2000

Írásbeli érettségi-felvételi feladatok

Első sorozat (2000. május 22. du.)

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x + \sin 2x = \frac{1}{\cos x}$$

egyenletet! (9 pont)

2. Az $ABCO$ háromszög alapú gúla O csúcspontjából az A, B, C pontokba mutató vektorokat jelölje rendre **a**, **b**, **c**. Fejezze ki az OAB háromszög S_B súlypontjából az OAC háromszög S_C súlypontjába mutató vektort az **a**, **b**, **c** vektorokkal! Mekkora az $S_BS_C : BC$ arány? (11 pont)

3. Legyenek a, b, c, d egymást növekvő sorrendben követő szomszédos természetes számok. Bizonyítsa be, hogy $a + b^2 + c^3$ osztható d^2-tel! (12 pont)

4. Egy mértani sorozat első eleme és hányadosa egész szám. Az első három elem összege 21, az n-edik és az azt megelőző két elem összege pedig 336. Írja fel a mértani sorozat első n elemét! (12 pont)

5. A $0 \leq x \leq 5$ valós számokra értelmezzük a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6}.$$

Határozza meg f legnagyobb és legkisebb értékét! (13 pont)

6. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$4^x - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}}.$$ (14 pont)

7. Egy gömb köré írt csonkakúp térfogata kétszerese a gömb térfogatának. Hányszorosa a csonkakúp alapkörének sugara a fedőkör sugarának? (14 pont)

8. Bizonyítsa be, hogy a sík $\left(\sqrt{5}; \frac{1}{3}\right)$ pontja körül írt bármely körön legfeljebb egy rácspont van (vagyis olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám)! (15 pont)

Második sorozat (2000. május 23. de.)

9. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} - 18 \cdot \sqrt[3]{x} = 0. \qquad (10 \text{ pont})$$

10. Egy körhöz külső P pontból érintőket húzunk. Az érintőszakaszok hossza 3. A P pontot és a kör középpontját összekötő szakasz a körívet Q-ban metszi, és $PQ = \sqrt{3}$. Számítsa ki az érintők hajlásszögét! (10 pont)

11. Egy szabályos háromszög egyik csúcspontja $A(-1; 2)$, a köréírt kör középpontja $K(1; 4)$. Számítsa ki a háromszög másik két csúcspontjának koordinátáit! (12 pont)

12. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\frac{xy}{5x+4y} = 6, \qquad \frac{yz}{3y+5z} = 6, \qquad \frac{zx}{2z+3x} = 8. \qquad (12 \text{ pont})$$

13. Az $ABCD$ trapéz A és D csúcsainál lévő szögek derékszögek; a trapéz párhuzamos oldalai $AB = a$, $CD = b$ $(a > b)$. A B csúcsnál húzott szögfelező az AD szárat felezi. Fejezze ki a trapéz területét a és b függvényeként! (13 pont)

14. Rajzoljon az a, b, c oldalú háromszög oldalaira kifelé rendre egy a, b, illetve c oldalú négyzetet. A négyzeteknek a háromszögekre nem illeszkedő csúcsai egy hatszöget határoznak meg. E hatszögnek azokat az oldalait, amelyek nem négyzetoldalak, jelölje x, y és z. Bizonyítsa be, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right). \qquad (13 \text{ pont})$$

15. Az A, B és C városok egymástól való távolsága $AB = 600$ km, $BC = 800$ km, $AC = 800$ km. A-ból B-be és B-ből C-be egyidőben indul egy-egy repülőgép. A gépek ugyanakkora sebességgel, azonos magasságban, egyenes vonalban kitérő nélkül repülnek. Hány km-es út megtétele után lesz a repülők közötti távolság a legkisebb? (14 pont)

16. Írjon az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzetbe olyan háromszögeket, amelyeknek az alapja AB, a harmadik csúcsa pedig a CD oldal egy P pontja. Határozza meg a P pont helyét, amikor az

ABP háromszög kerülete minimális, illetve amikor maximális. Adja meg a minimum és maximum értékét is! (16 pont)

Pótírásbeli érettségi-felvételi feladatok

Első sorozat (2000. június 9. de.)

