25.tétel

Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában, tétel és megfordítása, szükséges és elégséges feltétel

Tétel és megfordítása

tétel = implikáció (A→B = Ha A, akkor B.)

Ha egy sokszög háromszög, akkor belső szögeinek összege 180°.

Ha egy szám tízes számrendszerben felírt alakjában a számjegyek összege osztható 9-cel, akkor a szám is osztható 9-cel.

tétel megfordítása: a feltétel és a következmény felcserélése (B→A = Ha B, akkor A.)

megfordítás is igaz:

tétel: Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor a szemben lévő szögeinek összege 180°.

megfordítása: Ha egy négyszög szemben lévő szögeinek összege 180°, akkor húrnégyszög.

olyan tétel, ahol a megfordítás nem igaz:

tétel: Ha egy szám osztható 9-cel, akkor osztható 3-mal.-IGAZ

megfordítás: Ha egy szám osztható 3-mal, akkor osztható 9-cel.-HAMIS

Szükséges és elégséges feltétel

minden implikáció (=tétel) magában foglal szükséges és elégséges feltételeket

A→B

A elégséges feltétele B-nek

B szükséges feltétele A-nak

magyarázat (az itt következő rész csak a megértést könnyíti, feleletben nem kell elmondani!)

Ha mindenkinek ötös lesz a matek emelt szintűje, akkor Zsófinak is ötös lesz.

- *ahhoz, hogy mindenkinek ötös legyen szükséges, hogy Zsófinak is ötös legyen*
  DE: az, hogy Zsófinak ötös lett nem elég, ahhoz hogy mindenki tudja, hogy az övé ötös lett
- *az, hogy mindenkinek ötös lett elég ahhoz, hogy Zsófi tudja, az övé is ötös lett*
  DE:az, hogy mindenkinek ötös legyen nem szükséges ahhoz, hogy Zsófié is ötös lehessen

	A	*B*	*A→B*
1.	*i*	*i*	*i*
2.	*i*	*h*	*h*
3.	*h*	*i*	*i*
4.	*h*	*h*	*i*

mivel tudjuk, hogy A→B igaz, ezért a második sor nem lehetséges

- *az, hogy A igaz, elég, hogy tudjuk, hogy B is igaz (2. sor nem lehetséges)*
- *az, hogy B igaz, szükséges ahhoz, hogy tudjuk A igaz (=nincs olyan sor, hogy A igaz, B hamis)*

példák:

- Ha egy szám osztható 6-tal, akkor osztható 3-mal.
  6-tal való oszthatóság elégséges feltétele a 3-mal való oszthatóságnak. (nem szükséges:15)
  3-mal való oszthatóság szükséges feltétele a 6-tal való oszthatóságnak (nem elégséges:15)
- Ha egy függvény deriválható, akkor folytonos.
  deriválhatóság elégséges feltétele a folytonosságnak (nem szükséges: abszolútérték-függvény)
  folytonosság szükséges feltétele a deriválhatóságnak (nem elégséges: abszolútérték-függvény)

szükséges és elégséges feltétel:

A és B állítás ekvivalens, vagyis egyenértékű = A⇔B = A akkor és csak akkor, ha B.

- $4x^2 = 4x - 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 1 = 4x \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.5$
  ahhoz, hogy $4x^2 = 4x - 1$ legyen:
  elég, hogy tudjuk $x = 0.5$
  szükséges, hogy $x = 0.5$ legyen (ha nem lenne annyi, nem lehetne $4x^2 = 4x - 1$)
- Egy szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha osztható 3-mal és 2-vel.
  ahhoz, hogy egy szám osztható legyen 6-tal:
  elég, hogy osztható 3-mal és 2-vel
  szükséges, hogy osztható legyen 3-mal és 2-vel

Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában

(Az itt következő bizonyítási módszerek mindegyikét be kell mutatni, de csak az egyiknél kell tételt bizonyítani. Ennél a tételnél nem kell külön alkalmazást említeni, ezt váltja ki, hogy egy bizonyítási módszert alkalmazásban is bemutatsz!)

tételek bizonyítására különböző módszereket használunk

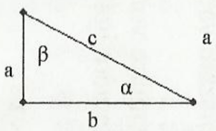
- direkt
- indirekt
- teljes indukció
- skatulya-elv

