Definíciók és jelölések [szerkesztés]

A mátrix vízszintes vonalban elhelyezkedő elemei **sorokat**, függőleges vonalban elhelyezkedő elemei **oszlopokat** alkotnak. Egy m sorból és n oszlopból álló mátrixot m-szer n mátrixnak nevezik (írva: $m \times n$), az m és n pozitív egész számok a mátrix **dimenziói**. A mátrix dimenzióit mindig először a sorok számával majd azt követően az oszlopok számával adják meg. Az A mátrix jelölése:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A mátrixnak az i-edik sorában és j-edik oszlopában lévő elemét a mátrix i,j-edik elemének nevezik, jelölése $\mathbf{A}_{i,j}$ vagy $A[i,j]$. Mindig először a sorszám, majd az oszlopszám szerepel.

Az $m \times n$ méretű mátrixot gyakran így jelölik: $A := (a_{i,j})_{m \times n}$, a mátrix minden $A[i,j]$ elemét $a_{i,j}$-vel jelölik, ahol $1 \leq i \leq m$ és $1 \leq j \leq n$. Konvenció, hogy a mátrixokat nagybetűvel, a mátrix elemeit pedig kisbetűvel jelölik. Szokás szerint a mátrix sorainak és oszlopainak számozása 1-gyel kezdődik – noha vannak számítógépes programok, melyek 0-val kezdenek. Azokat a mátrixokat, melyek egyik dimenziója 1, **vektor**nak szokták nevezni. A **sorvektor**nak csak egy sora van:

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n],$$

az **oszlopvektor**nak pedig egyetlen oszlopa:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix}$$

Az 1×1-es mátrixot skalárnak hívjuk.

Tisztán matematikai igényű definíció [szerkesztés]

Ha T test, akkor az $m \times n$-es mátrixok $T^{m \times n}$ halmazán a

$$A : \{1,2,...,m\} \times \{1,2,...,n\} \longrightarrow T \quad \langle i,j \rangle \mapsto a_{ij}$$

típusú, véges ($m \cdot n$ elemszámú) értelmezési tartományú, T-be képező függvények halmazát értjük. Itt $\times$ a halmazok Descartes-szorzata, $\langle i,j \rangle$ rendezett pár.

Példák [szerkesztés]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Az A mátrix egy 4×3-as (12 elemű, 2 dimenziós) mátrix. Az $A[2,3]$, vagy $a_{2,3}$ elem a 7.

$$R = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9]$$

Az R mátrix egy 1×9-es mátrix, vagy 9-elemű (9 dimenziós) sorvektor.

Műveletek mátrixokkal [szerkesztés]

Transzponálás [szerkesztés]

A transzponálás egy argumentumú művelet. Egy mátrix transzponálása sorainak és oszlopainak a felcserélését jelenti. Egy $m \times n$-es típusú mátrix transzponáltja $n \times m$-es típusú. Kétszer végrehajtva visszakapjuk az eredeti mátrixot. A transzponálás jele A^T vagy A'.

Egy mátrix szimmetrikus, ha transzponáltja önmaga, azaz $A^T = A$. Szimmetrikus mátrix csak négyzetes mátrix (lásd alább) lehet.

Példa [szerkesztés]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Összeadás [szerkesztés]

Csak azonos dimenziójú mátrixok adhatók össze. Legyen A és B két azonos dimenziójú, $m \times n$-es méretű mátrix. Az $A + B$ összeget úgy képezzük, hogy az azonos helyen lévő elemeket összegezzük (vagyis $(A + B)[i, j] = A[i, j] + B[i, j]$).

Példa [szerkesztés]

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságai [szerkesztés]

- Kommutatív: $A + B = B + A$.
- Asszociatív: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Skalárral való szorzás [szerkesztés]

Adott az A mátrix egy c skalárral való cA szorzatát úgy számítjuk, hogy a c számmal A minden elemét megszorozzuk (vagyis $(cA)[i, j] = cA[i, j]$).