17. Egy város lakóinak száma jelenleg 48 500. A növekedés mértéke évente 7%. Hány lakosa volt a városnak 3 évvel ezelőtt? Három év alatt hány százalékkal nőtt a lakosság létszáma?(8 pont)

18. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$3^{\log_3 x} - 2^{\log_4 y} = 77, \qquad 3^{\log_3 \sqrt{x}} - 2^{\log_{16} y} = 7. \qquad \text{(11 pont)}$$

19. Az egység oldalú négyzet minden oldalára a négyzet belsejében olyan egyenlő szárú háromszögeket szerkesztünk, amelyeknél a szárak által bezárt szög 150°-os. Mekkora annak a négyszögnek a területe, amelynek csúcsai e háromszögek négyzeten belüli csúcsával azonosak? (12 pont)

20. Egy derékszögű háromszög egyik befogója egységnyi, a másik befogóhoz tartozó súlyvonal merőleges az átfogóhoz tartozó súlyvonalra. Számítsa ki a derékszögű háromszög másik két oldalát! (12 pont)

21. Egy téglatest oldallapjai 1; 2 és 3 egység területűek. Mekkora a téglatest köré írható gömb felszíne és térfogata? (13 pont)

22. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre az alábbi állítások közül pontosan két állítás igaz?

a) $4n^2 - 360n + 8099 < 0$; *b)* $n - 2$ osztható 7-tel;
c) $n^2 - 2$ osztható 7-tel. (14 pont)

23. Adja meg az α paraméter azon értékeit a $[0; 2\pi]$ intervallumban, amelyeknél a

$$(2\cos\alpha - 1)x^2 + 4x + 4\cos\alpha + 2 = 0$$

egyenlet gyökei ellenkező előjelűek! (15 pont)

24. Hány olyan egyenes illeszkedik a sík $A(4;3)$ pontjára, amely az x tengely pozitív feléből prímszám hosszúságú, és az y tengely pozitív feléből egész szám hosszúságú szakaszt metsz ki? Írja fel ezeknek az egyeneseknek az egyenletét! (15 pont)

Második sorozat (2000. június 9. du.)

25. Egy 5 egység sugarú kör egyenlete

$$4x^2 + Ay^2 + Bxy + Cy - 8x - 60 = 0.$$

Adja meg az A, B és C konstansok értékét és a kör középpontjának koordinátáit! (9 pont)

26. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 30°. Mennyi a körülírt és a beírt kör sugarának hányadosa? (10 pont)

27. Állapítsuk meg, hogy hány elemű az

a) $f \cdot g$,

b) $f^2 + g^2$

függvények zérushelyeinek halmaza, ha a függvények értelmezési tartománya a $[-3\pi; 6\pi]$ intervallum, és

$$f(x) = \sin\frac{x}{2}, \qquad g(x) = \cos\frac{x}{3}.$$ (12 pont)

28. A b pozitív szám mely értéke mellett van az

$$x^3 - y^3 = b^2,$$
$$x - y = b$$

egyenletrendszernek egyetlen $(x;y)$ számpár megoldása? Adja meg ezt a megoldás! (12 pont)

29. Mely valós x értékre értelmezhetők a következő kifejezések:

$$a)\ \frac{\lg(x^2-2x-3)}{\lg\ |x-3|}, \qquad b)\ \frac{1}{\lg\operatorname{tg}|2x|}.$$ (13 pont)

30. Egy $ABCD$ négyszög csúcsainak koordinátái

$$A(-10;0), \quad B(-5;-10), \quad C(10;0), \quad D(5;10).$$

A négyszög csúcsait merőlegesen vetítettük a csúcsra nem illeszkedő átlóra. Így rendre az E, F, G, H pontokhoz jutottunk. Mekkora az $EFGH$ négyszög területe? (14 pont)

31. Bizonyítsa be, hogy ha a, b, c egy pozitív tagú mértani sorozat egymást követő tagjai, akkor tetszőleges x valós számra fennállnak az

$$\frac{1}{3} \leq \frac{ax^2 + bx + c}{ax^2 - bx + c} \leq 3$$

egyenlőtlenségek! Teljesülhet-e valamely x-re valamelyik oldalon, illetve egyszerre mindkét oldalon egyenlőség? (15 pont)

32. Egy egyenes körkúp alakú zárt edény alaplapján áll, és magassága feléig vízzel van megtöltve. 180 fokkal átfordítjuk az edényt úgy, hogy csúcsa lefelé legyen; így a víz magassága hány százaléka lesz a kúp magasságának? (15 pont)

A műszaki tanári szakra felvételizők feladatai

Első sorozat (2000. június 9. de.)

33. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x^2 + 5}{x + 2} + 1 = \frac{x^2 - 4}{x - 2}. \qquad \text{(11 pont)}$$

34. Egy trapéz párhuzamos oldalai 18 cm és 24 cm, az egyik szár 15 cm hosszú. Ez a szár a hosszabb alappal 74,5°-os szöget zár be. Számítsa ki a trapéz negyedik oldalát és a szögeit! (15 pont)

35. Egy mértani sorozat első három elemének a szorzata 216. Ha a harmadik számot 3-mal csökkentjük, egy számtani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Határozza meg a számtani sorozat e három szomszédos elemét! (16 pont)

36. Egy egyenlő szárú háromszögnek az alappal szemközti csúcsa $A(6; 8)$, a háromszögbe írt kör egyenlete $x^2 + y^2 = 64$. Írja fel a háromszög alapegyenesének az egyenletét, és számítsa ki a másik két csúcs koordinátáit! (20 pont)

