1998

Írásbeli érettségi-felvételi feladatok (1998. május 25. du.)

1. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x^2 + xy = 210,$$
$$y^2 + xy = 231. \qquad (10 \text{ pont})$$

2. Egy szimmetrikus trapézba kör írható, amelynek sugara 12; a trapéz rövidebbik párhuzamos oldala 16. Mekkorák a trapéz oldalai és átlói? (11 pont)

3. Az $y = x^2 - 9$ egyenletű parabola az x tengelyt az A és a B pontokban metszi. Egy k kör sugara 5, középpontja az x tengely felett van, és ugyanott metszi az x tengelyt, ahol a parabola. A kör és a parabola további metszéspontjai C és D. Mekkora az $ABCD$ négyszög területe?(12 pont)

4. Hány olyan valós szám van, amely kielégíti a

$$\operatorname{tg} 5x + \sin 10x = 3 \cdot \sin 5x$$

egyenletet, és teljesül rá, hogy $0 \leq x < 2\pi$? (12 pont)

5. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{9^x + 8 - 3^{x+2}} > 3^x - 5. \qquad (13 \text{ pont})$$

6. Mely p valós számokra igaz, hogy minden x valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} \leq p. \qquad (14 \text{ pont})$$

7. Egy pozitív számokból álló számtani sorozatról ismeretes, hogy ha kiválasztjuk első n elemét, ezek között az utolsó 9-szerese az elsőnek, és az utolsó három elem összege ötszöröse az első három elem összegének. Mekkora az n? (14 pont)

8. Bizonyítsa be, hogy ha négy egymást követő természetes szám szorzatához 1-et hozzáadunk, akkor négyzetszámot kapunk! (14 pont)

Írásbeli érettségi-felvételi feladatok (1998. május 26. de.)

9. Mutassa meg, hogy bármely x, y, z pozitív értékre a

$$K = \frac{4}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} : \frac{1}{x + \frac{1}{y}} - \frac{4}{y(xyz + x + z)}$$

kifejezés értéke független x, y, z értékétől! (9 pont)

10. Az r sugarú kör köré írjon olyan derékszögű érintőtrapézt, amelynek legrövidebb oldala $\frac{3r}{2}$. Mekkora a trapéz területe? (11 pont)

11. Adja meg a számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvények értelmezhetők:

$a)\quad x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}, \qquad b)\quad x \mapsto \sqrt{\operatorname{tg} x}, \qquad c)\quad x \mapsto \operatorname{tg}\sqrt{x}.$ (12 pont)

12. Oldja meg a racionális számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} &9^{-1} \cdot 9^{\frac{x}{y}} - 27 \cdot 27^{\frac{y}{x}} = 0, \\ &\lg(x-2) - \lg(2-y) = 0. \end{aligned}$$

(13 pont)

13. Három szám egy mértani sorozat három szomszédos eleme. Ha a második számhoz hozzáadunk 8-at, akkor egy számtani sorozat három egymást követő elemét kapjuk. Ha ennek a számtani sorozatnak a harmadik eleméhez 64-et adunk, akkor egy új mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Melyik ez a három szám? (13 pont)

14. Határozza meg a p paraméter mindazon értékéit, amelyekre az x minden valós értékére

$$\frac{x^2 + 8x + 20}{px^2 + 2(p+1)x + 9p + 4} < 0.$$

(13 pont)

15. Egy egyenes körkúpba írjon be egy félgömböt úgy, hogy az körlapjával illeszkedjék a kúp alapkörének síkjára, gömbfelülete pedig érintse a kúp palástját! A kúp felszíne úgy aránylik a félgömb görbe felületének a felszínéhez, mint 18 : 5. Határozza meg a kúp nyílásszögét! (14 pont)

16. A sík tetszőleges $P(x;y)$ pontjához rendelje hozzá a $Q\left(ax; \frac{y}{a}\right)$ pontot, ahol $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$. Melyek a sík azon P_1P_2 szakaszai, amelyekhez ez a hozzárendelés a velük egyenlő hosszúságú Q_1Q_2 szakaszokat rendeli? (15 pont)

Pótírásbeli érettségi-felvételi feladatok (1998. május 10. de.)

17. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\cos x + 2 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{7}{4 \cdot \cos x}. \qquad \text{(9 pont)}$$

18. Egy bank 100 ezer forintos betétre két év elteltével 109 200 forintot fizet. A kamatláb a futamidő második évében 1%-kal emelkedett. Mennyi volt a kamatláb az első évben? (10 pont)

19. Egy $(3; -1)$ középpontú kör a $2x - 5y + 18 = 0$ egyenletű egyenesből 6 egység hosszúságú húrt metsz ki. Írja fel a kör egyenletét! (12 pont)

20. Egy trapézt az átlóival négy háromszögre bontunk. Az egyik párhuzamos oldalhoz illeszkedő háromszög területe 2, az egyik szárhoz illeszkedő háromszög területe pedig 4 területegység. Mekkora a trapéz területe? (13 pont)

21. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\log_x(4x - 1) > 1. \qquad \text{(13 pont)}$$

22. A d hosszúságú AB szakaszt az M pont két részre osztja. Az AM és MB átmérőjű körök lefedik az AB átmérőjű kör egy részét. Hogyan kell megválasztani M helyét, hogy a lefedetlen terület a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez a terület d függvényében? (13 pont)

23. Egy háromszögben $b > a$ és $\frac{1}{m^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, ahol m a c oldalhoz tartozó magasság. Adja meg a háromszög szögeit α függvényében! (15 pont)

24. Mutassa meg, hogy ha p és q páratlan számok, akkor az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek nincs racionális gyöke! (15 pont)

Pótírásbeli érettségi-felvételi feladatok (1998. június 10. du.)

25. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{x} + 1} + \frac{\sqrt[3]{x} + 4}{5} = 3. \qquad \text{(10 pont)}$$

26. Egy ABC háromszög oldalai akkorák, mint az egységsugarú körbe írt szabályos háromszög, szabályos négyszög és szabályos hatszög egy oldala. Számítsa ki az ABC háromszögbe írt és köré írt kör sugarát! (10 pont)

27. Az $\overline{abcd}$ négyjegyű szám számjegyei a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő elemei. A számjegyek összege 18. Melyek ezek a négyjegyű számok? (11 pont)

28. Egy csónakos a folyón lefelé 10 km-t evez, majd visszafordul, és felfelé 6 km-t evez. A folyó sebessége 1 km/h. Milyen határok között változhat a csónak ,,állóvízhez viszonyított" sebessége, ha a csónakos 3 óránál hosszabb, de 4 óránál rövidebb ideig akar evezni, és feltesszük, hogy ez a sebesség nagyobb a folyó sebességénél? (13 pont)

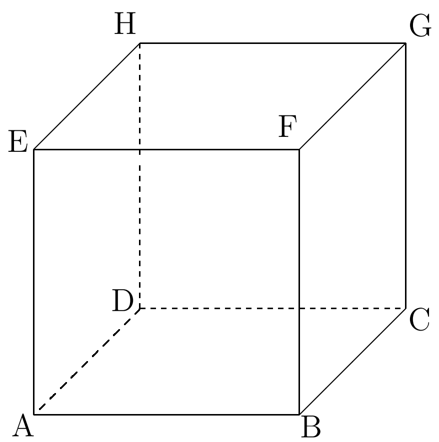
29. Mely valós számok elégítik ki az

$$x^{\log_2 x} + 16x^{-\log_2 x} \leq 17$$

egyenlőtlenséget? (13 pont)

30. Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a $4 \leq x^2 + y^2 \leq 2(|x| + |y|)$ egyenlőtlenségpárral megadott $P(x;y)$ pontok halmaza határoz meg! (14 pont)

31. Messük el az $ABCDEFGH$ egységnyi élhosszúságú kockát az A, H csúcspontjain és a BF él felezőpontján átmenő síkkal! Ez a sík milyen sokszöget metsz ki a kockából?



Határozza meg a metsző sík által lemetszett testek térfogatának arányát! (14 pont)

32. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$\cos 2x + (2\cos y - 1)\sin x + \cos y - 1 = 0$$

egyenletet! (15 pont)

Írásbeli felvételi feladatok a műszaki tanári szakra jelentkezőknek (1998. június 9.)

33. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{2}{1-2x}+\frac{3}{2x+1}-\frac{6}{1-4x^2}=1. \qquad \text{(14 pont)}$$

34. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 32 cm, szárainak hossza 20 cm. Mekkora a szárak által bezárt szög? Az egyik szárra a szárak metszéspontjában emelt merőleges a csúcsoktól mekkora távolságra metszi az alapot? (14 pont)

35. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $y=x+17$ egyenletű egyenessel, és érinti az

$$x^2+y^2-6x-6y-14=0$$

egyenletű kört! (16 pont)

36. Négy szám közül az első három egy számtani, az utolsó három egy mértani sorozat három egymást követő eleme. Az első és a második szám összege 6, a harmadik és a negyedik szám összege 36. Melyik ez a négy szám? (18 pont)

37. Az $ABCD$ téglalap alapú gúla csúcsa S. S merőleges vetülete az alapsíkon A. $AB=4$ cm. Számítsa ki a gúla térfogatát, ha $BCS\angle=60°$ és $ADS\angle=45°$! (19 pont)

38. Készítse el az $x\mapsto \Big||x-1|-|x+1|\Big|$, $x\in[-2;2]$ függvény grafikonját, és állapítsa meg, hogy mely számközben növekszik, csökken, állandó a függvény; hol van helyi szélsőértéke, és mekkora ez; mi az értékkészlete; páros, páratlan-e a függvény! (19 pont)

Írásbeli felvételi feladatok az ELTE TTK nulladik évfolyama számára (1998. március 3.)

39. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 1+\log_2(3y-x)&=\log_3 27+\log_2(x+y),\\ 3^{y+2x}&=81\cdot 3^{-(y+4x)}. \end{aligned} \qquad \text{(10 pont)}$$

40. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$2^x + 2^{1-x} < 3. \qquad (11\ \text{pont})$$

41. Az $M(4;6)$ pontból húzzunk érintőket az

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$$

egyenletű körhöz. Számítsa ki az érintők által bezárt szög nagyságát! (12 pont)

42. A t területű körcikkek közül melyiknek a kerülete minimális? Mekkora ez a minimális kerület? (12 pont)

43. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$\begin{aligned} 2(p+2)x - (p+1)y &= p, \\ p^2(x-y) &= 4x - y \end{aligned}$$

egyenletrendszert, amelyben p valós paraméter! (13 pont)

44. Hat szám közül az első öt egy számtani sorozat öt szomszédos eleme, ezek összege $15\sin 270°$. Az utolsó három szám egy mértani sorozat három szomszédos eleme, és ezek 7-es alapú logaritmusainak összege $6\log_7 3$. Melyek ezek a számok? (13 pont)

45. Az ABC háromszögben $BC = 10$ egység, az A csúcsból induló súlyvonal hossza $s = 4$ egység, az AB oldal és az s súlyvonal által bezárt szög $60°$-os. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei? (14 pont)

46. Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 4 egység, magassága 6 egység. A kúpot az alapkör középpontjába helyezett 1 egység sugarú fúróval az alapkör síkjára merőlegesen átfúrjuk. Mekkora az így kapott maradéktest felszíne és térfogata? (15 pont)

Írásbeli felvételi feladatok az ELTE TTK nulladik évfolyama számára (1998. március 24.)

47. Írja fel az $x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$ egyenletű kör ama húrjának az egyenletét, amelyet az $A(1;1)$ pont felez. Mekkora a húr hossza? (10 pont)

48. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} \lg \log_2 \log_3(x+y) &= 0, \\ \lg x + \lg y &= \lg(\log_2 256). \end{aligned} \qquad \text{(11 pont)}$$

49. Mekkora darabokra osztják a szabályos háromszög 10 cm hosszú oldalát az egyik szögét harmadoló egyenesek?

50. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=2. \qquad \text{(12 pont)}$$

51. Határozza meg az m valós paraméternek azokat az értékeit, amelyekkel az $(m+2)x^2+(2m+3)x-2=0$ egyenletnek két különböző, (-1)-nél kisebb valós gyöke van! (13 pont)

52. Két mértani sorozat első eleme megegyezik. A második, harmadik, negyedik elemek különbsége rendre 5; $-\frac{5}{4}$; $\frac{35}{16}$. Melyik ez a két sorozat? (14 pont)

53. Az $ABCD$ tetraéderben $DA=DB=DC=a$. Az $ADB\angle=60°$, a $BDC\angle=120°$, a $CDA\angle=90°$. Határozza meg a tetraéder felszínét! (14 pont)

54. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$(\sin 2x+3)\sin^4 x-(\sin 2x+3)\sin^2 x+1=0. \qquad \text{(15 pont)}$$

Írásbeli felvételi feladatok a műszaki egyetemek és főiskolák nulladik évfolyamai számára

Első sorozat, (1998. május 8.)