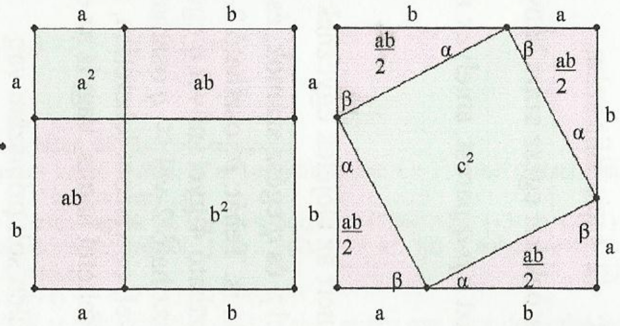
DIREKT – Igaz állítás(ok)ból helyes következtetéseket levonva jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

Pitagorasz-tétel: Derékszögű háromszögben a két befogó hosszának négyzetének összege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével.

Bizonyítás:

Vegyünk fel két (a+b) oldalú négyzetet!





$T = a^2 + b^2 + 2ab \; (= (a+b)^2)$

Mivel a két négyzet egybevágó, ezért területük egyenlő:
$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$
$\underline{a^2 + b^2 = c^2}$

Mivel a és b derékszöget zár be, ezért a keletkező háromszögek az eredetivel egybevágóak, vagyis a harmadik oldal c.
A c oldalú négyszög rombusz, mert minden oldala egyenlő.
A rombusz minden szögét α+β egészíti ki 180°-ra. α+β az eredeti háromszög miatt 90°. Tehát a rombusz minden szöge derékszög, vagyis a négyszög négyzet, emiatt területe c^2.
A háromszögek terülte 4ab/2=2ab

ilyen bizonyítás még: Thalesz-tétel bizonyítása, számtani-mértani közép közti összefüggés bizonyítása

INDIREKT – A bizonyítandó állítás tagadásából helyes következtetéseket levonva lehetetlen következmény(ek)hez jutunk. Emiatt a bizonyítandó állítás igaz, hiszen tagadása hamis.

Tétel: $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Bizonyítás: indirekt feltétel: $\sqrt{2}$ racionális szám

A racionális számok felírhatóak két egész szám hányadosaként, tehát: $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, ahol p és q pozitív egész számok. Válasszuk azt a p-q párost, amelyek relatív prímek, tehát $(p;\, q) = 1$

$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ $\quad /\cdot q$

$\sqrt{2}q=p$ $\quad /\uparrow^2$, mert az előjelek egyeznek (pozitív a két oldal)

$2q^2=p^2$ $\quad$ Mivel p és q egész számok, és az egyenlet bal oldala osztható 2-vel, ezért a jobb oldala is. Tehát: p^2 osztható 2-vel $\Leftrightarrow$ p osztható 2-vel $\Leftrightarrow$ p^2 osztható 4-gyel.

Az egyenlet jobb oldala osztható 4-gyel (mivel q egész), ezért baloldala is osztható 4-gyel.

$2q^2$ osztható 4-gyel $\Leftrightarrow$ q^2 osztható 2-vel $\Leftrightarrow$ q osztható 2-vel

Tehát p és q is osztható 2-vel, ez viszont lehetetlen, mert p és q az eredeti feltétel szerint relatív prímek. Emiatt az indirekt feltétel hamis, vagyis az eredeti állítás igaz.

ilyen bizonyítás még: végtelen sok prímszám van

TELJES INDUKCIÓ – Egy sorozat elemeire vonatkozó törvényszerűség bizonyítása olymódon, hogy először belátjuk, hogy a sorozat első elemére igaz az állítás, majd azt, hogy ha igaz a sorozat n-dik elemére, akkor igaz az n+1-dik elemére is.

Az első n köbszám összege $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Bizonyítás:

1. $n = 1$-re igaz: $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ (mindkét oldal 1)

2. ha igaz n-re, akkor igaz n+1-re is:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

ilyen bizonyítás még: első n négyzetszám összege, véges halmaz részhalmazainak száma

SKATULYA-ELV – Ha n pozitív egész számú skatulyába kn (k pozitív egész) dolognál többet kell szétosztani, akkor szükségszerűen legalább az egyik skatulyában legalább k+1 dolog lesz.

