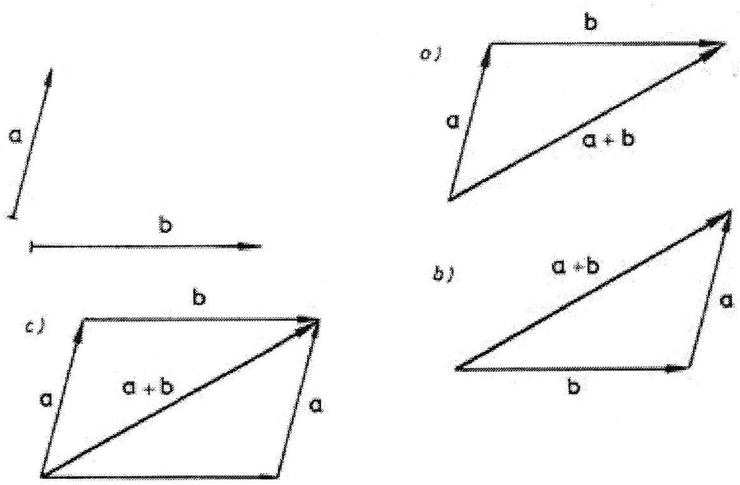
Ha két vektor abszolútértéke egyenlő, párhuzamosak (egyállásúak) és ellentétes irányúak, akkor a két vektort *egymás ellentettjé*nek nevezzük. Az a vektor ellentettje –a, az $\vec{PQ}$ ellentettje $-\vec{PQ}$ vagy $\vec{QP}$.

Definíció: Azt a vektort, amelynek abszolútértéke 0, *nullvektor*nak nevezzük. Jele: 0.

A 0 iránya tetszőleges.

Definíció: Egy vektor megadásánál megadjuk a vektor abszolútértékét, állását, irányát.

Adott az *a* és a *b* vektor. Egy pontból kiindulva felmérjük az egyik vektort, majd ennek végpontjába a másik vektort. A *két vektor összege* az a vektor, amely az első vektor kezdőpontjából a másik vektor végpontjába mutat.



Az ábra *c)* részén az *a* és a *b* vektort mindkét lehetséges sorrendben felmértük. Ekkor kialakult egy paralelogramma. Az $a + b$ vektor a *P* pontból a paralelogramma átellenes csúcsába mutató vektor. Ez független az *a*, *b* vektorok felmérési sorrendjétől.

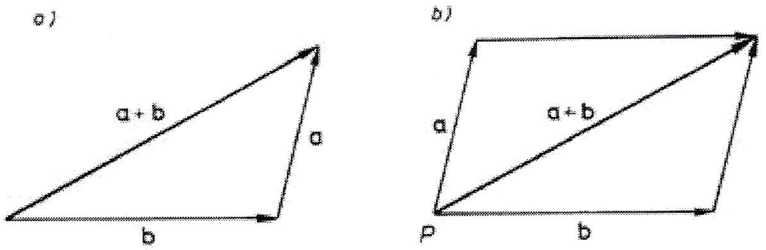
Műveletek vektorokkal :

- Két vektor *összeadása kommutatív* művelet: $a + b = b + a$.

Két vektor összegét megszerkeszthetjük:

a) a definíció alapján, a vektorok egymás utáni felmérésével. Ekkor az összegvektor az első vektor kezdőpontjából a második vektor végpontjába mutató vektor.

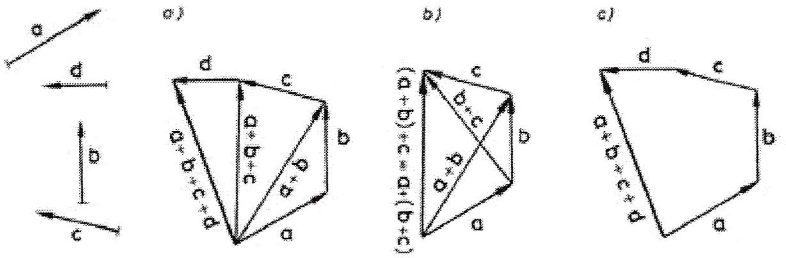
b) paralelogramma segítségével, ha a vektorok nem egyállásúak. Ekkor egy közös kezdőpontból felmérjük mindkét vektort. Ezek segítségével paralelogrammát szerkesztünk. Ennek a közös pontból induló átlója (irányítva) a két vektor összege. (Ez a fizikában szokásos módszer. Egy fizikai probléma azt is meghatározhatja, hogy hol lehet a kiinduló *P* pont. A matematikai definíció erre a pontra semmiféle kikötést nem kíván.)