55. Oldja meg a következő egyenleteket az valós számok halmazán!

a) $\sqrt{36-x}+\sqrt{4-2x}=8$, (5 pont) *b)* $2\cdot 16^{\log_9(2x+1)}-4^{\log_9(2x+1)}=6$, (6 pont)

c) $\cos^4 x+\sin^2 2x=\frac{21}{16}$. (6 pont)

56. Az A és a B városok közötti út emelkedőkből és lejtőkből áll. Egy kerékpáros sebessége az emelkedőn 20 km/h, a lejtőn 30 km/h. A kerékpáros útja A-ból B-be 3 óráig, visszafelé 3 óra 20 percig tartott. Hány kilométer A és B távolsága? (10 pont)

57. Az ABC háromszögben az ACB szög $90°$, $CB = 9$. Az átfogó D pontjára $DB = 6$ és $CD = CA$. Számítsa ki a BAC szöget! (11 pont)

58. Egy egyenlő szárú háromszögbe beírható kör sugara 3 cm. A beírható kört és a szárakat érintő kör sugara 1 cm. Mekkora a háromszög területe? (11 pont)

59. Igazolja, hogy az $A(4;6)$, $B(7;1)$, $C(20;2)$ és $D(6;14)$ pontok egy húrnégyszög csúcspontjai! Írja fel a négy ponton áthaladó kör egyenletét! (11 pont)

60. Egy nem állandó számtani sorozat első 100 elemének összege (S_{100}) egyenlő az első 231 elemének az összegével. Számítsa ki a sorozat 166. elemét! Hányadik eleme e sorozatnak $\frac{S_{231}}{231}$, $\frac{S_{100}}{100}$, illetve S_{331}? (13 pont)

61. Legyen valamilyen n természetes szám a közvetlenül nála nem nagyobb négyzetszámnál x-szel nagyobb, a rákövetkező négyzetszámnál pedig y-nal kisebb. Igazolja, hogy $n-xy$ négyzetszám! (13 pont)

62. Bizonyítsa be, hogy ha egy háromszög a, b és c oldalaira $b = \frac{a+c}{2}$, akkor $ac = 6r\varrho$, ahol r a háromszög köré, ϱ pedig a háromszögbe beírható kör sugara! (14 pont)

Második sorozat, (1998. május 15.)

63. Mely valós x értékekre értelmezhetők az alábbi kifejezések?

$$a)\quad \lg\frac{x^2-1}{x};\qquad b)\quad \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 4^x - 2^x};\qquad c)\quad \frac{1}{\lg \operatorname{tg} x}.$$ (9 pont)

64. Határozzuk meg az x valós változó értékét, ha

$$3^{2\log_2 x};\qquad 9^{\frac{1}{2}};\qquad 27^{\frac{2\log_4 x}{3}}$$

egy mértani sorozat három egymást követő eleme! (10 pont)

65. Hány olyan kör van, amely érinti a koordinátatengelyek mindegyikét, és érinti az $x+\sqrt{3}y = \sqrt{3}$ egyenest is? Írjuk föl ezek közül a legkisebb sugarúnak az egyenletét! (12 pont)

66. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sin 2x = \frac{\sin^2 x + \sin x}{2}$$

egyenletet! (13 pont)

67. Mekkora a szabályos négyoldalú gúla térfogata, ha alapéle $a = 32$ cm, a beírható gömb sugara pedig $r = 12$ cm? (13 pont)

68. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\lg x^2 + \lg(x+4)^2 = \lg 9$$

egyenletet! (13 pont)

69. Az ABC háromszög AB és AC oldalaira kifelé rajzolt szabályos háromszögek legyenek ABP és ACR, az AP, AR és BC szakaszok felezőpontja pedig rendre M, N és D. Bizonyítsuk be, hogy az MND háromszög szabályos! (15 pont)

70. Határozzuk meg azt az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = x^2 + bx + c$ (b és c valós állandók) alakú másodfokú függvényt, amelyhez van olyan valós p számérték, amelyre

$$f(p) = 2p^2, \qquad f(2p) = 3p^2 + 1, \qquad f(3p) = 4p^2 + 4$$

egyidejűleg teljesül! Mennyi a p értéke? (15 pont)

Írásbeli felvételi feladatok az ELTE Tanárképző Főiskolai Kar matematika tanári szak, esti tagozatra jelentkezőknek (1998. június 25.)

71. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x+10} - \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-11}.$$

72. Egy paralelogramma rövidebb átlója 8 egység, átlóinak szöge 45°, területe 40 területegység. Számítsa ki a paralelogramma kerületét!

73. Egy üzem kétféle minőségű alkatrészt gyárt. Az I. osztályú termék gyártásából származik a bevétel 73%-a. Hány %-kal emelkedik az üzem bevétele, ha az I. osztályú termék termelését 27%-kal, a II. osztályú termék termelését pedig 22%-kal növelik?

74. Egy számtani sorozat első tíz elemének összege 155, az első és hetedik elemének szorzata egyenlő a második és harmadik elemének szorzatával. Számítsa ki a sorozat első tíz elemét!

75. Melyek azok a téglalapok, amelyek oldalai egész számok, és a terület mérőszáma kétszerese a kerületének?