Ha a skalárt 1×1-es mátrixnak tekintjük, akkor a skalárral való szorzás speciális Kronecker-szorzat.

Példa [szerkesztés]

$$2\cdot\begin{bmatrix}1 & 8 & -3\\ 4 & -2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1 & 2\cdot8 & 2\cdot(-3)\\ 2\cdot4 & 2\cdot(-2) & 2\cdot5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 16 & -6\\ 8 & -4 & 10\end{bmatrix}$$

Tulajdonságai [szerkesztés]

- $aM = Ma$. (Bármelyik oldalról szorozhatunk a skalárral.)
- $(a + b)M = aM + bM$.
- $a(bM) = (ab)M = (ba)M = b(aM)$.

Az összeadás viszonyában teljesül, hogy:

- $a(M + N) = aM + aN$.

Mátrixszorzás [szerkesztés]

Két mátrix szorzata akkor definiált, ha a bal oldali mátrix oszlopainak száma megegyezik a jobb oldali mátrix sorainak számával. Ha A egy m-szer n mátrix és B egy n-szer p mátrix, **mátrixszorzatuk** egy m-szer p méretű (m sorból, p oszlopból álló) AB mátrix lesz, melynek elemei így számíthatók:

$$(AB)[i,j] = A[i,1]B[1,j] + A[i,2]B[2,j] + \dots + A[i,n]B[n,j]$$

minden i-re és j-re.

Példa [szerkesztés]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1\cdot3+0\cdot2+2\cdot1) & (1\cdot1+0\cdot1+2\cdot0)\\ ((-1)\cdot3+3\cdot2+1\cdot1) & ((-1)\cdot1+3\cdot1+1\cdot0)\end{bmatrix}=$$

illetve a megfelelő sort a megfelelő oszloppal történő szorzást kidomborítandó:

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}5 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

ahol például az eredménymátrix 5-ös elemét úgy kaptuk, hogy a sorában lévő (1,0,2) elemeket páronként összeszoroztuk az oszlopában lévő (3,2,1) elemekkel, majd összeadtuk őket.

Tulajdonságai [szerkesztés]

- asszociativitás: $(AB)C = A(BC)$ minden k-szor m méretű A mátrixra, $m \times n$-es méretű B mátrixra és n-szer p méretű $\mathbf{C}$ mátrixra.
- jobb oldali disztributivitás: $(A + B)C = AC + BC$ minden $m \times n$-es méretű A és B mátrixra valamint n-szer k méretű $\mathbf{C}$ mátrixra.
- bal oldali disztributivitás: $C(A + B) = CA + CB$ minden m-szer n méretű A és B valamint k-szor m méretű $\mathbf{C}$ mátrixra.

Fontos tudni, hogy a kommutativitás általában *nem* teljesül; vagyis adott A és B összeszorozható mátrixra általában igaz, hogy $AB \neq BA$.

Speciális mátrixok [szerkesztés]

- Nullmátrix olyan mátrix, melynek minden eleme 0.
- Egységmátrix négyzetes mátrix, melynek főátlójában minden elem 1, a többi 0.
- Diagonális mátrix négyzetes mátrix, melynek csak a főátlójában vannak 0-tól eltérő elemek.
- Szimmetrikus mátrix a főátlóra nézve szimmetrikus mátrix: $a_{i,j}=a_{j,i}$.
- Ferdeszimmetrikus mátrix a főátlóra nézve szimmetrikus elemek egyenlőek, de ellenkező előjelűek: $a_{i,j}= - a_{j,i}$.
- Háromszögmátrix
- Hermitikus mátrix a főátlóra nézve szimmetrikus elemek egymás komplex konjugáltjai: $a_{i,j}=a^{*}_{j,i}$, ahol a '*' komplex konjugáltat jelöl.
- Permutáló mátrix
- Adjungált (mátrixinvertálás)
- Vandermonde-determináns