Több vektor összeadása esetén először két vektort összegezünk, majd az összeghez hozzáadunk egy újabb vektort stb.

Több vektor összege független az összeadandók csoportosításától.

- A vektorok *összeadása asszociatív* művelet: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

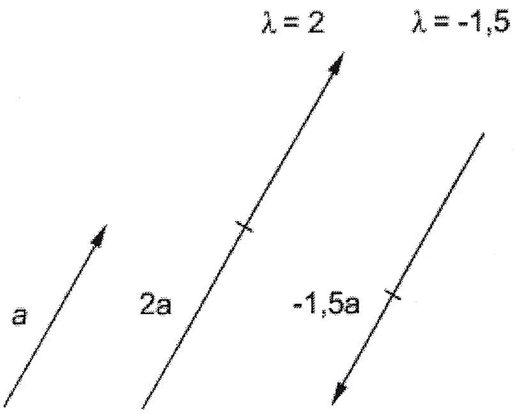


Több vektor összeadása esetén a vektorok egymás utáni felmérésével, a vektorok „egymáshoz fűzésével" szerkeszthetjük meg az összegvektort.

- Vektor *szorzása egy számmal*:

Ha $a \neq 0$, akkor az *a* vektor és a λ szám szorzata olyan vektor, amelynek abszolútértéke $|\lambda|\cdot|a|$, és iránya $0<\lambda$ esetén az a vektor iránya, $\lambda<0$ esetén az *a* vektor irányával ellentétes, $\lambda=0$ esetén $\lambda a=0$, iránya tetszőleges.

Ha $a=0$, akkor $\lambda a=0$.



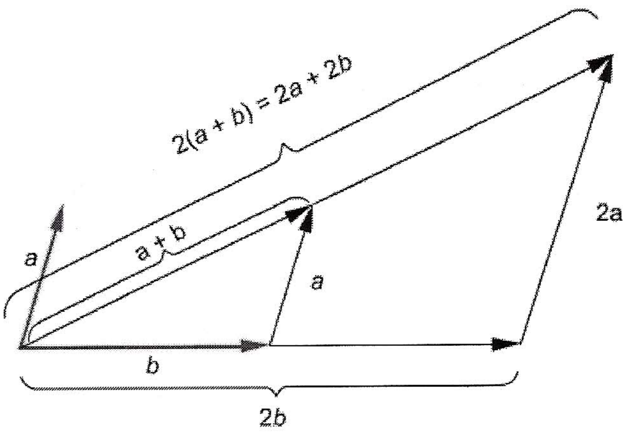
A skalárral történő szorzás tulajdonságai:

a) $\alpha a+\beta a=(\alpha+\beta)a$;

b) $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$,

c) $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$.

Ha vektorokkal összeadást, kivonást és számmal történő szorzást végzünk, akkor a számokra felírt betűs kifejezéseknél megismert módon dolgozhatunk.



Definíció: Két vektor *skaláris szorzatán* a két vektor abszolútértékének és hajlásszögük koszinuszának szorzatát értjük.

A két vektor legyen a és b, hajlásszögük. φ $(0 \le \varphi \le 180°)$.

A két vektor skaláris szorzatának jelölése: ab.

$ab = |a| \cdot |b| \cos \varphi$.

A skaláris szorzat két tényezőjét felcserélhetjük: $ab = ba$.

Ez következik a definícióból, mert mindkét esetben ugyanannak a három számnak kell a szorzatát vennünk. Két vektor skaláris szorzása tehát kommutatív tulajdonságú.

Bebizonyítható, hogy bármely a, b, c vektorokra fennáll az

$(a + b)c = ac + bc$ azonosság, azaz a skaláris szorzás az összeadásra nézve disztributív.