4 pozitív egész szám között van 2, amelyeknek a különbsége osztható 3-mal.

Bizonyítás:

Két szám különbsége akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha azonos maradékot adnak 3-mal osztva. Mivel 3-mal osztva a pozitív egész számok 3-féle maradékot adhatnak (0, 1 ,2), ezért négy szám között a skatulya-elv szerint lesz két olyan amelyek egyforma maradékot adnak. Ezek különbsége osztható lesz 3-mal.

ilyen bizonyítás még: egyszerű gráfban van két azonos fokszámú csúcs

A **teljes indukció** (ritkábban: matematikai indukció) a matematika egyik legfontosabb és leggyakrabban használt bizonyítási módszere a természetes számok körében. A teljes indukció elve a következő: Ha egy tulajdonság igaz az egyre (n=1), továbbá ez a tulajdonság olyan természetű, hogy öröklődik a természetes számok rákövetkezése során (tehát n-ről $n+1$-re), akkor ezzel a tulajdonsággal az összes természetes szám rendelkezik.

A módszer segítségével egyszerre megszámlálhatóan végtelen sok állítást lehet bizonyítani. A végtelen sok állítást sorba rendezzük, majd az így kapott sorozat első állítását igazoljuk. Ezután következik a teljes indukció „lelke", az *indukciós lépés*. Ez annak az állításnak a bizonyítását jelenti, hogy ha feltesszük, hogy az n-edik állítás igaz, akkor abból következik az $n+1$-edik állítás igazsága is. Az első állítás igazsága és az indukciós lépés együtt már az összes állítás igazságát is bizonyítja.

A teljes indukció nagyobb számosságokra való általánosítása a transzfinit indukció.

A teljes indukció első írásos emléke 1575-ből származik. Ekkor bizonyította Francesco Maurolico *Arithmeticorum libri fuo* című művében, hogy az első n páratlan szám összege n^2.

A módszer neve félrevezető, valójában nem általánosításról, hanem a matematika szabályai szerinti bizonyításról van szó, azaz a teljes indukció – mint minden más matematikailag helyes módszer – tulajdonképpen dedukció.

A Maurolico által bizonyított állítás, vagyis hogy az első n páratlan szám összege éppen n^2 teljes indukciós bizonyítása következik. Képlet formájában:

$$1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Ezt az állítást minden pozitív egész n-re be kell látnunk.

Az *első lépés*, hogy ellenőrizzük az állítást $n = 1$-re. Ekkor a bal oldalon mindössze egy tagja van az összeadásnak, az 1. A jobb oldalon pedig 1^2 áll, vagyis igaz az állítás, hiszen $1 = 1^2$.

A második lépés az *indukciós lépés*. Tegyük fel tehát, hogy az állítás igaz $n = k$-ra. Ez azt jelenti, hogy $1+3+\ldots+(2k-1)=k^2$.

Be kellene látni, hogy ekkor az állítás teljesül $n = k + 1$-re is. A bal oldal $n = k + 1$ esetén: $1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1)$. Azért írjuk ilyen alakban, hogy jól látható legyen, hogy hol lehet felhasználni az indukciós feltevést. Ekkor ugyanis

$$1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

:

Vagyis az állítás teljesül $n = k + 1$-re is. Ezzel a bizonyítást befejeztük

A Maurolico által bizonyított állítás, vagyis hogy az első n páratlan szám összege éppen n^2 teljes indukciós bizonyítása következik. Képlet formájában:

$$1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Ezt az állítást minden pozitív egész n-re be kell látnunk.

Az *első lépés*, hogy ellenőrizzük az állítást $n = 1$-re. Ekkor a bal oldalon mindössze egy tagja van az összeadásnak, az 1. A jobb oldalon pedig 1^2 áll, vagyis igaz az állítás, hiszen $1 = 1^2$.

A második lépés az *indukciós lépés*. Tegyük fel tehát, hogy az állítás igaz $n = k$-ra. Ez azt jelenti, hogy $1+3+\ldots+(2k-1)=k^2$.