37. Ábrázolja az $f(x) = \frac{x}{x-2}$ valós függvény grafikonját! Hol metszi ez az x, illetve a y tengelyt? A $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$ intervallumban mekkora a függvény legnagyobb, és mekkora a legkisebb értéke, és hol veszi fel ezeket? (20 pont)

38. Egy egyenes körhenger palástjának a felszíne úgy aránylik az alaplap területéhez, mint 5 : 3. A hengerből a tengelyére illeszkedő sík egy téglalapot metsz ki, amelynek átlója 39 cm. Mekkora a henger térfogata és felszíne? (20 pont)

Második sorozat (2000. június 9. du)

39. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{4}{1-4x^2}$$

egyenletet! (14 pont)

40. Egy csonkakúp alakú vödör alapkörének átmérője 20 cm, fedőkörének átmérője 30 cm, alkotója 27 cm. A vödör tele van habarccsal. Ezzel a habarcsmennyiséggel hány négyzetméternyi felület borítható be egyenletesen 6 mm vastagon, ha a habarcs $\frac{1}{4}$ részét a falsérüléseinek javítására kell felhasználnunk? (15 pont)

41. Egy számtani sorozat négy, egymást követő elemének összege 0, a négy szám négyzetének az összege 20. Melyek ezek a számok? (16 pont)

42. Az $ABCD$ paralelogramma oldalai $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm. A P pont a BC oldal C-hez közelebbi harmadolópontja. A DP egyenes az AB egyenest a Q pontban metszi. Számítsa ki a DBQ háromszög és az $ABCD$ paralelogramma területének az arányát! (17 pont)

42. Írja fel a $P(7; -4)$ pontból az $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 20$ egyenletű körhöz húzható érintők egyenletét! (20 pont)

44. Készítse el az $x \mapsto \Big||x+1| - |x-1|\Big|$, $x \in [-2; 2]$ függvény grafikonját, és állapítsa meg, hogy mely számközben csökken, növekszik, állandó a függvény; hol van helyi szélsőértéke, és mekkora ez; mi az értékkészlete; páros, páratlan-e a függvény? (19 pont)

A műszaki tanári szakra felvételizők feladatai

Pótírásbeli felvételi feladatok (2000. július 3.)

45. 18 kg keveréket készítenek kétféle termékből, amelyek egységára kilogrammonként 500 Ft, illetve 300 Ft. Ha a keveréket 390 Ft egységáron adják el, akkor a veszteségük 380 Ft lesz. Hány kilogramm volt az egyes fajtákból? (12 pont)

46. Az a oldalú $ABCD$ négyzet A és B csúcspontjait kössük össze a CD oldal H_1 és H_2 harmadolópontjaival. Így a négyzet hat háromszögre bomlik. Határozza meg a keletkező hat darab háromszög területét! (15 pont)

47. Írja fel az $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 14$ egyenletű körben a $P(1; 3)$ ponton áthaladó legrövidebb húr egyenletét! Számítsa ki ennek a húrnak a hosszát! (16 pont)

48. Egy számtani sorozat első tagja 1; az első öt tag összege $\frac{1}{4}$ része a következő öt tag összegének. Írja fel a sorozat első öt tagját! (17 pont)

49. Egy négyzetalapú egyenes gúla alapéle 8 egység, szomszédos oldaléleinek egymással bezárt 60°. Az alaplap egyik átlójára illesszünk olyan síkot, amelyik merőleges az őt nem metsző egyik oldalélre. Mekkora területű síkidomot metsz ki a sík a gúlából? (20 pont)

50. Határozza meg a valós számok halmazán az

$$f(x) = \frac{(x^2 - 8x + 8)^2 - 100}{x^2 - 8x + 18}$$

függvény legbővebb értelmezési tartományát, továbbá a függvény legkisebb értékét! (20 pont)

Az ELTE TFK esti tagozatára jelentkezők írásbeli felvételi vizsgájának feladatai (2000. június)

51. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x+10} - \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-11}. \qquad (15 \text{ pont})$$

52. Egy paralelogramma rövidebb átlója 8 egység, átlóinak szöge 45°, területe 40 területegység. Számítsa ki a paralelogramma kerületét! (15 pont)

53. Egy üzem kétféle minőségű alkatrészt gyárt. Az I. osztályú termék gyártásából származik a bevétel 73%-a. Hány százalékkal emelkedik az üzem bevétele, ha az I. osztályú termék termelését 27%-kal, a II. osztályú termék termelését pedig 22%-kal növeli? (15 pont)

54. Egy számtani sorozat első tíz elemének összege 155, az első és hetedik elemének szorzata egyenlő a második és harmadik elemének a szorzatával. Számítsa ki a sorozat első tíz elemét! (15 pont)

55. Melyek azok a téglalapok, amelyek oldalai egész számok, és a terület mérőszáma kétszerese a kerületének? (15 pont)