Tulajdonság: Skaláris szorzatokra fennáll a $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ tulajdonság is. Skaláris szorzatot egy valós számmal úgy is szorozhatunk, hogy a számmal az egyik tényezőjét szorozzuk.

Definíció: Egy vektor önmagával való skaláris szorzatát a *vektor négyzeté*nek nevezzük.

A vektor négyzeténél (ha a vektor nem 0) a két azonos vektor hajlásszöge 0°.

Ezért $a^2 = a \cdot a = |a| \cdot |a| \cos 0° = |a|^2$.

A szokásos $|a| = a$ jelölés miatt $a^2 = a^2$. A 0 négyzete: $0^2 = 0 \cdot 0 \cos \varphi = 0$.

Összefoglalva: egy vektor négyzete egyenlő a hosszúságának a négyzetével.

Egy nem zérusvektor abszolútértéke pozitív szám. Ezért két nem zérusvektor skaláris szorzata a cos φ előjelétől függ.

Állítás : Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor pozitív, ha egyik sem zérusvektor, és hajlásszögük: $0° \le \varphi < 90°$.

Állítás : Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor negatív, ha egyik sem zérusvektor, és hajlásszögük: $90° < \varphi \le 180°$.

Tétel: Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy ha két vektor merőleges egymásra, akkor skaláris szorzatuk 0, mert ekkor $\varphi = 90°$, és $\cos \varphi = 0$. (Például a koordinátasík i és j egységvektora merőleges egymásra, ezért $i \cdot j = 0$.)

Megfordítva: ha két vektor skaláris szorzata 0, akkor vagy

a) a két vektor hajlásszöge 90°, azaz a két vektor merőleges egymásra, vagy

b) a vektorok között van zérusvektor. A zérusvektor iránya azonban tetszőleges, ezért most is mondhatjuk azt, hogy ez a két vektor merőleges egymásra.

Vektoriális szorzat

Definíció: A térbeli a, b vektorok *vektoriális szorzatá*nak nevezzük azt a vektort,

- amelynek hossza |a| |b| sin (a,b), ahol (a,b) szintén a két vektor hajlásszögét jelöli,
- amely merőleges az a, b vektorokra,
- amelynek iránya olyan, hogy a, b és a vektoriális szorzat jobbsodrású rendszert alkot.

Jelölése: a x b
Megállapíthatjuk, hogy axb az egymással nem párhuzamos a, b vektorok által kifeszített paralelogramma területvektora.

A definíció felhasználásával bizonyíthatók az alábbi összefüggések:

Tétel: $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$

A vektoriális szorzat tehát nem kommutatív, hanem alternáló művelet.

Tétel: Két vektor vektoriális szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor párhuzamos.

Bizonyítás: Ha a két vektor között nullvektor is szerepel, akkor helyes az állítás, mert a vektoriális szorzat 0, és a két vektort egymással párhuzamosnak mondjuk.
Nullvektortól különböző vektorok körében $\underline{a} \times \underline{b}$ a definíció szerint $\Leftrightarrow$ 0, ha sin (a,b) = 0. Ez pedig $\Leftrightarrow$ következik be a konvex (a,b) szögre, ha vagy 0°, vagy 180˘, ha tehát az a, b vektorok egymással párhuzamosak.

Tétel: Minden a, b vektorra és λ számra : $\lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda \underline{b})$

Tétel:

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$$
$$(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$$

disztributivitás

Minthogy az i, j, k alapvektorok egymásra páronként merőleges egységvektorok és jobbrendszert alkotnak, a vektoriális szorzat definíciója szerint:

$$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k} \qquad \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i} \qquad \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$$

Tétel: Az a(a_1, a_2, a_3) és b(b_1, b_2, b_3) vektorok vektoriális szorzata: $\underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

Bizonyítás: Ha az $\underline{a}\times\underline{b} = (a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k})\times(b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k})$ szorzatokat tagonkénti összeszorzással számítjuk ki, akkor: $\underline{a}\times\underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k}$ kapjuk. Ez ugyanannyi, mintha a tételben szereplő determinánst az első sor szerint kifejtjük.