Be kellene látni, hogy ekkor az állítás teljesül $n = k + 1$-re is. A bal oldal $n = k + 1$ esetén: $1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1)$. Azért írjuk ilyen alakban, hogy jól látható legyen, hogy hol lehet felhasználni az indukciós feltevést. Ekkor ugyanis

$$1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)$$

:

Vagyis az állítás teljesül $n = k + 1$-re is. Ezzel a bizonyítást befejeztük

Feladat.

Igazoljuk, hogy $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n-1 = n^2$!

Megoldás.

1-2. fel. hf.

No, alkalmazzuk az előző feladatokban tanultakat.
1. Igazoljuk valamely kezdő értékre, pl. n=1-re állításunkat: $1 = 1^2$. Juhé! (Igazolhattuk volna n=2-re is: $1+3 = 2^2$. Nagyon megy…)
2. Az indukciós feltevés: tegyük fel, hogy n=k-ra igaz az állítás. Azaz $1+3+\ldots+(2k-1) = k^2$.
3. Tudjuk az indukciós feltevésből: $1+3+\ldots+(2k-1) = k^2$. Mi a helyzet n=k+1 esetén? Növeljük 1-gyel k értékét:
$1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1) = * = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$.
A*-ban kihasználtuk az indukciós feltevést. Ha valaki esetleg nem nyugodott volna még meg:
KÉSZEN VAGYUNK.

Teljes indukció

A teljes indukció természetes számokra megfogalmazott állítások esetén használt bizonyítási módszer. Kicsit pontatlanul megfogalmazva a lényege: ha belátjuk, hogy az állítás igaz az első természetes számra (általában 0 vagy 1, de lehet, hogy a konkrét feladatban pl. 3-ra kell megnézni), és belátjuk azt is, hogy az állítás öröklődik, akkor készen vagyunk. Az öröklődés azt jelenti, hogy ha egy bizonyos természetes számra igaz volt az állítás, akkor igaz a rá következő természetes számra is. Gondoljuk meg, hogy ezzel tényleg belátjuk az összes természetes számra az állításunkat. (Megjegyzés: a teljes indukció "működése" lényegében a Peano-axiómákon múlik, ez majd lesz analízisből.)
Egy ilyen bizonyítás felépítése tehát:
1. megnézzük, igaz-e az első pár természetes számra
2. ha igaz, tegyük fel, hogy valamilyen n természetes számra igaz az állítás
3. próbáljuk meg belátni, hogy ilyenkor n rákövetkezőjére, azaz $n+1$-re is öröklődik az állítás érvényessége.
A hármas pontban mindig fel kell használni valahol a kettes pontot, azaz az indukciós feltevést. Hogy pontosan hol és hogyan, az persze feladatonként változik. Általánosan annyit lehet mondani, hogy célszerű az $n+1$-re felírt esetben valahogy kialakítani az n-re felírt esetet, azért, hogy alkalmazhassuk az indukciós feltevést.
A zh-ban szerepelt feladat megoldása részletesen:

Állítás: $3^n + 4^n \leq 5^n$, $n = 2, 3, ...$ 3. fel.

Bizonyítás:

$n = 2$-re az egyenlőtlenség bal-és jobboldala is 25, így ekkor igaz az állítás.
Tegyük fel, hogy valamilyen k természetes számra ($k \geq 2$) teljesül az állítás, azaz $3^k + 4^k \leq 5^k$. Próbáljuk meg belátni, hogy ilyenkor $k+1$-re is igaz, azaz $3^{k+1} + 4^{k+1} \leq 5^{k+1}$ (indukciós feltevés).
$k+1$-re az egyenlőtlenség baloldalát alakítva: $3^{k+1} + 4^{k+1} = 3 \cdot 3^k + 4 \cdot 4^k$. Ez utóbbinál nyilván nagyobb számot kapunk, ha a 3^k-t is 4-gyel szorozzuk, így írhatjuk:
$3^{k+1} + 4^{k+1} = 3 \cdot 3^k + 4 \cdot 4^k < 4 \cdot 3^k + 4 \cdot 4^k = 4 \cdot (3^k + 4^k)$.
Látjuk, hogy a zárójelben megjelent az indukciós feltevés baloldala, így azt alkalmazva: $4 \cdot (3^k + 4^k) \leq 4 \cdot 5^k$. Nekünk az kell, hogy a jobboldalon 5^{k+1} szerepeljen, de ezt már könnyen elérhetjük, hiszen $4 \cdot 5^k < 5 \cdot 5^k = 5^{k+1}$.
Összességében tehát azt kaptuk, hogy
$3^{k+1} + 4^{k+1} = 3 \cdot 3^k + 4 \cdot 4^k < 4 \cdot 3^k + 4 \cdot 4^k = 4 \cdot (3^k + 4^k) \leq 4 \cdot 5^k < 5 \cdot 5^k = 5^{k+1}$,
és ezzel beláttuk az állítást.