2. Feladat. Szorozza össze az alábbi mátrixok közül az összeszorozhatókat:

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&7&5\\2&0&-1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&-9&5\\2&1&-4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2&11\\0&1\\3&-8\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&3&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}0&-9&5\end{pmatrix}\quad Q=\begin{pmatrix}3&-1&7&5\\2&0&-1&0\\6&-2&0&4\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\\-11\end{pmatrix}\quad S=\begin{pmatrix}-2&11&1\\0&1&-1\\3&-8&0\\1&1&0\end{pmatrix}\quad T=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}.$$

3. Feladat. Szorozzuk össze a alábbi mátrixokat mindkét sorrendben. Milyen „érdekességet” tapasztalunk?

(a) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

(b) $C=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}$ $\quad D=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix}$

4. Feladat. Mutassunk rá egy példával, hogy mátrixok körében nem lehet egyszerűsíteni, azaz keressünk olyan A, B, C mátrixokat (pl. a 2×2-es mátrixok körében), hogy $AB = AC$, de $A \neq O$ és $B \neq C$.

5. Feladat. Mi történik egy 3×3-as mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixszal megszorozzuk:

(a) $P=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $\quad$ (b) $Q=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$;

(c) $R=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $\quad$ (d) $S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$;

(Próbáljunk általánosítani!)

* * * * * * * * * * *

Megjegyzés. Azonos típusú négyzetes mátrixok esetén az összeszorozhatóság feltétele teljesül, és a szorzat is ugyanolyan típusú lesz. Ezért (és a szorzás asszociativitása miatt!) négyzetes mátrix esetén értelmezhető a hatványozás:

$$A^1 = A,\ \text{és ha } n \geq 2,\ \text{akkor } A^n = AA^{n-1},\quad A \in T^{n\times n}.$$

Abban is megállapodunk, hogy $A^0 = E_n$, az $n\times n$-es egységmátrix.

6. Feladat. Igazoljuk a mátrix-hatványozás alábbi azonosságait (m, k nemnegatív egész számok):

(a) $A^mA^k = A^{m+k}$, ahol $m, k \in \mathbb{N}$;
(b) $(A^m)^k = A^{mk}$, ahol $m, k \in \mathbb{N}$;

Mutassunk rá, hogy $(AB)^m = A^mB^m$ általában nem teljesül. Milyen feltétel(ek) mellett teljesül ez az összefüggés?

7. Feladat. Számítsa ki az alábbi mátrix-hatványokat (n természetes szám, a valós szám):

(a) $\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix}^{1111}$ $\quad$ (b) $\begin{pmatrix}2&-3\\1&-2\end{pmatrix}^{1111}$ $\quad$ (c) $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}^{1111}$ $\quad$ (d) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{n}$

(g) $\begin{pmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix}^{n}$ $\quad$ (h) $\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^{n}$ $\quad$ (i) $\begin{pmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi\\\sin\varphi&-\cos\varphi\end{pmatrix}^{n}$

8. Feladat. (2003-as dolgozatfeladat)
Számítsa ki a következő mátrixok közül azokat, amelyek léteznek:

$$FC^T + B^T,\qquad G^2C^T,\qquad FA + BD^T,\qquad AG^2 + G$$

ha

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}2&5\\3&7\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\\1&0\\1&-2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\-1&-2&1&0\\0&-1&3&2\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}2&4\end{pmatrix}.$$

9. Feladat. Ha A és B tetszőleges $n\times n$-es (azaz négyzetes) mátrixok, igazak-e a következők:

(1) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$;
(2) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
(3) Ha $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, akkor $AB = BA$;

(Ha igaz, bizonyítsa be; ha nem, keressen ellenpéldát pl. a 2×2-es mátrixok között.)

10. Feladat. Számítsa ki az $A^2 + 3A - 4E_3$ kifejezés értékét az

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-5\\4&-2&6\\3&1&2\end{pmatrix}$$

mátrixra. (Másszóval: számítsa ki az $f(x) = x^2 + 3x - 4$ polinom helyettesítési értékét az A helyen.)