Megjegyzés:

1. A skalárszorzatnál említettük, hogy két vektornak van skaláris szorzata. Ez lévén a helyzet a vektoriális szorzatnál is, a zárójelezésre ügyelni kell.

2. A vektoriális szorzás sem invertálható, azaz vektorral vektoriálisan sem lehet osztani. Igaz ugyan, hogy a szorzás "elem * elem = elem" típusú, de az inverz létezéséhez a szorzatnak az egységet kell szolgáltatni, márpedig a vektortérben végtelen sok egységvektor van.

Vegyes szorzat

Definíció: Az abc=(axb)$\cdot$c szorzatot *vegyesszorzat*nak nevezzük.

Tétel: Az a, b, c vektorok által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogata abc.

Bizonyítás: Parallelepipedon egyik lapja az a, b vektorok által kifeszített parallelogramma. Ennek területe $|\underline{a}\times\underline{b}|$. Az ehhez a laphoz tartozó magasságot a c vektornak e lapra merőleges összetevője adja. Ha tehát az e egységvektor ennek az összetevőnek az irányába mutat, akkor a magasság ec, a térfogat pedig $|V| = |a \times b|$ec

Az e vektor az $|a \times b|$ vektor irányíba mutató $(a \times b)^0$ egységvektorral azonos vagy vele ellentétes aszerint, amint c és a $\times$ b vektorok jobb-vagy balrendszert alkotnak. Az előjeles térfogathoz jutunk tehát, ha e helyébe az $(a \times b)^0$ vektort írjuk.

Így a $V = |a \times b|(a \times b)^0 c = =(axb)\cdot c$

Tétel: Három vektor akkor és csak akkor egysíkú, ha vegyesszorzatuk 0.

Bizonyítás: Ha az egymással nem párhuzamos a, b vektorokat egy pontból felmérjük, egy síkot határoznak meg. Az a $\times$ b = 0 vektor merőleges erre a síkra. A c vektor tehát $\Leftrightarrow$ egysíkú az a, b vektorokkal, ha szintén merőleges az a $\times$ b vektorra. Ez $\Leftrightarrow$ ha az a $\times$ b és c vektorok skaláris szorzata 0.

Tétel (felcserélési tétel): abc=(axb)·c = a·(bxc)

A tételt kimondhatjuk ilyen alakban is: abc=bca=cab (a vegyesszorzat nem változik, ha a tényezőket ciklikusan cseréljük fel)

Tétel : Az a (a_1,b_1,c_1), $b(b_1, b_2, b_3)$, $c(c_1, c_2, c_3)$ vektorok vegyesszorzata

$$abc = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Tétel (kifejtési tétel): (axb)xc = (ac)b-(bc)a

ax(bxc) = (ac)b-(ab)c

Euklideszi tér axiómái

1. A skaláris szorzat a V-beli rendezett párokhoz egy, T-beli, nemnegatív elemet rendelő függvény, vagyis

   $$\forall \vec{a},\vec{b} \in V, < \vec{a},\vec{b} >: V \times V \to T$$

2. A skaláris szorzat részben kommutatív, vagyis

   $$\forall \vec{a},\vec{b} \in V, < \vec{a},\vec{b} > = \overline{< \vec{b},\vec{a} >},$$

   ahol a felülvonás a komplex konjugálást jelöli. (Természetesen a valós esetben kommutatív).

3. A skalárszoros (skalár az alkotó testől, vagy int. tart.-ból) „hátulról" kiemelhető, vagyis:

   $$\forall \vec{a},\vec{b} \in V, \forall \lambda \in T, < \vec{a},\lambda\vec{b} > = \lambda < \vec{a},\vec{b} >$$

4. Összeg hátulról „szétszedhető", vagyis:

   $$\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V, < \vec{a},\vec{b}+\vec{c} > = < \vec{a},\vec{b} > + < \vec{a},\vec{c} >$$

Tételek

Több kérdés is felmerülhet a definíciókkal kapcsolatban, először is az, hogy miért kellett a konjugálást bevezetni, elvetve így a kommutativitást, valamint, hogy miért pont hátulról kiemelhetők a tagok, és mi a helyzet az elöl lévő skalárszorzóval, és összeggel? Utóbbi két kérdést két egyszerű tétellel azonnal meg lehet válaszolni:

TÉTEL: $\forall \vec{a},\vec{b} \in V, \forall \lambda \in T, < \lambda\vec{a},\vec{b} > = \overline{\lambda} < \vec{a},\vec{b} >$

Bizonyítás: Egyszerűen az axiómákból, csak „hátulra kell varázsolni a skalárszorost" a részleges kommutativitást kihasználva, így jön be a képbe a konjugált, formálisan:

$< \lambda\vec{a},\vec{b} >=$(2. axióma) $< \vec{b},\lambda\vec{a} > =$(3. axióma) $\lambda < \vec{b},\vec{a} > =$(komplex konjugálás szorzattartó)

$= \overline{\lambda < \vec{b}, \vec{a} >}$ =(2. axióma) $\overline{\lambda} < \vec{a}, \vec{b} >$ QED

TÉTEL: $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V, < \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} > = < \vec{a}, \vec{c} > + < \vec{b}, \vec{c} >$
Bizonyítás: Teljesen hasonlóan az előzőhöz, vegyük észre, hogy ha felcseréljük a tagokat (természetesen konjugálással együtt), akkor a 4. axiómát alkalmazva kapjuk a kívánt képletet. QED

Az euklideszi norma

Minden euklideszi térben bevezethető valamilyen, „hosszúságszerű" fogalom. Ezt fogjuk euklideszi normának hívni, definíciója a következő:
Az euklideszi norma egy, V-ből T-be képező, nemnegatív értékeket felvevő függvény, amelyre (jelöléssel együtt):
$||\vec{a}|| := \sqrt{< \vec{a}, \vec{a} >}$

Hajlásszög euklideszi terekben

A norma és skalárszorzat segítségével már definiálható két vektor hajlásszöge, melyen síkvektoroknál a nemnagyobb szöget értettük. A hajlásszög, csakúgy mint középiskolában azon érték lesz, melyet a cos függvény a $\dfrac{< \vec{a}, \vec{b} >}{||\vec{a}|| * ||\vec{b}||}$ helyen felvesz, vagyis ennek az arkusz koszinusza.
A definíció jogosságához be kéne látni, hogy ez az érték mindig a [-1;1] intervallumba esik, de ez azonnal következik a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenségből. (Vagyis a számláló mindig kisebb vagy egyenlő abszolútértékben mint a nevező.)
A hajlásszög definíciójával már definiálni lehet az egymásra ortogonális, merőleges vektorokat is.

Ortogonális, ortonormált bázis

Két vektort egymásra merőlegesnek, ortogonálisnak mondunk, ha skaláris szorzatuk 0.
Könnyen meggondolható, hogy a szokásos sík-, és térvektorok esetén ez pont akkor teljesül, ha egymással bezárt szögük $\frac{\pi}{2}$, vagyis a „derékszög", hiszen ennek a koszinusza 0, így a skaláris szorzat is 0 lesz.

A következő tételhez még egy definíció kell, a normált vektoré.
Egy vektort normáltnak mondunk, ha normája az alkotó számtest (szorzás szerinti) egységeleme.

Schmidt-féle ortogonalizáció Minden euklideszi térben létezik ortonormált bázis, vagyis olyan bázis, melynek minden vektora páronként merőleges, normájuk pedig az egységelem.

Az egyenes

Euklidész Kr. e. 300 körül megjelent művében, az Elemekben először a *vonalat* definiálta:

„*A vonal szélesség nélküli hosszúság*"

és csak ezután következik az egyenes:

„*Egyenes vonal az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.*"[1]

Ez a megfogalmazás Euklidész azon törekvéséből fakad, hogy mindent, amivel foglalkozik pontosan meghatározzon, minden logikai rést lefedjen. Manapság az egyenest az elemi geometria axiomatikus tárgyalásában (például a Hilbert-féle axiómarendszerben) *alapfogalomnak* tekintjük, azaz nem vezetjük vissza további definícióval más fogalmakra.