Egy másik feladat:

Állítás: $\sum\limits_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2,\ n \in \mathbf{N}^+$

Bizonyítás:

$n = 1$-re mindkét oldalon 4 áll, így ekkor igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy valamilyen n-re teljesül az állítás, azaz $\sum\limits_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2$.

Be kell látni, hogy ilyenkor $n+1$-re is igaz, azaz $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k(3k+1) = (n+1)(n+2)^2$.

Alakítsuk itt át a baloldalt, azért, hogy tudjuk használni az indukciós feltevést:

$\sum\limits_{k=1}^{n+1} k(3k+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} k(3k+1) + (n+1)(3n+4)$.

Látjuk, hogy itt megjelent az indukciós feltevés baloldala, így azt alkalmazva:

$\sum\limits_{k=1}^{n} k(3k+1) + (n+1)(3n+4) = n(n+1)^2 + (n+1)(3n+4)$.

Ezt tovább alakítva:

$n(n+1)^2 + (n+1)(3n+4) = (n+1)(n^2+4n+4) = (n+1)(n+2)^2$,

és pontosan ezt akartuk belátni.

2. Teljes indukció

Teljes indukcióval bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket:
2.0-1.

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (*)$$ 4. fel.

Megoldás.

A. $n=1$ esetén $1=\frac{1\cdot 2}{2}=1$, így (*) teljesül.

B. Belátjuk, hogy a tulajdonság öröklődik. Feltesszük, hogy (*) teljesül, és megmutatjuk, hogy ebből következik az állítás $n+1$-re is.

$n+1$ esetén az állítás így szól:

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad (**)$$

A bal oldalba behelyettesítjük (*)-ot.

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=$$

ami tovább alakítva kiadja (**)-ot.

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Mivel az állítás teljesül $n = 1$ esetén (A.), valamint a tulajdonság öröklődik (B.), (*) minden n természetes szám esetén fennáll. ■

5. fel.

2.0-2.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (*)$$

Megoldás.

A. $n = 1$ esetén $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$, így (*) teljesül.

B. Belátjuk, hogy a tulajdonság öröklődik. Feltesszük, hogy (*) teljesül, és megmutatjuk, hogy ebből következik az állítás $n+1$-re is.

$n+1$ esetén az állítás így szól:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad (**)$$

A bal oldalba behelyettesítjük (*)-ot.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) =$$

$$= (n+1)\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \qquad (***)$$

Most alakítsuk (**) jobb oldalát.

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3n + 6)}{6}$$

ez pedig megegyezik (***)-gal.

Mivel az állítás teljesül $n = 1$ esetén (A.), valamint a tulajdonság öröklődik (B.), (*) minden n természetes szám esetén fennáll. ∎

2.0-3.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad (*)$$

6. fel.

Megoldás.

A. $n = 1$ esetén $1 \cdot 2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 1 \cdot 2$, így (*) teljesül.

B. Belátjuk, hogy a tulajdonság öröklődik. Feltesszük, hogy (*) teljesül, és megmutatjuk, hogy ebből következik az állítás $n+1$-re is.

$n+1$ esetén az állítás így szól:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \qquad (**)$$

A bal oldalba behelyettesítjük (*)-ot.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) =$$

ami tovább alakítva kiadja (**)-ot.

$$= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Mivel az állítás teljesül $n = 1$ esetén (A.), valamint a tulajdonság öröklődik (B.), (*) minden n természetes szám esetén fennáll. ∎