MÁTRIXOK

Irodalom

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:
Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*,
Polygon Kiadó, Szeged, 2003,
2. fejezet (Mátrixok);

további ajánlott irodalom:
Hajnal Imre – dr. Nemetz Tibor – dr. Pintér Lajos:
Matematika III. (fakultatív B változat), (gimnáziumi tankönyv);
VIII. fejezet (345. oldaltól - 363. oldalig, feladatok is!!)

D. K. Fagyejev–I. Sz. Szominszkij: *Felsőfokú algebrai feladatok*,
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, illetve Typotex Kiadó, 2000;
4. fejezet, 1. szakasz, 464.-465., 467.-479., 506. feladat

Freud Róbert: *Lineáris algebra*,
ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001;
2. fejezet, 1. szakasz.

Scharnitzky Viktor: *Mátrixszámítás* (példatár, Bolyai-könyvek sorozat),
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000;
A Mátrixok c. fejezetben (fogalmak, jelölések a 89. o.-tól),
Kidolgozott feladatok (a 113. oldaltól): 1.-9., 24.-57., 68., 71.-74.

Példák

1. Példa. Számítsa ki a következő mátrixok közül azokat, amelyek léteznek:

(a) A^T, B^T,
(b) $A+B$, $C+D$, $D-C$,
(c) $3A$,
(d) AD, DA, B^TA,

ha

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&-1\\3&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}.$$

Megoldás.
(a)

$$A^T=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&2&4\end{pmatrix},\qquad B^T=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}^T=(1\ \ 2\ \ -1);$$

(b) $A+B$ nem létezik, mivel A és B nem azonos típusúak: az A mátrix 3×2-es, B pedig 3×1-es típusú.
C és D viszont azonos típusúak, így összeadhatók:

$$C+D=\begin{pmatrix}2&-1\\3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1&-1+2\\3+(-3)&0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&4\end{pmatrix};$$

és persze a kivonás is elvégezhető:

$$D-C=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2&2-(-1)\\-3-3&4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\-6&4\end{pmatrix};$$

(c)

$$3\cdot A=3\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1&3\cdot 0\\3\cdot(-1)&3\cdot 2\\3\cdot 3&3\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-3&6\\9&12\end{pmatrix};$$

(d) AD értelmezett, hiszen A-nak 2 oszlopa van, D-nek pedig 2 sora. A szorzatmátrixot a definíció alapján a következő módon számítjuk ki:

$$AD=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+0\cdot 3&1\cdot 2+0\cdot 4\\(-1)\cdot 1+2\cdot 3&(-1)\cdot 2+2\cdot 4\\3\cdot 1+4\cdot 3&3\cdot 2+4\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\5&6\\16&22\end{pmatrix},$$

(Látjuk, hogy a szorzatmátrixnak 3 sora van, mint A-nak, és 2 oszlopa van, mint D-nek.)
DA nem létezik, mivel D oszlopainak száma nem egyezik meg A sorainak számával.

$$B^TA=(1\ \ 2\ \ -1)\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&4\end{pmatrix}=$$
$$=(1\cdot 1+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 3\quad 1\cdot 0+2\cdot 2+(-1)\cdot 4)=(-4\quad 0).$$

További ajánlott feladatok

1. Feladat. Tegyük fel, hogy A,B adott, X pedig ismeretlen, azonos méretű mátrixok. Oldja meg az alábbi „mátrix-egyenleteket" (azaz a műveletek ismert-tanult tulajdonságai alapján fejezzük ki az X mátrixot az összefüggésből):

$$\text{(a)}\quad X+A=2(X-B)\qquad\qquad \text{(b)}\quad 3(X+\tfrac{1}{2}A)=5(X-\tfrac{3}{4}B).$$

Adjuk meg a megoldásokat, abban az esetben, ha

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\qquad\text{és}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$