Másrészt az elemi geometria modelljeiben természetesen meg kell adnunk az egyenesnek megfelelő entitások halmazát, például a koordinátamodellben mint egy háromdimenziós vektortér egydimenziós altereinek eltoltjainak halmazát.

Tulajdonságai

Habár nincs definiálva, mindenkiben él egy kép az egyenesről, amely szerint az egyenes egy pontokból álló 1 dimenziós objektum, azaz például a tér egy irányában végtelen hosszú, a többiben kiterjedés nélküli. A geometriában az egyenes következő tulajdonságait használjuk ki:

- Két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest, amiből következik, hogy két különböző egyenesnek nem lehet egynél több közös pontja.
- Ha egy síknak és egy egyenesnek legalább két közös pontja van, akkor az egyenes illeszkedik az adott síkra.
- Ha A,B,C egy egyenes pontjai és B az A és C pontok *között* fekszik, akkor egyszersmind a B pont a C és A pontok *között* is fekszik.
- Ha A,C egy egyenes pontjai, akkor létezik olyan B pontja az egyenesnek, amely az A és C pontok *között* fekszik, és egyszersmind létezik olyan D pontja, hogy a C pont az A és D pontok *között* is fekszik.
- Az egyenes tetszőleges három pontja közül pontosan egy olyan pont van, amely a másik két pont *között* fekszik.

Egyenes megadása az analitikus geometriában

Egy egyenes egyenlete
olyan egyenlet, melyet az egyenes minden pontja teljesít, és ha egy pont teljesíti, akkor rajta van az egyenesen.

- A síkban az egyenes egyenletének általában kétféle alakját használjuk (Descartes-koordinátarendszerben):
  - Ha adott az egyenes egy pontja $(x_0;y_0)$ és egy *normálvektora*[2]: $Ax + By + C = 0$, ahol A és B az egyenes normálvektorának első és második koordinátáját jelölik[3], a C konstansra pedig $-C = Ax_0 + By_0$ teljesül.
  - Ha az egyenesnek egy pontja $(x_0;y_0)$ és a *meredeksége* (vagy *iránytangense*)[4] adott: $y = mx + b$, ahol m a meredekség, a b konstansra pedig $b = y_0 - mx_0$ teljesül.

- A térben már kevésbé szép, ekkor egyenletrendszerekkel írhatjuk le:
    - Adott pont ($x_0;y_0;z_0$) és *irányvektor*[5] esetén: $x = x_0 + tA;\ y = y_0 + tB;\ z = z_0 + tC$, ahol A, B és C az irányvektor koordinátái, a t pedig egy valós paraméter.
    - Kicsit átalakítva az előző egyenlet rendszert (amennyiben $ABC \neq 0$, azaz az irányvektor egyik koordinátája sem 0, nem párhuzamos egyik koordináta-tengellyel sem): $(t =)\ \dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} = \dfrac{z - z_0}{C}$
- Az n dimenziós térben az egyenest egy n változós egyenletrendszer adja meg, amiben van egy független paraméter

A sík

Definíciója

Euklides az *Elemek*ben (az egyeneshez hasonlóan) előbb a felületet definiálja: *Felület az, aminek csak hosszúsága és szélessége van*, és csak ezután határoza meg a síkot: *Síkfelület az, amelyik a rajta levő egyenesekhez viszonyítva egyenlően fekszik.* Ma már a síkot is alapfogalomnak tekintjük a geometriában, tehát nem definiáljuk.

Jellemzése

Hogy pontosan mit jelent a sík, azt mindenki magának határozza meg (a mindennapi tapasztalataival összhangban). Geometriai szempontból a sík legfontosabb tulajdonságai:

- 2 dimenziós objektum[1], azaz két irányban végtelen, a harmadik irányban 0 a kiterjedése.
- 3 nem kollineáris[2] pont egyértelműen meghatározza, azaz ha két síknak létezik 3 nem kollineáris közös pontja, akkor az összes pontjuk közös.
- Ha 2 síknak létezik 2 közös pontja, akkor létezik olyan egyenes, ami mindkét síkra illeszkedik.

Sík megadása az analitikus geometriában

Egy sík egyenlete

Olyan egyenlet, melyet a sík minden pontja teljesít, és ha egy pont teljesíti, akkor rajta van a síkon.

- Ha adott a sík egy pontja ($x_0;y_0;z_0$) és egy *normálvektora*[3]: $Ax + By + Cz + D = 0$, ahol A, B és C rendre a sík normálvektorának első, második és harmadik koordinátáit jelölik[4], a D konstansra pedig $-D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ teljesül.

Térelemek távolsága és szöge

Egyenesek szöge

Két kitérő egyenes szögét megkapjuk, ha az egyik egyenes tetszőleges pontján át párhuzamost húzunk a másikkal. A két eredeti egyenes szöge definíció szerint az így kapott két metsző egyenes szögével egyezik meg. Példánkban a baloldali egyenest forgathatjuk. A másik egyenes 3 pontján át is párhuzamost állítottunk az eredetivel, melyek az első egyenessel megegyezően forognak.

Egyenes és sík merőlegessége

Definíció szerint egy egyenes merőleges egy síkra, ha a sík minden egyenesére merőleges. Bizonyítható, hogy ha az egyenes merőleges a sík 2 egymást metsző egyenesére, akkor a sík összes egyenesére is merőleges. Az animációban 2 stabil egyenes és 1 a síkjukban folyamatosan forgást végző egyenes látható, melyek mindegyike merőleges a nyugvó függőleges egyenesre.

Egyenes és sík szöge

Ha egy egyenes pontjaiból egy síkra merőlegest állítunk, akkor a talppontok az egyenes síkra eső merőleges vetületét alkotják. Az eredeti egyenes és vetületének szöge egyenlő az egyenes és sík szögével a definíció szerint. Az egeret mozgatva az egyenes elforgatható, megfigyelhető az egyenes vetülete és annak az eredetivel bezárt szöge, ami egyben a keresett szög.

Két sík szöge

Két metsző sík közös része egy egyenes, a két sík metszésvonala. Mindkét síkon merőlegest állítunk a metszésvonalra, ezek szöge adja a két sík szögét. Az egeret a ferde sík fölé helyezve, az forogni kezd, az egeret onnan eltávolítva a forgás megszűnik.

Tétel: Az egyállású szögek egyenlők.

Bizonyítás: Legyenek a térben az $(a_1, b_1)\sphericalangle$ és $(a_2, b_2)\sphericalangle$ szárai páronként párhuzamosak és egyező irányúak. Csúcsaikat jelöljük O_1 –gyel és O_2-vel. AZ a_1, b_1 meghatároz egy α_1 síkot, amellyel az a_2, b_2 egyenesek α_2 síkja egyállású. Toljuk el az α_1-et O_1O_2 távolsággal O_1O_2 irányba. Akkor a_1 az a_2-be kerül, mert a_1 képe O_2-ből kiinduló a_1-gyel párhuzamos egyenes lesz, ez pedig a_2. Hasonlóan látható be, hogy b_1 a b_2-re kerül.

Definíció: ***A tér két egyenesének szögén*** a tér tetszőleges pontjára illeszkedő, a két egyenessel párhuzamos egyenesek szögét értjük.

Következmény: A sík normálisa merőleges a sík minden egyenesére.

Tétel: Ha két sík metszi egymást, akkor az egyikben felvett tetszőleges egyenesnek a másik síkban lévő merőleges vetületével bezárt szöge nem nagyobb annál a szögnél, amelyet a metszésvonal egy pontjában a metszésvonalra húzott és a két síkban fekvő egy-egy merőleges egyenes zár be egymással.

Megjegyzés: A metszésvonalra húzott merőlegesek szöge tehát nem függ a metszésvonalon választott pont helyzetétől. A többi egyeneseknek és merőleges vetületüknek szögei pedig nem nagyobbak annál. Ez lehetőséget ad arra, hogy két sík szögének értelmezésével a két síkra jellemző szöget használjuk fel.

Definíció: ***Két sík szögén*** a metszésvonaluk egy pontjában az egyik, illetve a másik síkban a metszésvonalra húzott merőlegesek szögét értjük. Párhuzamos síkok szöge 0. Két metszősíkhoz tartozó szimmetriasíkokat szögfelező síkoknak nevezzük.